TESTE GRILĂ DE MATEMATICĂ

pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în învăţământul superior

la

UNIVERSITATEA „POLITEHNICA” DIN TIMISOARA

în anul universitar 2012 – 2013

PREFAȚĂ

Prezenta culegere se adresează deopotrivă elevilor de liceu, în scopul instruirii lor curente, cât şi absolvenților care doresc să se pregătească temeinic în vederea examenului de bacalaureat şi a concursului de admitere în universități de prestigiu în care admiterea se face pe baza unor probe la disciplinele de matematică.

Conținutul culegerii este adaptat noului curriculum de matematică care prin setul de competențe, valori şi atitudini pe care le promovează asigură premisele pentru o integrare profesională optimă prin trasee individuale de învățare şi formare.

Având în vedere diversitatea datorată existenței unui mare număr de manuale alternative, am căutat să unificăm diferitele maniere de prezentare prin alegerea unor probleme pe care le considerăm indispensabile pentru abordarea cu succes a cursurilor de matematică din ciclul întâi de la toate facultățile Universității „Politehnica"din Timişoara.

La alcătuirea problemelor s-a avut în vedere o reprezentare corespunzătoare atât a părții de calcul, cât şi a aspectelor de judecată, respectiv, de raționament matematic. Gradul de dificultate al problemelor nefiind cel al unei olimpiade de matematică, acestea vor putea fi abordate de orice elev sau absolvent cu o pregătire medie a părții teoretice şi care posedă deprinderi de calcul corespunzătoare.

Problemele sunt prezentate după modelul „test", cu şase răspunsuri fiecare, dintre care unul singur este corect.

Conştienți de faptul că doar urmărirea rezolvării unor probleme nu duce la formarea deprinderilor de calcul şi a unui raționament matematic riguros, autorii au ales varianta problemelor propuse fără rezolvări. De asemenea, pentru a nu „forța" în rezolvare obținerea unui rezultat dinainte cunoscut, nu se face precizarea care dintre cele şase răspunsuri este adevărat, aceasta rezultând în urma unei rezolvări corecte. Totuşi, pentru unele problemele cu un grad mai mare de dificultate, autorii au considerat necesar să dea indicații şi rezolvări integrale.

Ținând cont de faptul că prezenta carte va fi folosită şi la întocmirea subiectelor pentru concursul de admitere la Universitatea „Politehnica" din Timişoara, invităm absolvenții de liceu să rezolve testele din acest volum, adăugându-şi astfel cunoştințe noi la cele deja existente şi implicându-se prin aceasta în demersul de evaluare a propriilor competențe.

Departamentul de Matematică al UPT

DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

PROGRAMA ANALITICĂ

Elemente de algebră

Progresii aritmetice şi geometrice. Funcţii: funcţia parte întreagă, funcţia radical, funcţia de gradul al doilea. Ecuaţii iraţionale. Sisteme de ecuaţii neliniare. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică. Ecuaţii exponenţiale şi ecuaţii logaritmice. Permutări, aranjamente, combinări. Binomul lui Newton. Numere complexe sub formă algebrică şi sub formă trigonometrică. Matrice.Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare. Legi de compoziţie. Grupuri. Inele şi corpuri. Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ.

Elemente de geometrie şi trigonometrie

Funcţii trigonometrice. Relaţii între funcţii trigonometrice. Ecuaţii trigonometrice. Aplicaţii trigonometrice în geometria plană: teorema cosinusului, teorema sinusurilor; rezolvarea triunghiurilor. Dreapta în plan. Ecuaţii ale dreptei. Condiţii de paralelism şi condiţii de perpendicularitate a două drepte. Calcule de distanţe şi arii. Ecuaţii ale cercului în plan.

Elemente de analiză matematică

Limite de şiruri. Limite de funcţii. Continuitate. Derivabilitate. Aplicaţii ale derivatelor în studiul variaţiei funcţiilor. Primitive. Integrala definită. Aplicaţii ale integralei definite: aria unei suprafeţe plane, volumul unui corp de rotaţie, calculul unor limite de şiruri.

Această culegere este recomandată pentru admiterea la următoarele facultăţi ale Universităţii „Politehnica” din Timişoara:

Facultatea de Arhitectură

Facultatea de Automatică şi Calculatoare

Facultatea de Electronică şi Telecomunicaţii

CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

ELEMENTE DE ALGEBRĂ
(simbol AL)

AL - 001 Care este cel de-al 10-lea termen al şirului 1,3,5,7,...?

a) 10   b) 11   c) 15   d) 20   e) 19   f) 17

AL - 002 Să se găsească primul termen a_1 şi raţia r ai unei progresii aritmetice

$$\left(a_n\right)_{n\geq 1} \text{ dacă : } \begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}.$$

a) $a_1 = -4, r = 3$ b) $a_1 = -4, r = 4$ c) $a_1 = -3, r = 1$

d) $a_1 = -5, r = 2$ e) $a_1 = -2, r = 2$ f) $a_1 = 1, r = 1$

AL - 003 Să se determine suma primilor 100 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă a_1=2, a_5=14.

a) 10100   b) 7950   c) 15050

d) 16500   e) 50100   f) 350

AL - 004 Pentru o progresie aritmetică suma primilor n termeni ai ei este $S_n = 5n^2 + 6n$. Să se determine primul termen a_1 şi raţia r.

a) $a_1 = 11, r = 9$ b) $a_1 = 11, r = 10$ c) $a_1 = 11, r = 11$

d) $a_1 = 10, r = 11$ e) $a_1 = 10, r = 10$ f) $a_1 = 9, r = 9$

AL - 005 Să se determine raţia şi primul termen ale unei progresii aritmetice pentru care $a_5 = 18,$ iar $S_n = \frac{1}{4} S_{2n}$, unde S_n este suma primilor n termeni ai progresiei.

a) $a_1 = 6, r = 3$ b) $a_1 = 14, r = 1$ c) $a_1 = 2, r = 4$

d) $a_1 = -2, r = 5$ e) $a_1 = 8, r = \frac{5}{2}$ f) $a_1 = 1, r = 1$

AL - 006 Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele numere: $\left[\frac{3x+1}{5}\right]$, $2x+1$, $4x+1$ să fie în progresie aritmetică, unde $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a lui $\alpha \in \mathbf{R}$.

a) $x \in \left[\frac{3}{4}, 3\right)$; b) $x \in \left[\frac{4}{3}, 3\right)$; c) $x \in \left[\frac{4}{3}, 3\right]$;

d) $x \in \left(\frac{3}{4}, 3\right]$; e) $x \in \left(\frac{4}{3}, 3\right]$; f) $x \in \phi$

AL - 007 Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât următoarele numere să fie în progresie aritmetică: $\left[\frac{3x}{x+1}\right]$, $4x-1$, $\left[\frac{5}{x}\right]$, unde $x \in \mathbf{N}^*$.

a) $x \in \{1,2,3\}$; b) $x = 5$ c) $x = 1$ d) $x \in \{5,6,7,8\}$ e) $x = 0$ f) $x \in \phi$

AL - 008 Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât următorul triplet să fie format din numere în progresie geometrică

$$|x+1|, \quad -4, \quad |3x+5|$$

a) $x\left\{-\frac{11}{3}, 1\right\}$ b) $x\left\{\frac{11}{3}, -1\right\}$ c) $x \in \phi$

d) $x \in \{1\}$ e) $x \in \left\{-\frac{11}{3}\right\}$ f) $x \in \left\{1, \frac{11}{3}\right\}$

AL – 009 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir având suma primilor n termeni $S_n = n^2 + an + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, pentru orice $n \geq 1$. Să se determine a şi b astfel încât şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ să fie progresie aritmetică cu primul termen egal cu 2.

a) $a = 2,\ b = 3$ b) $a \in \mathbf{R},\ b \in (1,2)$ c) $a = 1, b = 0$

d) $a = 2, b = 0$ e) $a = 2, b = 1$ f) $a = 1, b = 2$

AL – 010 Fie $p, q \in \mathbf{N}^*$, $p \neq q$. Să se determine rația unei progresii aritmetice în care primul termen este 3, iar raportul între suma primilor p termeni şi suma primilor q termeni este $\frac{p^2}{q^2}$.

a) 1 b) 2 c) 6 d) 5 e) 4 f) 3

AL – 011 Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ termenii unei progresii aritmetice cu rația $r \neq 0$. În funcție de a_1, n şi r să se calculeze suma: $S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$.

a) $\frac{n}{a_1(a_1+n)}$ b) $\frac{n+1}{a_1^2 + n a_1 r}$ c) $\frac{n-1}{a_1[a_1+(n-1)r]}$

d) $\frac{n-1}{a_1(a_1 - nr)}$ e) $\frac{n}{(a_1+r)n}$ f) $\frac{n+2}{a_1+(n-1)r}$

AL – 012 Să se determine numărul termenilor unei progresii aritmetice descrescătoare dacă simultan sunt îndeplinite condițiile :

(i) Rația satisface ecuația $\sqrt[3]{9^{x^2 - x - \frac{3}{2}}} = 27$

(ii) Primul termen satisface ecuația :

$$\lg 2 + \lg(y+1) = \lg(5y+7) - \lg 3$$

(iii) Suma progresiei este cu 9 mai mică decât exponentul p al binomului $\left(\sqrt[3]{b^2} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^p$ în a cărui dezvoltare termenul al patrulea conține pe b la puterea întâi.

a) n = 5 b) n = 3 c) n = 6 d) n = 10 e) n = 4 f) n=8

AL - 013 Să se determine primul termen a_1 şi rația q pentru progresia

geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă : $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15 \\ a_4 - a_2 = 6 \end{cases}$.

a) $a_1 = 0,\ q = 1$ b) $a_1 = 1,\ q = 2$ c) $a_1 = -16,\ q = \frac{1}{2}$

d) $\begin{cases} a_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ e) $a_1 = 1,\ q = -1$ f) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 4 \end{cases}$

AL - 014 Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1, 2, 11, progresia devine geometrică . Să se afle aceste numere.

a) 5,4,7 şi 15,14,13 b) 1,4,7 şi 17,4,-9 c) 6,8,10
d) 1,3,5 şi 17,15,13 e) 5,9,13 şi 18,14,10 f) 2,4,6 şi –1,4,9

AL – 015 Trei numere sunt în progresie geometrică. Dacă se măreşte al doilea cu 32, progresia devine aritmetică, iar dacă se măreşte apoi şi al treilea cu 576, progresia devine din nou geometrică. Care sunt cele trei numere ?

a) 4,20,100 sau 1,-7,49 ; b) 4,100,20 sau -7,1,49 ;
c) 100,4,20 sau 1,49,-7 ; d) 2,4,6 sau 6,4,2 ;
e) 8,10,12 sau -3,-1,0 ; f) 1,2,3 sau 49,50,51

AL – 016 Pot fi numerele 7,8,9 elemente ale unei progresii geometrice ?

a) Da în progresie geometrică în ordinea 7,8,9 cu o rație q<1
b) Da în progresie geometrică în ordinea 9,8,7 cu o rație q<1
c) Da în progresie geometrică în ordinea 7,9,8 cu o rație q<1
d) Da în progresie geometrică în ordinea 8,9,7 cu o rație q<1
e) Nu, cu numerele date nu se poate forma o progresie geometrică
f) Da în progresie geometrică în ordinea 7,9,8 cu o rație q>1

AL – 017 Să se calculeze $\sum_{k=1}^{13} k \cdot 2^{k-1}$.

a) 98299; b) 98301; c) 98303;

d) 98305; e) 98307; f) 98309

AL – 018 Să se calculeze suma

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n-cifre} .$$

a) $\frac{1}{81}\left[10^n - 10 - 9n\right]$ b) $\frac{1}{81}\left[10^{n-1} - 10 - 9n\right]$ c) $\frac{1}{81}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$

d) $\frac{1}{9}\left[10^n - 10 - 9n\right]$ e) $\frac{1}{9}\left[10^{n-1} - 10 - 9n\right]$ f) $\frac{1}{9}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$

AL – 019 Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ primii n termeni ai unei progresii geometrice cu $a_k > 0, k = \overline{1, n}$. Dacă $S_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ şi $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, atunci :

a) $p = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n$ b) $p = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^n$ c) $p = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$

d) $p = \sqrt[n]{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$ e) $p = S_1^n - S_2^n$ f) $p = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2}$

AL – 020 Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ două progresii astfel încât prima să fie aritmetică şi cea de a doua geometrică, iar $a_1 = b_1 = 3$ şi $a_3 = b_3$. Să se determine aceste progresii dacă $a_2 = b_2 + 6$.

a) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 12n + 9$, $b_n = 3^n$

b) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 12n - 6$, $b_n = 3^n$

c) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 3$, $b_n = 3(-1)^{n-1}$

d) $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$ sau $a_n = 3$, $b_n = 3(-1)^n$

e) $a_n = 12n + 9$, $b_n = 3(-1)^{n-1}$ sau $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3(-1)^n$

f) $a_n = 12n + 9$, $b_n = 3(-1)^n$ sau $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$

AL – 021 Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ un şir de numere reale în progresie geometrică şi $p \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze suma

$$S_n = \frac{1}{a_2^p + a_1^p} + \frac{1}{a_3^p + a_2^p} + ... + \frac{1}{a_{n+1}^p + a_n^p}.$$

a) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p (q^{2np} - 1)}$ b) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p (q^{2p} - 1)}$ c) $S_n = \dfrac{q^{np} - 1}{a_1^p q^{(n-1)p} (q^{2p} - 1)}$

d) $S_n = \dfrac{(q^{np} - 1) q^{(n-1)p}}{a_1^p (q^{2p} - 1)}$ e) $S_n = \dfrac{q^{(n-1)p}}{a_1^p (q^p + 1)}$ f) $S_n = \dfrac{1}{a_1^p q^{(n-1)p} (q^p + 1)}$

AL – 022 Să se calculeze expresia

$$E = \frac{1 + a + a^2 + ... + a^{n-1}}{1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n-2}},\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}.$$

a) $\dfrac{1}{a}$ b) $\dfrac{a^n + 1}{a - 1}$ c) $\dfrac{a + 1}{a^n + 1}$

d) $\dfrac{a}{a^n+1}$ e) $\dfrac{a^n+1}{a^{2n}+1}$ f) 1

AL – 023 Să se decidă dacă este progresie geometrică un şir pentru care suma primilor săi n termeni este $S_n = n^2 + 1$; în caz afirmativ precizaţi raţia q a acesteia.

a) $q = \dfrac{3}{2}$ b) $q = \dfrac{2}{3}$ c) $q = 2$

d) $q = 3$ e) Şirul nu este progresie geometrică f) $q = 6$

AL – 024 Să se determine numerele reale *x,y,z* dacă *x,y,z* sunt în progresie aritmetică cu raţia nenulă, *x,z,y* sunt în progresie geometrică şi *x+y+z = 18.*

a) - 24, 6, 12 b) 24, 6, -12 c) 6, 12, 0

d) -12, 12, 18 e) 12, -6, 36 f) 36, -18, 0

AL – 025 Să se determine numerele reale a cu proprietatea

$$\left[a + \frac{1}{2}\right] = \frac{5a-1}{3}$$, şi să se precizeze intervalul în care se află soluţia.

a) $\left[\dfrac{3}{5}, 1\right]$ b) $\left[\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ c) $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

d) $\left[\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ e) $\left[0, \dfrac{2}{5}\right]$ f) $[1, \infty)$

AL - 026 Să se determine numărul natural

$$N = \sum_{k=1}^{6} \left[\frac{100}{2^k}\right],$$

unde [·] notează partea întreagă a numărului raţional scris în interior.

a) 70 b) 83 c) 57 d) 91 e) 97 f) 78

AL - 027 Dacă [α] reprezintă partea întreagă a lui $\alpha \in \mathbf{R}$, să se rezolve ecuația :

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$$

precizându-se în care din următoarele intervale se află soluția

a) $(2,7) \cup (9,15)$
b) $(-5,-3) \cup (1,3] \cup [5,7)$
c) $(-3,2) \cup [3,4) \cup (6,14)$
d) $\left[1,\frac{3}{2}\right] \cup (2,4) \cup [5,7)$
e) $(-1,1] \cup [2,3) \cup (5,8)$
f) $[0,2] \cup [4,7] \cup (9,+\infty)$

AL - 028 Să se rezolve ecuația

$$5[x^2]-3[x]+2=0$$

a) $x \in [1,\sqrt{2})$
b) $x \in (1,\sqrt{2})$
c) $x \in (0,1)$
d) $x \in (0,1]$
e) $x \in \varnothing$
f) $x \in [\sqrt{2},2)$

AL - 029 Mulțimea soluțiilor ecuației: $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$, unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x, este

a) $\left\{\frac{4}{5}\right\}$,
b) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$,
c) $\left\{\frac{7}{15},\frac{4}{5}\right\}$,
d) $\left\{\frac{7}{15}\right\}$,
e) $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$,
f) $\left\{\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right\}$

AL - 030 Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{[x]}$$

să se precizeze care din următoarele mulțimi este S

a) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{Z}^*\right\}$ b) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}^*}\left[k, k+\frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2; n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1,1\}\}$

d) {-1,1} e) [-1,1] f) (-1,1)

AL – 031 Se consideră funcția f: **R**→**R**, $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}\right]+1$

şi se notează $f_2=f \circ f, \ldots, f_n = f_{n-1} \circ f$.

Să se determine expresia lui f_n

a) $f_n(x) = f(x) + n$; b) $f_n(x) = 2^n f(x)$; c) $f_n(x) = 2^n f(x)+2^{n-1}+1$
d) $f_n(x) = f(x)$; e) $f_n(x) = f(x)+2n+1$; f) $f_n(x) = 2f(x)+1$

AL - 032 Fie ecuația $\left[\frac{x-2}{3}\right]=\left[\frac{x-3}{2}\right]$. Stabiliți care dintre afirmațiile de mai jos este adevărată

a) ecuația are două soluții b) ecuația are trei soluții
c) ecuația are o singură soluție d) ecuația are o infinitate de soluții
e) ecuația nu are nici o soluție f) ecuația are numai soluții negative

AL - 033 Se dă ecuația $\left[\frac{m^2x-1}{2}\right]=\frac{2x+1}{5}$, $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real *x*.

Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ pentru care ecuația are soluții şi apoi să se determine aceste soluții:

a) $m = \pm 1$
$x_1 = 1;\ x_2 = 2$
$x_3 = 7;\ x_4 = \frac{19}{2}$

b) $m = \pm 2$
$x_1 = 7;\ x_2 = \frac{19}{2}$
$x_3 = 11;\ x_4 = \frac{29}{2}$

c) $m = \pm 1$
$x_1 = 7;\ x_2 = \frac{19}{2}$
$x_3 = 12;\ x_4 = \frac{29}{2}$

d) $m = \pm 1$
$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{19}{2}$

e) $m = \pm 1$
$x_1 = 7;\ x_2 = \frac{19}{2}$

f) $m = \pm 3$
$x_1 = 7;\ x_2 = \frac{19}{2}$

$x_3 = \frac{29}{4}; x_4 = 11$ $\qquad$ $x_3 = 8; x_4 = \frac{19}{2}$ $\qquad$ $x_3 = 11; x_4 = \frac{29}{2}$

AL - 034 Să se calculeze $f((1,4])$ pentru funcția de gradul al doilea definită prin

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

a) $[0,3]$ b) $[-1,0)$ c) $(0,3]$ d) $[-1,3]$ e) $(-1,0)$ f) $(0,3)$

AL - 035 Dacă funcțiile f,g :**R**→**R** au proprietățile:

i) $f(g(x)) = x^2-3x+4$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$;

ii) $g(f(2)) = 2$

să se determine cel puțin o soluție reală a ecuației $f(x) = g(x)$

a) $x = 1$ b) $x = -2$ c) $x = 2$

d) $x = -2$ e) $x = 4$ f) $x = 3$

AL – 036 Să se rezolve inecuația $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} \le \frac{1}{2(x-1)}$.

a) $x \in (-\infty,-1)$ b) $x \in (-\infty,-1) \cup \left[0,\frac{2}{3}\right) \cup (1,2)$ c) $x \in \left(0,\frac{2}{3}\right) \cup [1,2] \cup (3,\infty)$

d) $x \in (1,2) \cup (3,\infty)$ e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{1,2\}$ f) $x \in (-\infty,-2) \cup \left[0,\frac{2}{3}\right] \cup (1,2)$

AL - 037 Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbf{R}$, astfel încât

$$\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, 3x^2 + mx - 22 = 0\right\} \cap \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x^2 - (m+4)x + 14 = 0\right\} \ne \varnothing.$$

a) $(-\infty, 5)$ b) $\{-7, 3\}$ c) $\mathbf{R}$ d) $\{-19, 5\}$ e) $\{-17, 8\}$ f) $\{1\}$

AL - 038 Să se rezolve inecuația $|x| < x^2 - x$.

a) $x \in \mathbf{R}$ b) $x \in (-\infty,2) \cup (3,\infty)$ c) $x \in (3,+\infty)$

d) $x \in (0,+\infty) \cup (-\infty,-2)$ e) $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0,2\}$

AL - 039 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât

$$\left\{x \in \mathbf{R} : (m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 > 0\right\} = \varnothing .$$

a) $m \in (-\infty,-1) \cup \left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ b) $m \in [1,+\infty)$ c) $m \in (-\infty,-1]$

d) $m \in \left[\frac{5}{3},+\infty\right)$ e) $m \in \left[-1,\frac{5}{3}\right]$ f) $m \in (-\infty,1]$

AL - 040 Să se afle minimul expresiei $E = a^2 + 2b^2 - 3a + 3b$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$.

a) $-\frac{9}{4}$ b) 1 c) 0 d) $-\frac{27}{8}$ e) -1 f) -3

AL - 041 Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m - 4$, $m \in \mathbf{R}$.
Să se exprime în funcție de $m > 4$, expresia $E = |x_1| \cdot f(x_2 - m) + |x_2| \cdot f(x_1 - m)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

a) $1 - m$ b) $m^2 + 1$ c) $4m(m-4)$

d) $4(m^2 - 1)$ e) $m(m-4)$ f) $m^2 + 2$

AL - 042 Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel ca rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației

$$x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0 \text{ să satisfacă relația } 3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0 .$$

a) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ b) $m_1 = 1$, $m_2 = -1$ c) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$

d) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ e) $m_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ f) $m_1 = 2$, $m_2 = -2$

AL - 043 Fie ecuația $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Care este mulțimea valorilor pe care le pot lua rădăcinile reale x_1, x_2 când m variază ?

a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ b) $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ c) $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$
d) $[-1,1]$ e) $[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$ f) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

AL - 044 Fie ecuația

$$2x^2-2(m+2)x+m^2+4m+3=0, \quad m\in\mathbf{R}.$$

Dacă ecuația are rădăcinile reale $x_1(m), x_2(m)$, precizați valoarea maximă a expresiei

$$E = |x_1(m) + x_2(m)|.$$

a) 3; b) 4; c) 2; d) $\sqrt{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

AL - 045 Fiind dată ecuația $ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$, să se exprime în funcție de a, b și c suma

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3,$$

unde x_1,x_2 sunt rădăcinile ecuației date.

a) $S_3 = \frac{b^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2}$ b) $S_3 = \frac{c^3}{a^3} - 3\frac{bc}{a^2}$ c) $S_3 = \frac{b^2}{a^2} - 3\frac{bc}{a^3}$

d) $S_3 = -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$ e) $S_3 = -\frac{c^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$ f) $S_3 = -\frac{b^2}{a^2} + 3\frac{bc}{a^3}$

AL - 046 Se consideră ecuațiile $x^2 - 7x + 12 = 0$ și $x^2 - 3x + m = 0$. Să se afle m pentru ca ecuațiile să aibă o rădăcină comună.

a) $m \in \{-4,0\}$, b) $m \in \{-1,0\}$ c) $m \in \{-4,1\}$

d) $m \in \{1,2\}$ e) $m \in \{2,3\}$ f) $m \in \{0,1\}$

AL - 047 Să se determine parametrii reali m și n astfel ca ecuațiile
$(5m-52)x^2 + (4-m)x + 4 = 0$ și $(2n+1)x^2 - 5nx + 20 = 0$

să aibă aceleaşi rădăcini.

a) *m = -11, n = 7;* b) *m = - 7, n = 11* c) *m = 9, n = 7*

d) *m = 11, n = 7* e) *m = 7, n = 11* f) *m = 9, n = -7*

AL - 048 Fie ecuația $3mx^2+(2m+1)x+m+1=0$, $m\in\mathbf{R}$, ale cărei rădăcini sunt x_1 şi x_2. Să se determine o relație independentă de m între rădăcinile ecuației.

a) $x_1+x_2=x_1x_2$ b) $x_1^2+x_2^2=2x_1x_2$ c) $x_1^2-x_2^2=2x_1x_2$

d) $x_1+x_2+x_1x_2=-\frac{1}{3}$ e) $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=0$ f) $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=0$

AL - 049 Se consideră ecuațiile $ax^2+bx+c=0,\quad a'x^2+b'x+c'=0\quad a\neq 0, a'\neq 0$ cu rădăcinile x_1,x_2 şi respectiv x_1',x_2'. Dacă între coeficienții celor două ecuații există relația $ac'+a'c-2bb'=0$, atunci care din următoarele relații este verificată de rădăcinile celor două ecuații?

a) $x_1x_2+x_1'x_2'-2(x_1+x_2)(x_1'+x_2')=0$ b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}$

c) $x_1x_1'+x_2x_2'=x_1+x_1'+x_2+x_2'$ d) $2x_1=x_2-x_2'+2x_1'$

e) $x_1x_2=x_1'x_2'$ f) $x_1x_2+x_1+x_2=\frac{1}{x_1'}+\frac{1}{x_2'}$

AL - 050 Să se rezolve ecuația irațională $\sqrt{1-x^2}+x=1$.

a) $x_1=0,\ x_2=1$ b) $x_1=-1,\ x_2=1$ c) $x_1=-1,\ x_2=0$

d) $x_1=1,\ x_2=2$ e) $x_1=-1,\ x_2=2$ f) $x_1=0,\ x_2=2$

AL - 051 Determinați toate valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care are loc inegalitatea $\sqrt{3x-11} - 7 + \sqrt{x} < 0$.

a) $\{1,3,4,5,6,7,8\}$ b) $\{1,2,3,4,5,7,8\}$ c) $\{2,3,4,5,6,7,8\}$

d) $\{4,5,6,7,8\}$ e) $\{2,3,5,6,7\}$ f) $\{2,4,5,6,7,8\}$

AL - 052 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$. Să se determine x pentru care funcția ia cea mai mare valoare.

a) $1-\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{3}$ c) 1 d) $-1+\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $1+\sqrt{3}$

AL - 053 Să se determine toate valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care funcția

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\in(-\infty,1) \\ mx-m+1, & x\in[1,\infty) \end{cases}$$

este monotonă.

a) $m \in (-\infty, o)$ b) $m=-4$ c) $m \in \mathbf{R}$

d) $m \in [0,\infty)$ e) $m \in [-2,1)$ f) $m \in \varphi$

AL - 054 Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția

$$f:R\to R,\quad f(x)=\begin{cases} x+m, & x\in(-\infty,3] \\ mx+2, & x\in(3,\infty) \end{cases}$$

să fie surjectivă.

a) $m=-1$ b) $m \in (0,1)$ c) $m \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

d) $m \in \left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ e) $m \in \varphi$ f) $m=1$

AL - 055 Să se determine mulțimea maximală E astfel încât funcția $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$f(x) = \max\{2x-5,\ x-2\}$
să fie bijecție.

a) $E = \mathbf{R}_+$ b) $E = [-\infty, 0]$ c) $E = \mathbf{R}$
d) $E = [0,1]$ e) $E = (-\infty, 3]$ f) $E = [1, \infty)$

AL - 056 Fie funcția de gradul al doilea $f_m(x) = mx^2 - (2m-1)x + m - 1$, $(m \neq 0)$. Să se determine m astfel încât vârful parabolei asociate acestei funcții să se găsească pe prima bisectoare.

a) $m = \frac{1}{4}$ b) $m = 4$ c) $m = \frac{1}{2}$ d) $m = 2$ e) $m = \frac{1}{6}$ f) $m = 6$

AL - 057 Determinați valorile parametrului real m astfel încât dreapta de ecuație $y + 1 = x$ să taie parabola de ecuație $y = mx^2 + (m-5)x + m^2 + 2$ în punctele (1,0) și (4,3).

a) $m_1 = -1, m_2 = -3$ b) $m_1 = 3, m_2 = -3$ c) $m = -3$

d) $m = 1$ e) $m = -21$ f) $m = 3$

AL - 058 Fie familia de funcții de gradul al doilea

$$f_m(x) = x^2 - 2(m-1)x + m - 2, \quad m \in \mathbf{R}$$

Să se arate că vârfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă a cărei ecuații se cere.

a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + x + 1$ c) $y = -x^2 - x + 1$
d) $y = -x^2 + x - 1$ e) $y = 2x^2 - x + 3$ f) $y = x^2 + 1$

AL - 059 Determinați expresia analitică a funcției de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x)=ax^2+4x+c$, ştiind că graficul ei taie axa Oy în punctul 1 şi are abscisa vârfului $-\frac{2}{3}$.

a) $f(x)=2x^2+4x+1$ b) $f(x)=3x^2+4x-1$
c) $f(x)=4x^2+4x+1$ d) $f(x)=3x^2+4x+1$
e) $f(x)=x^2+4x+1$ f) $f(x)=3x^2+4x+3$

AL - 060 Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât parabolele asociate funcțiilor $f(x)=x^2-2x-4$ şi $g(x)=mx^2-2mx-6$ să aibă acelaşi vârf.

a) m = -1 b) m = 1 c) m = -2

d) m = 2 e) m = 3 f) m = -5

AL - 061 Fiind dată familia de parabole $f_m(x)=mx^2-2(m+1)x+m+2$, $\forall m\in\mathbf{R}^*$ să se determine valorile lui m pentru care obținem parabole ale căror puncte de intersecție cu axa Ox sunt simetrice față de origine.

a) $m\in\mathbf{R}-\{-1\}$ b) $m=2$ c) $m=1$

d) $m=-1$ e) $m\in\{-1,1,2\}$ f) $m=3$

AL - 062 Să se determine $p,q\in\mathbf{R}$ dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-x^2+px+q$ are maximul 4 în punctul x = -1.

a) $p=-2, q=3$ b) $p=-1, q=2$ c) $p=3, q=-2$

d) $p=q=-2$ e) $p=q=1$ f) $p=2, q=-3$

AL - 063 Presupunem că pentru ecuația $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ avem $\Delta>0$ şi rădăcinile x_1, x_2. Să se calculeze $|x_1-x_2|$ în funcție de Δ şi a.

a) $\dfrac{\Delta}{2a}$ b) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ c) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$

d) $\sqrt{\Delta}$ e) $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{-a}$ f) $\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

AL - 064 Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2-x+1=0$, atunci ecuația care are rădăcinile x_1+1 şi x_2+1 este echivalentă cu:

a) $y^2-y+1=0$; b) $y^2-y+2=0$ c) $y^2-2y+2=0$

d) $y^2-3y+1=0$ e) $y^2-3y+2=0$ f) $y^2-3y+3=0$

AL - 065 Fie o funcție $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, astfel încât $f(1)=5$ şi $\forall x, y\in\mathbf{R}$,
$f(x+y)-f(x)=Kxy+2y^2$, unde *K* este o constantă.
Să se determine valoarea lui *K* şi funcția *f*.

a) $K=4;\ \ f(x)=2x+3$ b) $K=3,\ \ f(x)=2x^2-x+4$

c) $K=3;\ \ f(x)=x+4$ d) $K=1;\ \ f(x)=2x^2-3x+6$

e) $K=4;\ \ f(x)=2x^2+3$ f) $K=2;\ \ f(x=2x^2-2x+5)$

AL - 066 Fie $a\in\mathbf{R}$ şi funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x)=x^2-2ax+3$.
Dacă rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $f(x)=0$ satisfac relația $3(x_1+x_2)=4x_1x_2$, mulțimea soluțiilor inecuației $f(2x+1)<f(x)$ este:

a) (-1, 0); b) (-1, 1); c) (-1, 2);

d) (0, 1); e) (0, 2); f) (-2, 2).

AL - 067 Care sunt valorile k reale pentru care inecuația

$$x^2-(k-3)x-k+6<0 \text{ nu are soluții ?}$$

a) $k\in(-5,0)$ b) $k\in[1,5)$ c) $k\in[-3,5]$

d) $k\in[-3,8]$ e) $k\in[-2,3]\cup(4,7)$ f) $k\in[-1,2)\cup(4,5)$

AL - 068 Pentru ce valori ale parametrului real m inegalitățile

$$-2<\frac{2x^2-mx+2}{x^2-x+1}<6 \text{ sunt satisfăcute pentru orice } x\in\mathbf{R}\text{ ?}$$

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in(-2,6)$ c) $m\in(6,+\infty)$

d) $m\in(-\infty,-2)$ e) $m\in(-6,6)$ f) $m\in[-2,6]$

AL - 069 Să se rezolve inecuația $5x^2-20x+26\geq\dfrac{4}{x^2-4x+5}$.

a) $[-1,0)$ b) $\left[\dfrac{4}{5},+\infty\right)$ c) $\{0,1\}$ d) $\mathbf{R}$ e) $\varnothing$ f) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

AL - 070 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{4x^2-6mx+9}{x^2+1}$ să nu ia nici o valoare mai mică decât 3 sau mai mare decât 13.

a) $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ b) $(-2,2)$ c) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

d) $[-1,1]$ e) $(-1,2]$ f) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

AL - 071 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât

$$\frac{x^2+(m+1)x+m+2}{x^2+x+m}>0 \quad \text{pentru orice } x\in\mathbf{R}.$$

a) $m\in\left\{1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right\}$ b) $m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup\left[1+2\sqrt{2},+\infty\right)$

c) $m\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ d) $m\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup\left(1+\sqrt{2},+\infty\right)$

e) $m\in\left(1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right)$ f) $m\in\left(\frac{1}{4},1+2\sqrt{2}\right)$

AL - 072 Să se afle cea mai mică valoare a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2x\sqrt{1-m^2}+1+m+m^2$, când parametrul real m parcurge toate valorile posibile.

a) -1 b) 0 c) 1 d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{4}$

AL - 073 Să se determine distanța celui mai apropiat vârf al parabolelor

$f(x)=x^2+mx+m-4$, $m\in\mathbf{R}$ de axa Ox.

a) 0 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 3 e) 4 f) 1

AL - 074 Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât $4mx^2+4(1-2m)x+3(m-1)>0$ pentru orice $x>1$.

a) $m\in(-\infty,0)$ b) $m\in(0,+\infty)$ c) $m\in(1,4]$

d) $m\in(0,1]$ e) $m\in[2,+\infty)$ f) $m\in(-1,1)\setminus\{0\}$

AL - 075 Pentru ce valori ale lui m, mulțimea

$A=\left\{x\in\mathbf{R}\ \middle|\ (m-1)x^2-2(m+1)x+m=0\right\}\cap[-1,1]$ are un singur element ?

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in (-1,+\infty)$ c) $m \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

d) $m \in [-2,-1]$ e) $m \in \left(-\frac{1}{4},+\infty\right) \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ f) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$

AL - 076 Fie ecuația $x^2(1-m)+2x(a-m)+1-am=0$, unde $a \neq 1$ şi m sunt parametri reali. Pentru ce valori ale lui a, ecuația admite rădăcini reale oricare ar fi valoarea parametrului m ?

a) $a \in \left(-\infty,-\frac{5}{4}\right]$ b) $a \in \mathbf{R}$ c) $a \in (-1,1)$ d) $a \in (0,1)$ e) $a \in [0,+\infty)$ f) $a \in (1,+\infty)$

AL - 077 Se consideră ecuația $mx^2 - x + m - 7 = 0$. Căruia din intervalele indicate mai jos trebuie să aparțină parametrul real m, astfel ca ecuația dată să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul $[2,4]$?

a) $(-\infty,-1]$ b) $(2,+\infty)$ c) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ d) $\left[-\frac{1}{2},0\right)$ e) $\left[\frac{11}{17},\frac{9}{5}\right]$ f) $\left(0,\frac{9}{5}\right)$

AL - 078 Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ astfel încât ecuația $mx^2-(m-1)x-1=0$ să aibă ambele rădăcini în intervalul $(-\infty,3]$.

a) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{5}\right] \cup (0,+\infty)$ b) $m \in (-1,1] \setminus \{0\}$ c) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{5},+\infty\right)$

d) $m \in (-\infty,0) \cup [2,+\infty)$ e) $m \in \left[-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right]$ f) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup (0,+\infty)$

AL - 079 Să se determine $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ pentru funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$$

a) $\left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3},\frac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$ b) $\left[\frac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

c) $\left(-\infty,\frac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]$ d) $\left(-\infty,\frac{9-2\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\frac{9+2\sqrt{21}}{3},\infty\right)$

e) $\left(-\infty,\frac{9-3\sqrt{21}}{3}\right]\cup\left[\frac{9+3\sqrt{21}}{3},\infty\right)$ f) $\left(\frac{9-3\sqrt{21}}{3},\frac{9+3\sqrt{21}}{3}\right)$

AL - 080 Rezolvați în **R** inecuația $|1-x|-|x^2-3x+2|>0$.

a) $x\in(1,3]$ b) $x\in(1,3)$ c) $x\in(2,4)$
d) $x\in(0,2)\cup(3,4)$ e) $x\in[2,4]$ f) $x\in(-1,4]$

AL - 081 Să se rezolve în **R** ecuația $|x^2-1|+|x^2-4|-1=0$.

a) $x\in(-2,1)$ b) $x\in\mathbf{R}$ c) $x\in[2,+\infty)$ d) $x\in\varnothing$ e) $x\in(-\infty,-2]$ f) $x\in\mathbf{R}\setminus\{1,4\}$

AL - 082 Precizați care este mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases}3y^2-2xy=160\\ y^2-3xy-2x^2=8\end{cases}.$$

a) $\{(8,2);(-8,-2);(17,-5);(-17,5)\}$ b) $\left\{(2,8);(-2,-8);\left(\frac{17}{2},-5\right);\left(-\frac{17}{2},5\right)\right\}$

c) $\left\{(-2,8);(2,-8);\left(-\frac{17}{2},-\frac{5}{2}\right);\left(\frac{17}{2},\frac{5}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{(2,-8);(-2,-8);\left(17,\frac{5}{2}\right);\left(-17,-\frac{5}{2}\right)\right\}$

e) $\left\{(1,-4);(-1,-4);\left(\frac{17}{2},5\right);\left(-\frac{17}{2},-5\right)\right\}$ f) $\left\{(-1,4);(1,-4);\left(\frac{17}{2},5\right);\left(-\frac{17}{2},-5\right)\right\}$

AL - 083 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}$$

a) $\{(1,3),(3,1)\}$ b) $\{(2,3),(3,2)\}$ c) $\{(1,2),(2,1)\}$

d) $\{(-1,2),(2,-1)\}$ e) $\{(1,1)\}$ f) $\{(2,2)\}$

AL - 084 Să se determine soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{4}{3} \\ x+y+xy=5 \end{cases}$$

a) $\{(2,1),(1,2)\}$, b) $\{(1,1)\}$ c) $\{(2,2)\}$

d) $\{(2,3),(3,2)\}$ e) $\{(1,3),(3,1)\}$ f) $\{(2,2),(1,1)\}$

AL - 085 În care din următoarele mulțimi se află soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=91 \\ x+y+\sqrt{xy}=13 \end{cases}$$

a) $\begin{matrix} x_1\in[0,2], y_1\in\{7,8\} \\ x_2\in[5,10], y_2\in(-1,1) \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x_1\in(-1,3], y_1\in[7,9] \\ x_2\in\{7,8,9], y_2\in[0,3] \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} x_1\in(2,3), y_1\in(0,7) \\ x_2\in\{5,7\}, y_2\in(-1,2) \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x_1\in(2,\infty), y_1\in(-\infty,0] \\ x_2\in\{3,5,7\}, y_2\in\{0,1,3\} \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x_1\in[-7,-2], y_1\in[3,5) \\ x_2\in(3,6), y_2\in(3,6) \end{matrix}$ f) $\begin{matrix} x_1\in(1,5), y_1\in(7,9) \\ x_2\in(7,9), y_2\in(1,5) \end{matrix}$

AL - 086 Fie $\{(x_k, y_k) | k=1,2,...,n\}$ mulțimea soluțiilor reale ale sistemului

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2y^2+xy=6 \end{cases}.$$

Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

a) $3-2\sqrt{2}$; b) 0; c) 1;

d) $3+2\sqrt{2}$; e) – 2; f) $2+\sqrt{2}$

AL - 087 Să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^2=4 \\ y^x=25 \end{cases}$$

a) $(2,5);\left(2,\frac{1}{5}\right)$ $\left(2,-\frac{1}{5}\right);(-2,-5)$

b) $(2,5);(2,-5)$ $\left(-2,\frac{1}{5}\right);\left(-2,-\frac{1}{5}\right)$

c) $x=2;$ $y=5$ este singura soluție

d) $x=2$ $y=-\frac{1}{5}$ este singura soluție

e) $x=\sqrt{4}$ $x=\frac{1}{5}$ este singura soluție

f) $|x|=2$ $|y|=5$

AL - 088 Fie $(S):\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=m \end{cases}$ $,m\in\mathbf{R}$. Fie

$A = \{ m \in \mathbf{R} \mid (S)$ admite o soluție reală unică, notată cu $\left(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m, \tilde{z}_m \right) \}$,

$S_1 = \sum_{m \in A} m$ şi $S_2 = \sum_{m \in A} \left(\tilde{x}_m^{\,2} + \tilde{y}_m^{\,2} + \tilde{z}_m^{\,2} \right)$. Atunci

a) $S_1 = 0; S_2 = \frac{3}{4}$ b) $S_1 = -\frac{1}{2}; S_2 = 25$ c) $S_1 = \frac{1}{2}; S_2 = \frac{3}{4}$

d) $S_1 = -\frac{1}{2}; S_2 = \frac{3}{4}$ e) $S_1 = -5; S_2 = 14$ f) $S_1 \geq 5; S_2 = 25$

AL - 089 În care din următoarele mulțimi se află soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x^6 - y^3 = 98 \\ x^4 + x^2 y + y^2 = 49 \end{cases} \quad ?$$

a) $x \in (-1,1)$; $y \in \{-1,0,1\}$ b) $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$; $y \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

c) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$; $y \in \left[2, 3\sqrt{3}\right]$ d) $x \in (-\infty, -7)$; $y \in (7, +\infty)$

e) $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $y \in (-1,1)$ f) $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

AL – 090 Să se determine toate tripletele de numere reale (x, y, z) care verifică sistemul neliniar

$x^2 - y = 0$, $y^2 - xz = 0$, $z^2 - 16y = 0$

a) (0,0,0) ; (2,4,4) ; (–2,4,–8); b) (0,0,0); (2,4,8); (–2,4,8)

c) (0,0,0) ; (–2,4,–8) ; (2,–4,8) ; d) (0,0,0) ; (2,4,8) ; (2,4,–8)

e) (0,0,0) ; (2,4,8) ; (–2,4,–8) ; f) (1,1,4) ; (1,1,1); (–1,1,–1); (1,–1,1)

AL – 091 Să se determine condițiile pe care trebuie să le verifice parametri reali a,b astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = a(x-y) \\ x^3 + y^3 = b(x+y) \end{cases}$$ să aibă toate soluțiile reale

a) $a,b \in \mathbf{R}$, $a^2 = 3b$

b) $a,b \in \mathbf{R}_+$, $a \le 3b$, $b \le 3a$

c) $a,b \in \mathbf{R}_+$, $a \le 2b$, $b \le 2a$

d) $a,b \in \mathbf{R}$

e) $a,b \in \mathbf{R}$, $a = b$

f) $a,b \in \mathbf{R}_+$

AL – 092 Fiind dat sistemul $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$

să se precizeze numărul soluțiilor reale și intervalele în care se află aceste soluții

a) n = 3, $(x,y,z) \in [-1,5] \times [-1,5] \times [-1,5]$

b) n = 6, $(x,y,z) \in [0,4] \times [0,4] \times [0,4]$

c) n = 1, $(x,y,z) \in [3,7] \times [3,7] \times [3,7]$

d) n = 6, $(x,y,z) \in [2,9] \times [2,9] \times [2,9]$

e) n = 3, $(x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

f) n = 2, $(x,y,z) \in [-1,2] \times [-1,2] \times [-1,2]$

AL – 093 Să se determine în care din intervalele de mai jos se află soluțiile sistemului

$$\frac{xy}{\sqrt{2}y + \sqrt{3}x} = \frac{yz}{\sqrt{3}z + y} = \frac{zx}{x + \sqrt{2}z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}$$

a) $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $y \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $z \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

b) $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $z \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

c) $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $z \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $x \in (0,1)$, $y \in (1,2)$, $z \in (2,3)$

e) $x\in(1,2),\ y\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z\in(0,1)$ f) $x\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ y\in\left(1,\frac{3}{2}\right),\ z\in\left(1,\sqrt{2}\right)$

AL - 094 Să se determine valorile parametrului real a astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ 2x-y+z=a^2+3a-\frac{13}{2} \end{cases}$$ să aibă o soluție unică reală.

a) $a\in(-\infty,-2)$ b) $a\in\left\{\frac{-3-\sqrt{35}}{2},\frac{-3+\sqrt{35}}{2}\right\}$ c) $a\in\{-1,2\}$

d) $a\in(-1,2)$ e) $a\in\{-4,1\}$ f) $a\in(-4,1)$

AL - 095 Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât $x^2+y^2-4x-4y+m>0$ pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$.

a) $m=7$ b) $m\in(-\infty,-1)$ c) $m<3$ d) $m\in(-3,5)$ e) $m\in(8,+\infty)$ f) $m\in[-3,5)$

AL - 096 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(m-2)x^2+2(m+1)x+m-3$. Să se afle în care din următoarele intervale se găseşte m astfel încât valoarea minimă a funcției f să fie -9 .

a) $m\in(-\infty,0)$ b) $m\in(0,1)$ c) $m\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ d) $m\in(4,7)$ e) $m\in[7,9]$ f) $m\in(8,+\infty)$

AL - 097 Să se determine parametrul $m\in\mathbf{R}_+$ din ecuația $mx^2+(m+1)x-5=0$, astfel încât rădăcinile acesteia să verifice inegalitățile $x_1<-1, x_2>\frac{1}{2}$.

a) $m\in(0,6)$ b) $m\in[0,6]$ c) $m\in\mathbf{R}$

d) $m\in(0,+\infty)$ e) $m\in(-\infty,0)$ f) $m\in\{-1\}\cup(0,5)$

AL - 098 Să se determine parametrul $m \in \mathbf{Z} \setminus \{2\}$, astfel ca rădăcinile x_1 şi x_2 ale ecuației $(m-2)x^2 - 5x + m + 1 = 0$ să satisfacă condițiile: $x_1 \in (-\infty, 2)$, $x_2 \in (3,5)$.

a) $m = 1$ b) $m = 3$ c) $m = 4$ d) $m = 5$ e) $m = -3$ f) $m = -2$

AL - 099 Să se afle mulțimea valorilor funcției f definită prin formula

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

a) $(-\infty, 0)$ b) $(0, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[2, +\infty)$ e) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ f) $\{1\}$

AL - 100 Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \dfrac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$. Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$

astfel încât $f(\mathbf{R}) = [-3, 5]$.

a) $m \in \{\pm 2\sqrt{3}\}; n \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ b) $m \in \{\pm 4\sqrt{3}\}; n \in \{-1\}$ c) $m \in \{\pm 2\sqrt{3}\}; n \in \{\pm 1\}$

d) $m \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]; n = 0$ e) $m \in [-3, 5]; n \in [-1, 1]$ f) $m \in \{\pm 3\sqrt{2}\}; n = -1$

AL - 101 Fie funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 1}$. Să se determine mulțimea $A = \{a \in \mathbf{R} \mid f(\mathbf{R}) = [0, 2]\}$.

a) $A = \varnothing$; b) $A = \{-1, 1\}$; c) $A = [-1, 1]$;
d) $A = \{-2, 2\}$ e) $A = [-2, 2]$; f) $A = [0, 2]$

AL - 102 Fie ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât această ecuație să aibă trei rădăcini reale diferite.

a) $m \in \mathbf{R}$ b) $m \in (-1,1)$ c) $m \in \varnothing$

d) $m \in (-\infty,1]$ e) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$

AL - 103 Fie $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+(4-m^2)x - x^2}{m(x^2+1)}}$, $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se determine m astfel încât I să fie un interval mărginit de lungime minimă.

a) $m = 0$ b) $m = -2$ c) $m = \sqrt{2}$ d) $m = 1$ e) $m = 2$ f) $m = 4$

AL - 104 Numerele $a, b, c \in \mathbf{R}$ satisfac egalitatea $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua expresia $a - 2b + c$.

a) $\sqrt{33}$ b) $\sqrt{\dfrac{33}{2}}$ c) $-\sqrt{\dfrac{33}{2}}$ d) $-\sqrt{10}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\sqrt{10}$

AL - 105 Să se rezolve inecuația $2 + 3x + \sqrt{5x+4} < 0$.

a) $\left[-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{3}\right)$ b) $\left[-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5}\right]$ c) $\left[-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{7}{9}\right)$ d) $\left[-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right]$ e) $\left(0, \dfrac{7}{9}\right)$ f) $\left(-\dfrac{7}{9}, 0\right)$

AL - 106 Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$.

a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x = -1$ c) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $x \in \varnothing$

AL - 107 Fie inecuația $\sqrt{4-x^2} > 1 - x$. Care din intervalele de mai jos reprezintă mulțimea soluțiilor inecuației ?

a) $(-\infty,-3)$ b) $\left(\frac{17}{2},20\right)$ c) $(-2,2]$ d) $(22,+\infty)$ e) $[4,5)$ f) $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2},2\right]$

AL - 108 Să se determine mulțimea $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,\sqrt{x^2-5x+6}\geq\sqrt{3-x}\right\}$.

a) $(-\infty,-1]$ b) $[2,+\infty)$ c) $[1,+\infty)$ d) $(-\infty,1]\cup\{3\}$ e) $[1,2)\cup\{3\}$ f) $[3,+\infty)$

AL - 109 Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=1$.

a) $x=1\pm\sqrt{2}$ b) $x=\sqrt{2}\pm 1$ c) $x=1-\sqrt{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$

d) $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ f) $x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)$

AL - 110 Să se determine domeniul maxim de definiție D, al funcției

$$f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}\text{, unde } f(x)=\sqrt[n]{1-\sqrt[n+1]{x+1}}+\sqrt[n+1]{\sqrt[n]{x}-1},\ n\in\mathbf{N}.$$

a) $D=\{0\}$ pentru $n=2k$
$D=[1,+\infty)$ pentru $n=2k+1$

b) $D=(-\infty,1]$ pentru $n=2k$
$D=\mathbf{R}$ pentru $n=2k+1$

c) $D=[0,+\infty)$ pentru $n=2k$
$D=\{0,1\}$ pentru $n=2k+1$

d) $D=\{1\}$ pentru $n=2k$
$D=\{0,1\}$ pentru $n=2k+1$

e) $D=[1,+\infty)$ pentru $n=2k$
$D=[-1,+\infty)$ pentru $n=2k+1$

f) $D=[-1,+\infty)$ pentru $n=2k$
$D=\{0\}$ pentru $n=2k+1$

AL - 111 Se consideră ecuația: $\sqrt{2x+1}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{4+x}$. În care din mulțimile indicate mai jos , ecuația are o singură rădăcină reală ?

a) $(-\infty,-4)$ b) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$ c) $(8,+\infty)$ d) $(1,2)\cup[3,+\infty)$ e) $(-2,-1)$ f) $\left(-4,-\frac{1}{2}\right)$

AL - 112 Precizați care este mulțimea soluțiilor inecuației

$$\sqrt{15+5x}-\sqrt{13-2x}\le 2 .$$

a) $A=\left[-\frac{109}{49},2\right]$ b) $A=\left[2,\frac{13}{2}\right]$ c) $A=\left[-3,\frac{109}{49}\right]$

d) $A=\left[-3,\frac{13}{2}\right]$ e) $A=\left[-3,2\right]$ f) $A=\left[-\frac{102}{49},2\right]$

AL - 113 Să se afle pentru ce valori ale parametrului $m\in\mathbf{R}$, ecuația

$$\sqrt{x+8m}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+8m+4}$$ are soluții reale.

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in\left(-\infty,0\right)$ c) $m\in\left[-1,1\right]\setminus\left\{0\right\}$

d) $m\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ e) $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ f) $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

AL - 114 Precizați mulțimea A căreia îi aparțin valorile reale ale lui x pentru care are loc egalitatea $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{\left(-x\right)^{x}}}=\sqrt[5x]{2x}$.

a) $A=\left(0,1\right)$ b) $A=\left(1,2\right)$ c) $A=\left[2,3\right)$ d) $A=\left(2,3\right)$ e) $A\left(2,7\right)$ f) $A=\left[3,+\infty\right)$

AL - 115 Să se calculeze valoarea expresiei

$$E=\frac{a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}-\frac{a^3+b^3-2ab\sqrt{ab}-ab}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}+\sqrt{ab}}$$ pentru $a=2+\sqrt{3}$ și $b=2-\sqrt{3}$.

a) $E=4$ b) $E=-4$ c) $E=-2$ d) $E=2$ e) $E=1$ f) $E=-1$

AL - 116 Să se precizeze valoarea numărului real

$$E=\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}$$

a) $E=6$ b) $E=\dfrac{2}{3}$ c) $E=\dfrac{13}{2}$ d) $E=4$ e) $E=\dfrac{5}{2}$ f) $E=1$

AL - 117 Să se determine valoarea expresiei

$$E=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 0

AL - 118 Să se determine valoarea expresiei

$$E=\frac{\left(9^{n}-9^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27^{n-1}-19\cdot 27^{n-2}\right)^{\frac{1}{3}}}\quad ,n\in \mathbf{Z}$$

a) $\sqrt[6]{72}$ b) $\sqrt{2}\cdot 3^{n-1}$ c) $\sqrt{2}\cdot 3$ d) $\sqrt{2}\cdot 3^{-\frac{n+3}{2}}$ e) 1 f) 2

AL - 119 Să se simplifice fracția:

$$F=\frac{x^{3}+y^{3}+z^{3}-3xyz}{(x-y)^{2}+(y-z)^{2}+(x-z)^{2}}$$

a) $F=x-y+z$ b) $F=x+y+z$ c) $F=\dfrac{x+y+z}{2}$

d) $F=x+y+z+1$ e) $F=\dfrac{x+y+z+3}{2}$ f) $F=\dfrac{x+y+z+1}{2}$

AL - 120 Care este mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care avem

$$\sqrt{1+\sqrt{x(2-x)}}-\sqrt{1-\sqrt{x(2-x)}}=\sqrt{2(2-x)}\ ?$$

a) $x\in\{0,1\}$ b) $x\in\{3,4\}$ c) $x\in[0,1]$ d) $x\in[1,2]$ e) $x\in[2,3]$ f) $x\in[0,2]$

AL - 121 Pentru $x \neq \pm y$ să se determine valoarea expresiei

$$E = \frac{\left(x^2 - y^2\right)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^2 y^3} - \sqrt[3]{x^3 y^2} - \sqrt[3]{y^5}} - \left(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

a) 1 b) $x + y$ c) $x - y$ d) $x^{\frac{2}{3}}$ e) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$ f) $y^{\frac{2}{3}}$

AL - 122 Să se rezolve ecuația $\frac{1}{x}\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = 0$, cu $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, dat, în mulțimea numerelor reale.

a) $x \in \{-a, a\}$ b) $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$ c) $x \in [-a, +\infty) \setminus \{0\}$

d) $x \in \{-a\} \cup (0, a]$ e) $x \in (0, +\infty)$ f) $x \in \{-a\} \cup [a, +\infty)$

AL - 123 Fie ecuația $x^2 - (m-1)x + m - 1 = 0$, $m \in \mathbf{R}$. Să se determine *m* astfel încât $\sqrt[3]{x_1 + x_2} + \sqrt[3]{9 - x_1 x_2} = 3$.

a) $m \in \{-1, 3\}$ b) $m \in \{5, 8\}$ c) $m \in \{1, 6\}$ d) $m \in \{-3, 8\}$ e) $m \in \{-2, -9\}$ f) $m \in \{2, 9\}$

AL - 124 Să se rezolve ecuația $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2 - 1}$.

a) $x = \pm\frac{5^n + 1}{5^n - 1}$ b) $x = \pm\frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ c) $x = \pm\frac{2^n + 1}{2^n - 1}$

d) $x = \pm\frac{5^n - 1}{5^n + 1}$ e) $x = \pm\frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$ f) $x = \pm\frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$

AL - 125 Fie $f(x) = x^2 - mx + 1$, $g(x) = x^2 + 2mx + 1$ și $h(x) = 2x^2 + mx + 2$.
Să se determine parametrul $m \in \mathbf{R}$ astfel ca toate rădăcinile ecuației:

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{f(x)}$$

să fie reale.

a) $m \in \mathbf{R}$; b) $m \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$; c) $m \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

d) $m \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$ e) $m \in (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$; f) $m \in \varnothing$

AL - 126 Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

a) $x \in \{2,5,10\}$ b) $x \in [5,10]$ c) $x \in \{5,10\}$ d) $x \in [1,5]$ e) $x \in (5,+\infty)$ f) $x \in (5,10)$

AL - 127 Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt[3]{3-x^2}=0.$$

a) o rădăcină reală b) două rădăcini reale c) trei rădăcini reale

d) nici o rădăcină reală e) patru rădăcini reale f) şase rădăcini reale

AL - 128 Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2-1}+x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

a) $x \in \{-1,1\}$ b) $x \in \{-2,-1,1\}$ c) $x \in \varnothing$

d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ e) $x \in (-\infty,-1] \cup \{1\}$ f) $x \in \{-1,1,0\}$

AL - 129 Să se calculeze valoarea expresiei $\mathrm{E}=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, pentru $x \in [1,2]$.

a) $\mathrm{E}=1+x$ b) $\mathrm{E}=x^2-3x+4$ c) $\mathrm{E}=2$

d) $\mathrm{E}=3x-x^2$ e) $\mathrm{E}=\sqrt{6x-2x^2}$ f) $\mathrm{E}=2(2-x)$

AL - 130 Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația

$\sqrt{mx^2 - x + 1} + \sqrt{mx^2 + x + 1} = x$ are soluții în **R** şi să se determine aceste soluții.

a) $m = \frac{1}{4};\ x \in [5,7]$ b) $m \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\};\ x \in [2,+\infty)$ c) $m = \frac{1}{4};\ x \in \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$

d) $m = \frac{1}{4};\ x \in [2,+\infty)$ e) $m \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right);\ x \in \{2,3\}$ f) $m = \frac{2}{3};\ x \in \{4,6\}$

AL - 131 Fiind date funcțiile $f, g : [-1,1] \to [-1,1]$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0] \\ x, & x \in (0,1] \end{cases} \quad \text{și} \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0] \\ x^2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

să se determine funcția $h = g \circ f$.

a) $h = f$ b) $h = g$ c) $h = f^2$

d) $h = g^2$ e) $h = fg$ f) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0] \\ x^4, & x \in (0,1] \end{cases}$

AL - 132 Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \ge 2 \\ 2x + 5, & \text{dacă } x < 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \le 0 \\ -x + 7, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Atunci $(f \circ g)(x)$ este :

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x \in (-\infty,-1] \\ 2x^2 + 7, x \in (-1,0] \\ -x + 4, x \in (0,5] \\ -2x + 19\ x \in (5,\infty) \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \in (-\infty,0] \\ 2x - 4, x \in (0,5] \\ x - 11, x \in (5,\infty) \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x \in (-\infty,-1] \\ -x - 4, x \in (-1,0] \\ 2x - 19, x \in (0,8) \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x^2 + 7, x \in (-\infty,5] \\ -x + 4, x \in (5,\infty) \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x \in (-\infty,-1] \\ 2x - 19, x \in (-1,\infty) \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x \in (-\infty,5] \\ 2x - 19, x \in (5,\infty) \end{cases}$

AL - 133 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\in(-\infty,2) \\ 2x-3 & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

Să se determine inversa acestei funcții.

a) $f^{-1}(x)=x+1 \quad \forall x\in\mathbf{R}$

b) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x\in(-\infty,1) \\ \frac{1}{2}(x+3) & x\in[1,+\infty) \end{cases}$

c) $f^{-1}(x)=x; \quad \forall x\in\mathbf{R}$

d) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+3) & x\in(-\infty,1] \\ x+1, & x\in(1,\infty) \end{cases}$

e) $f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x\in(-\infty,2) \\ \dfrac{1}{2x-3} & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

f) funcția nu este inversabilă

AL - 134 Să se precizeze care din răspunsurile de mai jos este corect pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-4, & x\le 6 \\ x+2, & x>6 \end{cases}$$

a) f nu este inversabilă;

b) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=\begin{cases} \dfrac{y+4}{2}, & y\le 8 \\ y-2, & y>8 \end{cases}$

c) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=y$

d) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=y-2$

e) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=\dfrac{y+4}{2}$

f) f este inversabilă și $f^{-1}(y)=\begin{cases} \dfrac{y+4}{2}, y>8 \\ y-2, y\le 8 \end{cases}$

AL - 135 Determinați valorile lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=a|x+1|+|x-1|+(2-a)x-a-1$$

este inversabilă şi determinați inversa ei.

a) $a=\frac{1}{2};\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} x & x\le 1\\ \frac{x+2}{3} & x>1\end{cases}$

b) $a=0;\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{2}; & x<-1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \frac{x+2}{3}; & x>1\end{cases}$

c) $a<\frac{1}{2};\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x+2a}{1-2a}; & x<-1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \frac{x+2}{3}; & x>1\end{cases}$

d) $a<\frac{1}{2};\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x+a}{1-2a}; & x>1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \frac{x+2}{3}; & x<-1\end{cases}$

e) $a>\frac{1}{2};\quad f^{-1}(x)\begin{cases} \frac{x+2a}{1-2a}; & x<-1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \frac{x+2}{3}; & x>1\end{cases}$

f) $a=1;\quad f^{-1}(x)=\begin{cases} -x-2; & x<-1\\ x; & -1\le x\le 1\\ \frac{x+2}{3}; & x>1\end{cases}$

AL - 136 Să se aleagă un interval maximal $[a,b)\subset\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ astfel încât pentru $f:[a,b)\to[f(a),\infty),\ \ f(x)=x^2-x-2$ să existe f^{-1}.

Să se precizeze dacă f^{-1} este strict crescătoare sau descrescătoare.

a) $[1,\infty)$; f^{-1} strict descrescătoare;

b) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; f^{-1} strict crescătoare

c) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; f^{-1} strict descrescătoare

d) $[1,\infty)$; f^{-1} strict crescătoare

e) $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$; f^{-1} strict descrescătoare

f) $\left[\frac{4}{3},\infty\right)$; f^{-1} strict crescătoare

AL - 137 Să se determine $m\in R$ astfel încât funcția $f(x)=\begin{cases} x^2-mx+1, & x\le 0\\ -x+m, & x>0\end{cases}$ să fie strict descrescătoare pe **R**.

a) $m \in \phi$ b) $m \in \mathbf{R}$ c) $m \in (-\infty, 0)$ d) $m \in [0,1]$ e) $m \in (1,2)$ f) $m \in [2, \infty)$

AL - 138 Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbf{R}$, graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = me^x - (m+1)e^{-x}$, taie axa Ox ?

a) $(-1,0)$ b) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ d) $(-5,+\infty)$ e) $(-\infty,2)$ f) $\mathbf{R}$

AL - 139 Să se rezolve ecuația: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = \dfrac{2\lg 2}{\lg\left(3+2\sqrt{2}\right)}$

d) $x \in \varnothing$ e) $x = \dfrac{2\lg 2}{\lg\left(3-2\sqrt{2}\right)}$ f) $x = 2\lg 2$

AL - 140 Să se rezolve ecuația: $\left(1+\sqrt{2}\right)^{x}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x}=2$.

a) $x_1=0,\ x_2=1$ b) $x_1=0,\ x_2=2$ c) $x_{1,2}=\dfrac{\ln\left(3\pm\sqrt{5}\right)-\ln 2}{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)}$

d) $x_{1,2}=\dfrac{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)-\ln 2}{\ln\left(3\pm\sqrt{5}\right)}$ e) $x_1=0,\ x_2=\dfrac{\ln\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$ f) $x_1=0,\ x_2=\dfrac{\ln\left(2\sqrt{2}-3\right)}{\ln 3}$

AL - 141 Determinați valoarea lui *x* pentru care $e^{x}+e^{-x}=2$

a) 1 b) –1 c) 2 d) 0 e) –2 f) ln2

AL - 142 În care din următoarele mulțimi se află soluția ecuației

$$4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$$

a) $\left(e,e^{2}\right)$ b) $\left(-1,1\right)$ c) $\left(3,7\right]$

d) $\left(1,\sqrt{3}\right]$ e) $\left(0,1\right)$ f) $\left(9,11\right)$

AL - 143 Să se rezolve ecuația $2^{x}-3^{x}=\sqrt{6^{x}-9^{x}}$

a) $x_1=0$ este unica soluție b) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{1-\log_2 3}$ c) $x_1=0$, $x_2=\log 2$

d) $x_1=0$, $x_2=\log_2 3+1$ e) $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{\log_2 3}$ f) $x_1=0$, $x_2=\log_2 3$

AL - 144 Determinați funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, astfel încât $y=f(x)$ să fie soluție a ecuației $e^{y}-e^{-y}=x$.

a) $f(x)=\ln|x|$
b) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$
c) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
d) $f(x)=\ln\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$
e) $f(x)=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$
f) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right|$

AL - 145 Determinați mulțimea A căreia îi aparține soluția ecuației

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^{x}-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$$

a) $A=\left(\sqrt{2},8\right)$
b) $A=\left(\dfrac{1}{2},16\right]$
c) $A=\left(\sqrt[3]{2},9\right)$
d) $A=[-2,0)$
e) $A=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$
f) $A=(0,1)$

AL - 146 Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația

$$(3x-1)(x-m-1)^{|x-1|-1}-(2x+m)^{|x-1|}=(x-m-1)^{|x-1|}$$

cu condițiile $x>m+1$ şi $x>-\dfrac{m}{2}$ are trei rădăcini reale şi distincte.

a) $m\in\phi$
b) $m\in\mathbf{R}$
c) $m\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}$
d) $m\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
e) $m\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$
f) $m\in\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)$

AL - 147 Să se rezolve inecuația: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$.

a) $(4,+\infty)$ b) $[-2,1)$ c) $(0,10)$ d) $(1,+\infty)$ e) $(2,+\infty)$ f) $(-1,1)$

AL - 148 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât inegalitatea $\left(\frac{4}{9}\right)^{x} - m\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 1 > 0$ să fie adevărată pentru orice $x < 0$.

a) $m \in \phi$ b) $m \in (-2,2)$ c) $m \in [-2,2]$ d) $m \in [-2,+\infty)$ e) $m < -2$ f) $m \leq 2$

AL - 149 Care este soluția sistemului de inecuații: $\frac{1}{3} \leq \frac{3^{x}+1}{9^{x}+1} \leq \frac{1}{2}$?

a) $\left[\log_3 2, \log_3\left(3+\sqrt{17}\right)\right]$ b) $\left[\log_3\left(1+\sqrt{2}\right), \log_3 \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$ c) $(3,+\infty)$

d) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ e) $\left[\log_3\left(1-\sqrt{2}\right), \log_3 \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]$ f) $[1, \log_3 5]$

AL - 150 Să se rezolve inecuația: $\frac{2 \cdot 2^{x-1}}{3^{x}-2^{x}} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$.

a) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ b) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ c) $x \in (0,1)$

d) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-1)\right)$ e) $x \in \left(0, \log_{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}+1)\right)$ f) $x \in (-1,1)$

AL - 151 Să se rezolve inecuația: $x^{\sqrt{x}} < \left(\sqrt{x}\right)^{x}$.

a) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ b) $(0,1)\cup(4,+\infty)$ c) $(0,2)$

d) $(0,3)$ e) $(0,2)\cup(6,+\infty)$ f) $(0,3)\cup(5,+\infty)$

AL - 152 Să se rezolve ecuația: $\dfrac{\log_2(2x-5)}{\log_2\left(x^2-8\right)}=\dfrac{1}{2}$.

a) $x_1=\frac{11}{3},\ x_2=3$ b) $x_1=\frac{11}{3},\ x_2=-3$ c) $x_1=\frac{11}{3}$

d) $x_1=3$ e) $x_1=-\frac{11}{3},\ x_2=-3$ f) $x_1=9$

AL - 153 Care este soluția ecuației: $\left|2+\log_{\frac{1}{3}}x\right|+3=\left|1-\log_{\frac{1}{3}}x\right|$?

a) $x\in\phi$ b) $x=3$ c) $x=\frac{1}{3}$ d) $x\in[9,+\infty)$ e) $x=(0,9)$ f) $x\in\left(\frac{1}{3},9\right)$

AL - 154 Să se precizeze domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x)=\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}\ .$$

a) $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ b) $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$ c) $[2,+\infty)$

d) $(1,+\infty)$ e) $(0,2]\cup(4,\infty)$ f) $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

AL - 155 Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\ln\left(-2x^2-x+1\right)}{-4x^2-x}}.$$

a) $\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},2\right)\cup(3,\infty)$

b) $\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup(2,4)$

c) $(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$d

d) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

e) $\mathbf{R}\setminus\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

f) $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$

AL -156 Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției

$$f(x)=\sqrt{\log_x\sqrt{3x}\cdot\log_3 x}.$$

a) $(0,+\infty)$

b) $(1,+\infty)$

c) $\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup(1,+\infty)$

d) $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right)$

e) $(0,1)\cup(2,+\infty)$

f) $(1,2)$

AL - 157 Fie x_1, x_2, x_3 trei numere din intervalul (0,1) sau din intervalul $(1,+\infty)$. Precizați care este valoarea minimă a expresiei

$$\mathrm{E}=\log_{x_1} x_2x_3+\log_{x_2} x_1x_3+\log_{x_3} x_1x_2 .$$

a) 1 b) 0 c) 3 d) 6 e) – 3 f) – 6

AL - 158 Ştiind că $\log_{40} 100 = a$, să se afle $\log_{16} 25$ în funcție de a.

a) $\dfrac{3a+2}{2a+4}$ b) $\dfrac{3a+1}{a+2}$ c) $\dfrac{3a-1}{2a+3}$ d) $\dfrac{3a-2}{4-2a}$ e) $\dfrac{3a-4}{a+2}$ f) $\dfrac{3a+4}{a-2}$

AL - 159 Dacă $a = \log_{30} 3$ şi $b = \log_{30} 5$, să se calculeze $\log_{30} 16$ în funcție de a şi b.

a) $4(1-a-b)$ b) $4(1+a-b)$ c) $2(1-a+b)$

d) $2a-b+1$ e) $2(a-2b-1)$ f) $2(a+2b+1)$

AL - 160 Mulțimea soluțiilor ecuației $\log_x 2x + \log_{2x} x = \dfrac{5}{2}$ este:

a) ϕ; b) $\left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$; c) $\{2,4\}$; d) $\left\{\dfrac{1}{4}, 2\right\}$; e) $\{2,5\}$ f) $\left\{\dfrac{1}{5}, 2\right\}$

AL - 161 Să se rezolve ecuația: $\log_{x^2}(x+2) + \log_x\left(x^2+2x\right) = 4$.

a) $x=1$ b) $x=-1$ c) $x=3$ d) $x=4$ e) $x=2$ f) $x=8$

AL - 162 Să se rezolve ecuația: $a^{\log_6 x} - 5x^{\log_6 a} + 6 = 0$, $a>0$, $a \neq 1$.

a) $x_1 = \log_a 3$, $x_2 = \log_a 2$ b) $x_1 = 6^{\log_a 3}$, $x_2 = 6^{\log_a 2}$ c) $x = 6^{\log_a \frac{2}{3}}$

d) $x_1 = -\log_a 3$, $x_2 = -\log_a 2$ e) $x = 6^{\log_a \frac{3}{2}}$ f) $x_1 = a\log_6 3$, $x_2 = a\log_6 2$

AL - 163 Să se rezolve ecuația: $\log_2 3 + 2\log_4 x = \left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}$.

a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = \frac{16}{3}$ d) $x = \frac{3}{16}$ e) $x = \frac{1}{3}$ f) $x = 3$

AL - 164 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația $\frac{m + \lg x}{\lg(x+1)} = 2$ să aibă o singură soluție reală.

a) $m \in \phi$ b) $m < 0$ c) $m = 1$ d) $m = \lg 2$ e) $m = \lg 4$ f) $m = \lg 6$

AL - 165 Să se determine valoarea parametrului întreg m astfel încât ecuația $\left(\log_{\frac{1}{3}} m - 3\right)x^2 - 2\left(3\log_{\frac{1}{3}} m - 4\right)x + 7\log_{\frac{1}{3}} m - 6 = 0$ să aibă o rădăcină dublă.

a) $m = 1$ b) $m = -2$ c) $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $m = 4$ e) $m = 9$ f) $m = -9$

AL - 166 Rezolvând ecuația: $\log_3\left[\log_2\left(\log_4 x\right)\right] = 2\log_9\left[\frac{1}{\log_4\left(\log_2 x\right)}\right]$,

să se stabilească în care din următoarele intervale se află soluția acesteia.

a) $\left(1, \sqrt{2}\right]$ b) $[2,3]$ c) $\left[2\sqrt{3}, 4\right)$ d) $[4,5)$ e) $[5,18]$ f) $(18, +\infty)$

AL - 167 Să se determine valorile lui $m > 0$ pentru care funcția

$$f(x) = \sqrt{x^2 \log_m \frac{1}{2} - x\log_{\frac{1}{2}} m + 3\log_{\frac{1}{2}} m - 4} \text{ este definită pe } \mathbf{R}.$$

a) $m = 4$ b) $m \in \left(\frac{1}{2}, 5\right)$ c) $m \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ d) $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e) $m = \frac{1}{4}$ f) $m \in \phi$

AL - 168 Fiind dată expresia:

$$E = \sqrt{(\log_x 2 + \log_2 x - 2)\log_2 x} + \sqrt{(\log_x 2 + \log_2 x + 2)\log_2 x}\ ,$$

să se determine toate valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $E = 2$.

a) $[1,+\infty)$ b) $[1,2] \cup \{3\}$ c) $\left[\frac{1}{2},2\right]$

d) $\left[\frac{1}{2},2\right] \setminus \{1\}$ e) $[1,2] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $(1,2) \cup (3,+\infty)$

AL - 169 Să se rezolve ecuația

$$\lg x^2 + 2\lg x = 2^3\ .$$

a) x=10 b) x=100 c) x= 1000

d) x=1 e) x=2 f) x=3

AL - 170 Fie $f : \left[\frac{1}{2},+\infty\right) \to [0,+\infty),\ f(x) = \log_a\left(\sqrt{2x-1}+1\right),\ a > 1$

Să se rezolve inecuația $f^{-1}(x) \le 5$, unde f^{-1} este inversa funcției f.

a) $x \in [2,4]$ b) $x \in [0,\log_a 2]$ c) $x \in [0,\log_a 4]$

d) $x \in [0,1]$ e) $x \in [1,\log_a 3]$ f) $x \in [5,8]$

AL - 171 Fiind date funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\in(-\infty,0]\\ -x^2+x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$

și $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases}e^{x^2} & ,x\in(-\infty,-1)\\ \arcsin x, & x\in[-1,1]\\ \ln x & ,x\in(1,\infty)\end{cases}$, să se determine

soluția din intervalul $(-1,0]$ a ecuației $(g\circ f)(x)=0$.

a) $x=-1$ b) $x=0$ c) $x=-\frac{1}{2}$

d) $x=-\frac{2}{3}$ e) $x=-\frac{1}{4}$ și $x=-\frac{1}{2}$ f) Nu există.

AL - 172 Se consideră inecuația: $\log_a x-\log_{a^2} x+\log_{a^4} x\geq\frac{3}{4}, a>0, a\neq 1$

și se notează cu M_a mulțimea tuturor soluțiilor sale. Care dintre următoarele afirmații
este adevărată ?

a) $M_{\frac{1}{2}}=\left(0,\frac{1}{2}\right]$ b) $M_{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ c) $M_{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

d) $M_{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4},\infty\right)$ e) $M_{\frac{1}{10}}=(-5,+\infty)$ f) $M_2=(2,10)$

AL - 173 Să se rezolve inecuația: $\left|\log_3|x|\right|<1$.

a) $x\in(0,1)$ b) $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ c) $x\in\left(-3,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},3\right)$

d) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e) $x \in (3, +\infty)$ f) $x \in (-3, 3)$

AL - 174 Fie $P(x) = x^2 - x\log_a y + 3\log_a y - 8$, $y > 0$, $a \in (0,1)$. Să se determine toate valorile lui y astfel încât $P(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

a) $y \in (a^4, a^8)$ b) $y \in (a^8, a^4)$ c) $y \in [a^8, a]$

d) $y \in (a, 2)$ e) $y \in (a^3, a)$ f) $y \in [a^2, a]$

AL - 175 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x^{\lg x} + y^{\lg y} = m + 101 \\ \dfrac{\log_y 10}{\log_x 10} + \dfrac{\log_x 10}{\log_y 10} = \dfrac{2}{\lg x \lg y} \end{cases}$$

să admită soluții reale.

a) $m \in [0, 10]$ b) $m \in (-99, 0)$ c) $m \in [-81, 0)$

d) $m \in (10, 100)$ e) $m \in (-\infty, -100)$ f) $m \in \phi$

AL - 176 Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to (-1, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Calculați inversa sa, f^{-1}.

a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \in (-1, 0) \\ x^2, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & x \in (-1, 0) \\ 2x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$

c) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in (-1, 0) \\ x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ d) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1), & x \in (-1, 0) \\ x^2 - 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$

e) $f^{-1}(x)=\begin{cases}2\ln(x+1),\ x\in(-1,0)\\ -x^2,\ x\in[0,+\infty)\end{cases}$ f) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\ln x^2,\ x\in(-1,0)\\ x^2+1,\ x\in[0,+\infty)\end{cases}$

AL - 177 Să se rezolve inecuația: $\log_x 2\cdot\log_{2x}2>\log_{4x}^2 2$.

a) $x\in\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}},\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ b) $x\in(-2,-1)$ c) $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)\cup(1,\infty)$

d) $x\in(-1,+\infty)$ e) $x\in\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$ f) $x\in(0,1)$

AL - 178 Se consideră expresia $E(x)=\log_4 x+\log_x 4$. Determinați valorile lui $x\in\mathbf{R}$ astfel încât $E(x)<\frac{5}{2}$.

a) $x\in(1,2)$ b) $x\in(0,1)\cup(2,16)$ c) $x\in[1,2]\cup[16,32]$

d) $x\in(16,+\infty)$ e) $x\in(1,2)\cup(20,+\infty)$ f) $x\in(1,10)\cup(20,+\infty)$

AL - 179 Știind că $a\in(0,1)$ să se determine mulțimea:

$$\left\{x\in\mathbf{R}\ \middle|\ \log_a x-2\log_x a\geq 1\right\}.$$

a) $\left[\frac{1}{a},1\right)\cup\left[a^2,+\infty\right)$ b) $\left[\frac{1}{a},a^2\right]\cup\left(0,a^3\right)$ c) $\left(0,a^2\right]\cup\left(1,\frac{1}{a}\right]$

d) $\left[1,\frac{1}{a}\right]$ e) $\left(0,\frac{1}{a}\right]\cup\left[a^2,+\infty\right)$ f) $\left(a,\frac{1}{a}\right)\cup\left[0,a^2\right)$

AL - 180 Într-o progresie aritmetică termenul al nouălea şi al unsprezecelea sunt dați , respectiv , de cea mai mare şi cea mai mică rădăcină a ecuației :

$$\frac{1}{2}\lg 2+\lg\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\left[\lg\left(x^2-4x+5\right)+1\right].$$

Se cere suma primilor 20 termeni ai progresiei.

a) 15 b) 18 c) 22 d) 30 e) 40 f) 100

AL - 181 Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} (\log_2 x)^3 + (\log_2 y)^3 = 9 \\ x^{(\log_2 x)^2} + y^{(\log_2 y)^2} = 258 \end{cases}$.

a) $x = 2,\ y = 2$ b) $x = 4,\ y = 4$ c) $x = 3,\ y = 9$; $x = 9,\ y = 3$

d) $x = 2,\ y = 4$; $x = 4,\ y = 2$ e) $x = 2,\ y = 3$; $x = 3,\ y = 2$ f) $x = 1,\ y = 9$; $x = 9,\ y = 1$

AL - 182 Să se rezolve în **R** sistemul: $\begin{cases} x^{\lg y} \cdot y^{\lg z} \cdot z^{\lg x} = 10 \\ x^{\lg y \lg z} \cdot y^{\lg x \lg z} \cdot z^{\lg x \lg y} = 1000 \\ xyz = 10 \end{cases}$.

a) $x = 10,\ y = z = 1$ b) $x = y = 10,\ z = 1$ c) $x = y = z = 10$

d) $x = y = z = 10^{-1}$ e) Sistemul nu are soluții în **R** f) $x = 1,\ y = 5,\ z = 2$

AL - 183 Să se determine mulțimea tuturor numerelor naturale pentru care inegalitatea: $2^n > n^3$ este adevărată.

a) $\{n \in \mathbf{N};\ n \geq 5\} \cup \{0,1\}$ b) $\varnothing$ c) $\{0,1\}$

d) $\{0,1\} \cup \{n \in \mathbf{N};\ n \geq 10\}$ e) $\{n \in \mathbf{N};\ n \geq 10\} \setminus \{12\}$ f) **N**

AL – 184 Să se determine mulțimea tuturor numerelor naturale pentru care următoarea inegalitate

$$\sqrt[1\cdot 5]{a} \cdot \sqrt[3\cdot 7]{a} \cdot \sqrt[5\cdot 9]{a} \ldots \sqrt[(2n-1)(2n+3)]{a} < a^n, \quad a > 1, \quad n \in \mathbf{N}^* ,$$

este adevărată.

a) $\{n \in \mathbf{N}, n \geq 3\}$ b) $n \in \mathbf{N}^*$ c) $n \in \mathbf{N} \setminus \{3,4,5\}$

d) $\{n \in \mathbf{N} : n = 2k\}$ e) $n \in \phi$ f) $\{n \in \mathbf{N} : n = 2k+1\}$

AL - 185 Să se determine numărul de elemente ale mulțimii

$$E = \left\{ n \in \mathbf{N} \middle| \frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!} \right\}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL – 186 Într-o discotecă, dintr-un grup de 7 fete şi 8 băieți, la un anumit dans, trebuie să se formeze 4 perechi din câte o fată şi un băiat. În câte moduri se pot forma cele patru perechi ?

a) 105; b) 210; c) 14700; d) 58800; e)2450; f) 420.

AL - 187 La o reuniune de 12 persoane, fiecare a dat mâna cu fiecare dintre ceilalți participanți. Câte strângeri de mână au fost?

a) 132 b) 66 c) 12! d) 12 e) 33 f) 144

AL - 188 În câte moduri se poate face un buchet cu două garoafe albe şi cinci garoafe roşii având la dispoziție 20 garoafe albe şi 9 garoafe roşii ?

a) 180 b) 18.000 c) 90.000

d) 22.400 e) 23.940 f) 24.140

AL - 189 Care este domeniul maxim de definiție D al funcției:

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}\ ,\ \ f(x) = C_{7x}^{x^2+10} + C_{5x+4}^{x^2+3x-4}\ ?$$

a) $D=\{1,9,11\}$ b) $D=\{2,3,4\}$ c) $D=(-\infty,-1]\cap \mathbf{Z}$

d) $D=[7,+\infty)\cap \mathbf{N}$ e) $D=\{2,3,4,5\}$ f) $D=[1,6]\cap \mathbf{N}$

AL - 190 Să se precizeze în care din mulțimile de mai jos se află toate numerele naturale n care verifică relația: $C_{3n-2}^{n} = A_{2n-1}^{n-1}$.

a)$A_1 = \mathbf{N} \setminus \{1,2,3,4,7,9\}$ b)$A_1 = \mathbf{N} \setminus \{2,3,4,5,6,9,30\}$ c) $A_3 = (9,30)$

d) $A_4 = \{2k+1,\ k\in\mathbf{N}\}$ e) $A_6 = \mathbf{N} \setminus \{2,3,5,7,9,30\}$ f) $A_5 = \{3k \mid k\in\mathbf{N}\}$

AL - 191 Să se rezolve ecuația

$$C_{3n+4}^{n^2+2n-4} = 210, \quad n\in\mathbf{N}.$$

a) n=4 b) n=3 c) n=2 d) n=1 e) n=5 f) n=6

AL – 192 Soluția ecuației

$$C_{x+8}^{x+3} = 5(x+6)(x+5)(x+4)$$

se află în intervalul :

a) (14,19); b) (-8,-3); c) (-6,-4); d) (20,24) e) (21,27); f) (19,20).

AL – 193 Să se precizeze în ce interval se află soluția ecuației

$$C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}x(x+1)(x-1)$$

a) (8,12) b) (10,12) c) (-1,4) d) (7,9] e) (11,17) f) (-1,1).

AL - 194 Să se rezolve ecuația

$$3C_{x+1}^{2}+x\cdot P_{2}=4A_{x}^{2}.$$

a) x=3 b) x=4 c) x=5

d) x=2 e) x=7 f) x=10

AL - 195 Să se calculeze suma:

$$S_n=1\cdot C_1^1+2\left(C_2^1+C_2^2\right)+3\left(C_3^1+C_3^2+C_3^3\right)+\ldots+n\left(C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n\right).$$

a) $S_n=n\cdot 2^n-\dfrac{n(n+1)}{2}$ b) $S_n=\dfrac{(n+1)\cdot 2^n-n}{2}$

c) $S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$ d) $S_n=(n+1)\cdot 2^{n-1}-\dfrac{n(n+1)}{2}$

e) $S_n=(n-1)2^n+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $S_n=n\cdot 2^n+n(n+1)$

AL - 196 Să se calculeze suma:

$$E=C_n^k+C_{n-1}^k+\ldots+C_{k+1}^k+C_k^k,\ \text{ unde } n,k\in\mathbf{N},\ n\geq k.$$

a) $E=C_{n+1}^{k-1}$ b) $E=C_{n+1}^{k+1}$ c) $E=C_{n+1}^{k+2}$ d) $E=C_{n+1}^{k-2}$ e) $E=C_{n+2}^{k+1}$ f) $E=C_{n+2}^{k+2}$

AL - 197 Să se calculeze expresia:

$$E=\frac{C_n^k-C_{n-2}^k-C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}},\quad n\geq 3,\ k\geq 2,\ n\geq k+2.$$

a) $E=1$ b) $E=2$ c) $E=3$ d) $E=\dfrac{1}{2}$ e) $E=\dfrac{1}{3}$ f) $E=-1$

AL - 198 Determinați mulțimea A a valorilor lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care: $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$.

a) $A = (-\infty, -3) \cup (-1, 1]$ b) $A = \{5, 6, 7\}$ c) $A = [1, 7]$

d) $A = \{8, 9, 10\}$ e) $A = [-3, -2] \cup \{1, 2\}$ f) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

AL - X. 199 Să se rezolve inecuația: $C_{3x}^{1} + C_{6x}^{3} \le 24$, precizându-se care din următoarele intervale conține soluția.

a) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ c) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ d) $\left(\frac{5}{6}, 1\right]$ e) $[7, 14]$ f) $[14, +\infty)$

AL - X. 200 Să se precizeze soluția sistemului : $\begin{cases} A_x^y = 10\,A_x^{y-1} \\ C_x^y = \frac{5}{3}\,C_x^{y+1} \end{cases}$.

a) $x = 23,\ y = 14$ b) $x = 20,\ y = 5$ c) $x = 17,\ x = 8$

d) $x = 12,\ y = 3$ e) $x = 10,\ y = 2$ f) $x = 8,\ x = 5$

AL – 201 Să se determine numerele naturale x și y, astfel încât numerele $C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_x^y$ să fie în progresie aritmetică, iar numerele A_x^y, A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1} să fie în progresie geometrică.

a) $x = 1,\ y = 3$; b) $x=3,\ y = 1$; c) $x = y = 3$;

d) $x = 3,\ y = \frac{1}{2}$; e) $x \in \mathbf{N}^*,\ y = 1$; f) $x = 4,\ y = 2$

AL – 202 Fie $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, n+1$ numere reale în progresie aritmetică de rație r. Să se calculeze suma: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_{k+1}$.

a) r b a_1 c) 1 d) 0 e) n f) 2^n

AL - 203 Să se determine al patrulea termen din dezvoltarea binomului

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, în ipoteza că $2^{2n}-2^n-240=0,\ n\in\mathbf{N}$.

a) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ b) $4\sqrt{x}$ c) $6\sqrt[3]{x}$ d) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ e) 4 f) $2x^2$

AL - 204 Să se precizeze termenul care nu conţine pe *x* din dezvoltarea binomului

$$\left(ax^{-\frac{1}{2}}+xa^{-\frac{1}{2}}\right)^{30},\ a, x\in\mathbf{R}_+^*.$$

a) $C_{30}^{10}a^{15}$ b) $C_{30}^{5}a^{7}$ c) $C_{30}^{7}a^{5}$ d) $C_{30}^{4}a^{12}$ e) $C_{30}^{15}a^{14}$ f) $C_{30}^{8}a^{8}$

AL – 205 În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$, $x\in\mathbf{R}_+^*$, coeficienţii primilor 3 termeni formează o progresie aritmetică. Să se determine termenii raţionali ai dezvoltării.

a) T_1; T_7; T_9; b) T_1; T_5; T_9; c) T_2; T_4, T_8;

d) T_1; T_3; T_7; e) T_2; T_6; T_8; f) T_1; T_3; T_5.

AL – 206 Determinaţi x din expresia

$$\left(x^{\log_a\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^n,\ (a>0,\ a\neq 1)$$

ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 128, iar al şaselea termen al dezvoltării este egal cu $\frac{21}{a^4}$.

a) $x_1 = 3a$, $x_2 = a^2$ b) $x_1 = 2a$, $x_2 = a^3$ c) $x_1 = 2a^{-1}$, $x_2 = a^{-3}$

d) $x_1 = 3a$, $x_2 = a^{-2}$ e) $x_1 = a$, $x_2 = a^4$ f) $x_1 = a^{-1}$, $x_2 = a^{-4}$

AL - 207 Câți termeni care nu conțin radicali sunt în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}\right)^{16}$?

a) Un termen b) Doi termeni c) Trei termeni

d) Nici unul e) Şase termeni f) Patru termeni

AL - 208 Care este expresia termenului din dezvoltarea binomului $\left(\frac{\sqrt{a}}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$, care conține pe a^4 ?

a) $187\frac{a^4}{3^7}$ b) $286\frac{a^4}{3^7}$ c) $107\frac{a^4}{3^5}$ d) $286\frac{a^4}{3^3}$ e) $202\frac{a^4}{3^7}$ f) $200\frac{a^4}{3^4}$

AL - X. 209 Care este termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$, în care exponenții lui x şi y sunt egali ?

a) T_{13} b) T_{10} c) T_6 d) T_8 e) T_{15} f) T_{11}

AL - X. 210 În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este egală cu 135.

a) $x_1=1,\ x_2=2$ b) $x=2$ c) $x_1=-1,\ x_2=2$

d) $x_1=-1,\ x_2=-2$ e) $x=1$ f) $x_1=1,\ x_2=-1$

AL - X. 211 În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali este cu 504 mai mică decât suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului $(a+b)^{3n}$. Să se afle termenul al doilea al primei dezvoltări.

a) $3x$ b) $3\sqrt[3]{x}$ c) $3\sqrt[3]{1/x}$ d) $3\sqrt[3]{x^2}$ e) 3 f) $3x^2$

AL - 212 Să se determine termenul ce nu conține pe a din dezvoltarea binomului

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}, \quad a\neq 0$$

a) $T_9 = C_{17}^8 = 24.310$

b) $T_7 = C_{17}^6 = 12376$

c) $T_6 = C_{17}^5 = 6188$

d) $T_2 = C_{17}^1 = 17$

e) $T_3 = C_{17}^2 = 136$

f) $T_4 = C_{17}^3 = 680$

AL - 213 Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea $(1+0{,}1)^{100}$.

a) 9 b) 10 c) 11 d) 20 e) 30 f) 22

AL - 214 Determinați valoarea celui mai mare coeficient binomial al dezvoltării binomului $(a+b)^n$, dacă suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 256.

a) 1 b) 8 c) 60 d) 70 e) 28 f) 7

AL – 215 Să se determine coeficientul lui x^{23} din dezvoltarea lui $(x^2 + x + 1)^{13}$.

a) 0 b) 13 c) 21 d) 442 e) 884 f)169

AL – 216 Să se afle coeficientul lui x^{12} din dezvoltarea

$$(10x^2 + 15x - 12)(x+1)^{15}.$$

a) $13C_{15}^5$ b) $14C_{15}^5$ c) $15C_{15}^5$

d) $20C_{15}^5$ e) $25C_{15}^5$ f) $30C_{15}^5$

AL - 217 Știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(1+x)^n + (1+x)^{n+1}$ este 1536, să se calculeze coeficientul lui x^6 din această dezvoltare.

a) 295 b) 294 c) 320 d) 293 e) 128 f) 200

AL - 218 Calculați $E = \left|\overline{z_1} z_2 + 1\right|^2 + \left|z_1 \overline{z_2} - 1\right|^2$ pentru numerele complexe z_1 şi z_2 ($\overline{z}$ fiind complexul conjugat numărului z).

a) $2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ b) $2\left(1 + |z_1 z_2|^2\right)$ c) $2\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)$

d) $2|z_1 z_2|^2$ e) $\left(1 + |z_1|^2\right)\left(|z_1|^2 - 1\right)$ f) $2\left(1 + |z_1|^2 - |z_2|^2\right)$

AL - 219 Să se găsească valorile reale ale lui m pentru care numărul

$$3i^{43} - 2mi^{42} + (1-m)i^{41} + 5 \text{ este real } \left(i^2 = -1\right).$$

a) $m = -1$ b) $m = -2$ c) $m = -\dfrac{5}{2}$ d) $m = 3$ e) $m = 1$ f) $m = 0$

AL - 220 Să se calculeze valoarea expresiei $E = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1996} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{1996}$.

a) i b) 2 c) –i d) –2 e) 2i f) –2i

AL - 221 Precizați partea imaginară a numărului complex

$$\frac{1}{4+3i}+\frac{(2-i)^2}{1+i}-\frac{i}{4i-3}+\frac{6}{2-i}.$$

a) $-\frac{23}{10}i$ b) $-\frac{29}{10}i$ c) $\frac{19}{10}i$ d) $\frac{10}{13}i$ e) $-\frac{33}{10}i$ f) $-\frac{10}{33}i$

AL - 222 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât numărul complex $\frac{1-i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$ să fie real.

a) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ d) $\frac{2\sqrt{3}+1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ f) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

AL – 223 Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ şi $x+iy=\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$, $x, y \in \mathbf{R}$ Atunci avem:

a) $x=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=\frac{|z_1 z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$ b) $x=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1^2-z_2^2}$, $y=i\frac{2z_1\overline{z_2}}{z_1^2-z_2^2}$

c) $x=\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1+z_2|^2}$, $y=i\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}{|z_1+z_2|^2}$ d) $x=\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=i\frac{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}{|z_1-z_2|^2}$

e) $x=\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=\frac{\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}}{|z_1-z_2|^2}$ f) $x=\frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$, $y=\frac{|z_1 z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$

AL - 224 Să se calculeze $|z|$ dacă $z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^4$.

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 16 e) 4 f) 6

AL – 225 O ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali care are ca rădăcină numărul complex $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2008}$ este:

a) $z^2+z+1=0$; b) $z^2-z+1=0$; c) $z^2+2z+2=0$;

d) $z^2-2z+2=0$; e) $z^2+1=0$; f) $z^2+3=0$

AL - 226 Să se determine numerele complexe z astfel încât $4z^2+8|z|^2-3=0$.

a) $z\in\left\{1\pm i,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $z\in\left\{\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ c) $z\in\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\pm\frac{1}{2}\right\}$

d) $z\in\left\{\pm\frac{1}{2}i,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ e) $z\in\left\{-1\pm i,\frac{2\pm i\sqrt{5}}{2}\right\}$ f) $z\in\left\{\frac{3\pm\sqrt{2}}{2},\frac{2i-5}{3},\frac{i+7}{2}\right\}$

AL – 227 Să se precizeze cu care din valorile date mai jos este egal $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

a) $z=1+i$ b) $z=2$ c) $z=1-i$ d) $z=-i$ e) $z=i$ f) $z=2+i$

AL - 228 Căreia din mulțimile de mai jos aparține $\alpha=\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$, pentru $z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$?

N b) **Z** c) **Q** d) **R** e) $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

AL - 229 Să se determine toate numerele complexe $z\in\mathbf{C}$ care verifică ecuația

$|z| - z = 1 + 2i$.

a) $z = -\frac{1}{2} + i$ b) $z_1 = -\frac{1}{2} + i,\ z_2 = \frac{3}{2} - 2i$ c) $z_1 = 0, z_2 = \frac{3}{2} + 2i$

d) $z = \frac{3}{2} - 2i$ e) $z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{1}{2} + i$ f) $z = \frac{5}{2} + 3i$

AL - 230 Să se afle numerele complexe $z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, de modul $\sqrt{2}$, astfel încât $\left(x + iy^2\right)^3$ să fie pur imaginar.

a) $z \in \{1 \pm i, -1 \pm i\}$ b) $z \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)\right\}$

c) $z \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 \pm i\sqrt{5}\right), \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-1 \pm i\sqrt{5}\right)\right\}$ d) $z \in \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} \pm i\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{3} \pm i\right)\right\}$

e) $z \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2 \pm i\sqrt{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2 \pm i\sqrt{2}\right)\right\}$ f) $z \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{5} \pm i\right), \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\sqrt{5} \pm i\right)\right\}$

AL - 231 Fie $a \in \mathbf{R}_+$ şi $z \in \mathbf{C}$, astfel încât $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare posibilă a lui $|z|$.

a) $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, 0$ b) $a, 0$ c) $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}$

d) $2 + \sqrt{a^2 + 4}, \sqrt{a^2 + 4} - 2$ e) $\frac{\sqrt{a^2 + 4} - a}{2}, \frac{\sqrt{a^2 + 4} - a - 1}{2}$ f) $\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}$

AL - 232 Fie z un număr complex astfel încât $|z-a|=\sqrt{a^2-b^2}$, unde, $a>b>0$. Să se calculeze $\left|\frac{b-z}{b+z}\right|$.

a) a b) $\sqrt{1-\frac{b}{a}}$ c) $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ d) $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$ e) $\sqrt{1+\frac{b}{a}}$ f) $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

AL - 233 Fie a$\in$**C** . Să se calculeze valoarea expresiei

$$E(a)=\left|a+\frac{1}{2}\right|^2+i\left|a+\frac{i}{2}\right|^2-(1+i)|a|^2-\frac{1}{4}(1+i).$$

a) 1- a b) 1+a c) a

d) 2a e) 1 f) 0

AL - 234 Fie $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. Să se calculeze :

$$E=(1+\varepsilon)\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\varepsilon^{1997}\right).$$

a) $E=1$ b) $E=2$ c) $E=2^{663}$ d) $E=2^{1997}$ e) $E=2^{665}$ f) $E=4$

AL - 235 Pentru $x\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ care satisface ecuația $x+\frac{1}{x}=-1$, să se calculeze valoarea expresiei

$$E=x^{333}+\frac{1}{x^{333}}.$$

a) E=1 b) E=2 c) E=-3 d) E=i e) E=2i f) E=3i

AL - 236 Fie α şi β rădăcinile ecuației $x^2+x+1=0$. Să se calculeze

$$\alpha^{2000}+\beta^{2000}.$$

a) 1 b) 0 c) –1 d) $i\sqrt{3}$ e) $-i\sqrt{3}$ f) 2

AL - 237 Fie z un număr complex de modul 1 şi argument θ.
Să se calculeze expresia

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}},\ (n\in\mathbf{N}).$$

a) $2\cos n\theta$ b) $\cos n\theta$ c) $2\sin n\theta$

d) $\dfrac{1}{2\cos n\theta}$ e) $\dfrac{1}{\cos n\theta}$ f) $\dfrac{1}{2\sin n\theta}$

AL - 238 Precizați care din valorile de mai jos sunt rădăcinile ecuației
$z^2-2i\sqrt{3}z-5=0$.

a) $z=2\pm i\sqrt{3}$ b) $z=\pm\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ c) $z=-\sqrt{3}\pm i\sqrt{2}$

d) $z=-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}$ e) $z=\sqrt{3}\pm i\sqrt{2}$ f) $z=-\sqrt{3}\pm i\sqrt{3}$

AL - 239 Soluția ecuației $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$ este:

a) $i-3, i-2$; b) $3i, 2-i$; c) $2i, 3-i$;
d) $2-i, 3-i$; e) $5-2i, 1-i$; f) $2i, 3i$

AL - 240 Se consideră ecuația $(2-i)z^2-(7+4i)z+6+mi=0$, în care $z\in\mathbf{C}$ este necunoscuta, iar *m* este un parametru real. Să se determine valorile lui *m* pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

a) $m\in\left\{-12,\dfrac{33}{5}\right\}$ b) $m=32$ c) $m\in\{2,5\}$

d) $m\in\left\{12,\dfrac{33}{4}\right\}$ e) $m\in\left\{0,\dfrac{33}{5}\right\}$ f) $m\in\left\{2,\dfrac{31}{2}\right\}$

AL - 241 Formați ecuația de grad minim, cu coeficienți reali, care admite ca rădăcini şi rădăcinile ecuației : $z^2-3\sqrt{2}\,z+5+\sqrt{2}\,i=0$.

a) $z^3-6\sqrt{2}\,z^2+2z+27=0$ b) $z^4-6\sqrt{2}\,z^3+28z^2-30\sqrt{2}\,z+27=0$

c) $z^4+2\sqrt{2}\,z^3-4z^2-6\sqrt{2}\,z+27=0$ d) $z^4-\sqrt{2}\,z^2+28z+27=0$

e) $z^4+\sqrt{2}\,z^3-28z^2-27=0$ f) $z^4-6\sqrt{2}\,z^2+30\sqrt{2}\,z+27=0$

AL - 242 Se dă ecuația $2z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+2\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$. Fie α o rădăcină a ecuației pentru care $|\alpha|=1$. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\frac{1+ix}{1-ix}=\alpha .$$

a) $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) $x=-\sqrt{3}$ d) $x=\sqrt{3}$ e) $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ f) $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

AL - 243 Rădăcinile pătrate ale numărului complex 3+4i sunt :

a) 2+i, 2-i ; b) 2+i, -2-i ; c) 2+i, -2+1 ;

d) 2-i, -2+i ; e) 1+i, 1-i ; f) 1+i, 2+i

AL - 244 Pentru z ∈ **C** să se determine soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \left|z^2 - 2i\right| = 4 \\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1 \end{cases}.$$

a) $z_1 = 1,\ z_2 = 1-i$ b) $z_1 = 1-i,\ z_2 = -1+i$ c) $z_1 = 1-i,\ z_2 = 0$

d) $z_1 = 0,\ z_2 = -1+i$ e) $z_1 = i,\ z_2 = 0$ f) $z_1 = -i,\ z_2 = 1+i$

AL - 245 Să se calculeze rădăcina pătrată din numărul complex

$$z = -3 + 4i,\ \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

a) $2+i,\ 2-i$ b) $1+2i,\ -1+2i$ c) $1+2i,\ -1-2i$

d) $-2+i,\ 2+i$ e) $1-2i,\ -1-2i$ f) $2-i,\ -1-2i$

AL - 246 Să se calculeze rădăcinile de ordinul n=3 ale lui $z = \dfrac{1+i}{1-i}$.

a) $z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = 1$ b) $z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = -i$

c) $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right),\ z_3 = -i$ d) $z_1 = z_2 = z_3 = -i,$

e) $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right),\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right),\ z_3 = -i$ f) $z_1 = z_2 = z_3 - 1,$

AL - 247 Să se determine toate rădăcinile complexe ale ecuației $z^4 + 81 = 0$.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1\pm i), -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i), -\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$ c) $2(1\pm i), -2(1\pm i)$

d) $\sqrt{2}(1\pm i), -\sqrt{2}(1\pm i)$ e) $\sqrt{2}\pm i, -\sqrt{2}\pm i$ f) $\pm 3i, \mp 3i$

AL - 248 Fie mulțimile :

$$A=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\},\quad B=\left\{z\in\mathbf{C}^{*}\mid \arg z<\frac{2\pi}{3}\right\}$$

$$C=\{z\in\mathbf{C}\mid |z+1|\le 1\};\quad D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z-i|\le 2\};$$

$$E=\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Im} z=2\},\quad F=\left\{z\in\mathbf{C}^{*}\mid \frac{2\pi}{3}<\arg z<\frac{5\pi}{4}\right\}$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmații sunt corecte.

a) A este discul de centru 0 şi rază 1;

b) B este mulțimea punctelor din semiplanul y>0,

c) C este cercul de centru A(-1,0) şi rază 1;

d) D este cercul de centru A(0,1) şi rază 2

e) E este o dreaptă paralelă cu axa Oy;

f) F este $Int\left(\widehat{AOB}\right)$ unde $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

AL – 249 Să se determine modulul şi argumentul pentru numărul complex:
$z = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$.

a) $|z| = \sqrt{2},\ \arg z = \frac{\pi}{4}$ b) $|z| = \sqrt{2},\ \arg z = a - \frac{\pi}{4}$

c) $|z| = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|,\ \arg z = \frac{\pi}{4}$ d) $|z| = 2\left|\cos\frac{a}{2}\right|,\ \arg z = a - \frac{\pi}{4}$

e) $|z| = 2,\ \arg z = \frac{\pi}{4}$ f) $|z| = 2,\ \arg z = a - \frac{\pi}{4}$

AL – 250 Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex :
$z = 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$, unde $\alpha \in (0,\pi)$.

a) $z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ b) $z = \cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

c) $z = 4\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ d) $z = \cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}$

e) $z = \cos\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ f) $z = 2\cos\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

AL – 251 Determinați partea reală a numărului complex $z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2(\sin\alpha + i\cos\alpha)}$.

a) $\operatorname{Re} z = \sin\left(\frac{7\pi}{3} - \alpha\right)$ b) $\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right)$ c) $\operatorname{Re} z = \cos\frac{5\pi}{3}$

d) $\operatorname{Re} z = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + \alpha\right)$ e) $\operatorname{Re} z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ f) $\operatorname{Re} z = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

AL – 252 Să se determine modulul şi argumentul redus pentru numărul complex:

$$z = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{16}.$$

a) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{2\pi}{3}$ b) $|z| = 2, \arg z = \frac{2\pi}{3}$ c) $|z| = 2, \arg z = \frac{\pi}{3}$

d) $|z| = \sqrt{2}, \arg z = \frac{\pi}{3}$ e) $|z| = 2^8, \arg z = \frac{2\pi}{3}$ f) $|z| = 2^8, \arg z = \frac{\pi}{3}$

AL – 253 Să se scrie sub forma $z = x + iy$ numărul complex : $z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3} + i\right)^7}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2^7}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ b) $\frac{1}{128}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$ c) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) i e) $\frac{1}{128}\left(\sqrt{3} + i\right)$ f) $\frac{1}{128}\left(\sqrt{3} - i\right)$

AL – 254 Să se determine numărul complex: $Z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^n + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

a) $Z = 2^n \cos\frac{n\pi}{3}$ b) $Z = 2^{n+1} \sin\frac{n\pi}{3}$ c) $Z = 2^{n+1} \cos\frac{n\pi}{3}$

d) $Z = 2^n \sin\frac{n\pi}{3}$ e) $Z = 2^{n+1}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ f) $Z = 2^{n+1}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

AL – 255 Ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$ .Să se calculeze expresia: $E = z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

a) $E = 2\cos n\alpha$ b) $E = 2i\sin n\alpha$ c) $E = 2\sin n\alpha$
d) $E = \cos n\alpha$ e) $E = 2i\cos n\alpha$ f) $E = \sin n\alpha$

AL – 256 Se notează cu z_1 şi z_2 rădăcinile complexe ale ecuației: $z^3 + 1 = 0$.
Să se determine valorile posibile pe care le poate lua expresia: $E(n) = z_1^n + z_2^n$, când n ia valori întregi pozitive.

a) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{0, \pm 1\}$ b) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, 2\}$

c) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{\pm 1, \pm 2\}$ d) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{Z}$

e) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \{\pm 2\}$ f) $\{E(n) \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}$

AL – 257 Să se determine toate soluțiile ecuației $\overline{z} = z^{n-1}$, oricare ar fi numărul natural $n > 2$.

a) $z = 1+ i$ b) $z = 1\pm i$ c) $z = i$ d) $z_1 = 0, z_2 = i$

e) $z_1 = 0,\ z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k \in \overline{0, n-1}$ f) $z_1 = 1+i\sqrt{3}, z_2 = 1-i\sqrt{3}$

AL – 258 Să se determine rădăcinile z_k, $k \in \overline{0,5}$ ale ecuației: $z^6 = i$.

a) $z_k = \cos\frac{k\pi}{11} + i\sin\frac{k\pi}{11},\ k = \overline{0,5}$ b) $z_k = \cos\frac{4k+1}{12}\pi + i\sin\frac{4k+1}{12}\pi,\ k = \overline{0,5}$

c) $z_k \cos\frac{k\pi}{7}\pi + i\sin\frac{k\pi}{7}\pi,\ k = \overline{0,5}$ d) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k = \overline{0,5}$

e) $z_k = \cos\frac{k\pi}{13} + i\sin\frac{k\pi}{13}, k = \overline{0,5}$ f) $z_k = \cos\frac{2k+1}{12}\pi + i\sin\frac{2k+1}{12}\pi, k = \overline{0,5}$

AL – 259 Fie ω o rădăcină complexă a ecuației: $z^n = 1$, $n\in\mathbf{N}^*$, $n > 2$. Să se precizeze valoarea expresiei: $S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + ... + n\omega^{n-1}$.

a) $S = \frac{1}{\omega - 1}$ b) $S = \frac{1}{1-\omega}$ c) $S = \frac{n}{\omega - 1}$

d) $S = \frac{n}{1-\omega}$ e) $S = n\cdot\omega$ f) $S = \frac{n\omega}{\omega - 1}$

AL – 260 Să se determine rădăcinile ecuației: $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \cos t + i\sin t$ în care $n\in\mathbf{N}^*$, $x,t\in\mathbf{R}$.

a) $x_k = tg\frac{t+2k\pi}{2n}, k = \overline{0,n-1}$ b) $x_k = tg\frac{t+k\pi}{2n}, k = \overline{0,n-1}$

c) $x_k = tg\dfrac{t+k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1}$ d) $x_k = \sin\dfrac{t+2k\pi}{2n}, k=\overline{0,n-1}$

e) $x_k = \cos\dfrac{t+2k\pi}{2n}, k=\overline{0,n-1}$ f) $x_k = \sin\dfrac{t+k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1}$

AL – 261 Precizați numărul maxim de rădăcini comune ale ecuațiilor: $z^8 = 1$ şi $z^{12} = 1$.

a) nici una b) una c) două d) patru e) trei f) opt

AL – 262 Fie $z_k, k=\overline{1,4}$ soluțiile ecuației: $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \dfrac{1+a\cdot i}{1-a\cdot i}$, $a\in \mathbf{R}^*$.

Care este valoarea produsului $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4$?

a) 1 b) 2 c) –1 d) 3 e) –3 f) –2

AL – 263 Să se calculeze expresia:

$$E = 1+3(\cos t+i\sin t)+3(\cos t+i\sin t)^2+(\cos t+i\sin t)^3 .$$

a) $\cos\dfrac{3t}{2}+i\sin\dfrac{3t}{2}$ b) $8\cos\dfrac{3t}{2}$ c) $8\cos^3\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{3t}{2}+i\sin\dfrac{3t}{2}\right)$

d) $8\sin\dfrac{3t}{2}$ e) $\cos^3\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{3t}{2}+\sin\dfrac{3t}{2}\right)$ f) $\cos\dfrac{3t}{2}-i\sin\dfrac{3t}{2}$

AL – 264 Să se afle afixul celui de al treilea vârf al unui triunghi echilateral, ştiind că afixele a două vârfuri sunt: $z_1 = 1$, $z_2 = 2+i$.

a) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ c) $3+i$

d) i e) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ f) $1+i$

AL – 265 Fie M_1 , M_2 , M_3 , M_4 puncte ale căror afixe sunt, respectiv,

$z_1 = 2 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -\sqrt{6} + i$, $z_4 = -\sqrt{6} - i$. Care din afirmațiile următoare este adevărată

a) M_1 , M_2 , M_3, M_4 sunt coliniare b) M_1 , M_2 , M_3 , M_4 sunt conciclice
c) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ nu este inscriptibil
d) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este un pătrat
e) $M_1M_2 = M_3M_4$
f) patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$ este romb.

AL – 266 Să se determine valorile expresiilor:

$$S_1 = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$S_2 = \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n},\ n \in \mathbf{N}$$

a) $S_1 = S_2 = 1$ b) $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ c) $S_1 = S_2 = -1$
d) $S_1 = S_2 = 0$ e) $S_1 = -1$, $S_2 = 0$ f) $S_1 = 0$, $S_2 = -1$

AL – 267 Se dau numerele complexe: $z_1 = \sin\alpha - \cos\alpha + i(\sin\alpha + \cos\alpha)$ și $z_2 = \sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$, unde α este parametrul real dat. Să se găsească numerele n pentru care $(z_1 \cdot z_2)^n$ este un număr real și pozitiv.

a) $n = 3p$, $p\in \mathbf{N}$ b) $n = 2p$, $p\in\mathbf{N}$ c) $n = 2p+1$, $p\in \mathbf{N}$
d) $n = 4p$, $p\in\mathbf{N}$ e) $n = 4p + 1$, $\mathbf{p}\in \mathbf{N}$ f) $n = 3p + 1$, $p\in \mathbf{N}$

AL – 268 Numerele complexe z_1 și z_2 satisfac relația: $|z_1 + z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Care din afirmațiile următoare este adevărată ?

a) $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - i$ b) $z_1 = z_2 = 2+3i$ c) $|z_1| = 0, |z_2| > 0$

d) $|z_1| > 2$ și $|z_2| > 2$ e) cel puțin unul din cele două numere f) $|z_1| > 2$, $|z_2| = 0$

are modulul mai mic sau egal cu 2.

AL – 269 Fie $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, $w = \dfrac{z}{|z|} + \dfrac{|z|}{z}$ şi Im(w) -partea imaginară a numărului w.

Care dintre afirmaţiile următoare este adevărată ?

a) Im(w)>0 b) Im(w)< 0 c) dacă $z = i$ atunci $w \neq 0$
d) $w \neq 0$ pentru orice $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ e) dacă $z = -i$ atunci $w = i$
f) $w \in \mathbf{R}$ şi există a,b$\in$ **R** astfel încât $z^2 = az + b$

AL – 270 Determinaţi mulţimea tuturor punctelor din plan ale căror afixe z verifică relaţia: $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbf{R}$.

a) axa reală mai puţin originea b) cercul cu centrul în origine şi raza 2
c) cercul cu centrul în origine şi raza 1 d) axa imaginară
e) axa reală fără origine reunită cu cercul cu centrul în origine de rază 1
f) axa imaginară reunită cu cercul cu centrul în origine de rază 2

AL – 271 Considerăm două numere complexe z_1, $z_2 \in \mathbf{C}^* \setminus \mathbf{R}$ astfel încât: $z_1 \overline{z_2} = |z_1| \cdot |z_2|$. Ce putem afirma despre imaginile lor ?

a) sunt coliniare cu originea b) sunt conciclice cu originea c) coincid
d) împreună cu originea formează vârfurile unui triunghi nedegenerat
e) imaginea lui z_1 coincide cu imaginea lui $\dfrac{1}{z_2}$
f) împreună cu originea formează un triunghi isoscel.

AL – 272 Vârfurile A, B, C ale unui triunghi au afixele $1,\ 1+z,\ 1+z+z^2$, unde $z = r\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ cu $r \in (0,1)$. Precizaţi poziţia originii O (0,0) faţă de laturile triunghiului.

a) $O \in [AB]$ b) $O \in [AC]$ c) $O \in [BC]$

d) O aparține interiorului triunghiului
e) O aparține exteriorului triunghiului
f) O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC

AL – 273 Să se calculeze : $E=\left(\frac{1+itg\ t}{1-itg\ t}\right)^n$, $t\in$ **R** - $\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$, $n\in$**N***.

a) $\frac{\text{tg}\ nt+i}{\text{tg}\ nt-i}$ b) $\frac{1+i\text{tg}\ nt}{1-i\text{tg}\ nt}$ c) $\frac{1+i\text{ctg}\ nt}{1-i\text{ctg}\ nt}$

d) $\frac{\text{ctg}\ nt+i}{\text{ctg}\ nt-i}$ e) $\text{ctg}\ nt+i$ f) $1+i\text{tg}\ nt$

AL - 274 Să se calculeze

$$E=C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots+(-1)^k C_n^{2k}+\ldots$$

a) $E=2\cos\frac{n\pi}{4}$ b) $E=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{6}$ c) $E=\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$

d) $E=2\sin\frac{n\pi}{4}$ e) $E=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{6}$ f) $E=\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}$

AL – 275 Dacă $\sqrt{a}=tg\alpha, \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze suma

$$C_n^1-aC_n^3+a^2C_n^5-a^3C_n^7+\ldots$$

a) $\frac{\sin\alpha}{\sin n\alpha\cos^{n-1}\alpha}$ b) $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cos n\alpha}$ c) $\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha}$

d) $\frac{\sin n\alpha}{\cos\alpha\sin^n\alpha}$ e) $\frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha\sin\alpha}$ f) $\frac{\sin n\alpha}{\sin^n\alpha\cos^n\alpha}$

AL - 276 Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0,(3) \\ -0,5 & 1,4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 0,(6) \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

Să se calculeze matricea $C = A + B$.

a) $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $C=\begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $C=\begin{pmatrix} 2 & 0,(3) \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $C=\begin{pmatrix} 0,(6) & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ f) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

AL - XI. 277 Se dau matricele pătratice de ordinul al doilea $E=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ şi $F=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze matricea

$$A = 2E - 3F$$

a) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 13 & -12 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$

AL - 278 Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{Z})$.

Dacă $f(x)=3x$ să se calculeze $f(A)$.

a) $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

d) $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ e) $f(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ f) $f(A)=I_3$

AL - 279 Să se calculeze produsul de matrice $A \cdot B$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

AL - 280 Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 281 Să se rezolve ecuația matriceală:

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 282 Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 283 Aflați $a \in \mathbf{R}$ astfel ca matricea diagonală constantă

$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ să fie soluția comună a ecuațiilor matriceale

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ și } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

a) $a = \frac{3}{10}$ b) $a = \frac{2}{10}$ c) $a = \frac{1}{10}$

d) $a = \frac{10}{3}$ e) $a = \frac{10}{2}$ f) $a = 10$

AL - 284 Să se determine toate matricile *X*, cu proprietatea că $AX = XA$,

unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbf{R}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 3\alpha & 1 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbf{R}$ e) $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 3\beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ f) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$; $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$

AL - 285 Să se determine matricea *X* care verifică relația: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

AL - 286 Care este valoarea parametrului $a \in \mathbf{R}$ pentru care există $x,y,z,t \in \mathbf{R}$, nu toți nuli, astfel încât $x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

a) $a = 1$ b) $a = 0$ c) $a = -1$ d) $a = 2$ e) $a = -2$ f) $a = 4$

AL - 287 Să se determine constantele reale *p* și *q* pentru care matricea

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ satisface relația $A^3 = pA^2 + qA$.

a) $p = -2$, $q = 3$ b) $p = 3$, $q = -2$ c) $p = 1$, $q = 4$

d) $p = -2$, $q = -3$ e) $p = 2$, $q = 1$ f) $p = 1$, $q = 3$

AL - 288 Să se rezolve ecuația matriceală $X\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 6 & -31 & -5 \\ 4 & -12 & -14 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 6 & -32 & -21 \\ 4 & -23 & -14 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -31 & 2 \\ 5 & -11 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 5 & -31 & 4 \\ 4 & -12 & 10 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 6 & -32 & 21 \\ 4 & -23 & 14 \end{pmatrix}$

AL - 289 Să se determine matricea X care verifică ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

a) $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

AL – 290 Să se rezolve ecuația matricială

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

a) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 4 & -8\\ -9 & 16 & -1\\ -4 & 24 & -16\end{pmatrix}$;

b) $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 9 & 16 & 1\\ 4 & 24 & 16\end{pmatrix}$

c) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 9 & -16 & 1\\ 4 & -24 & 16\end{pmatrix}$;

d) $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$

e) $X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -4 & -8\\ 9 & 16 & 1\\ 4 & 24 & -16\end{pmatrix}$;

f) $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$

AL – 291 Să se determine toate matricile formate cu elemente din codul binar **B**= $\{0,1\}$ care să transforme prin înmulțire matricea coloană $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ în matricea coloană $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 292 Să se rezolve ecuația: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbf{Z})$.

a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & -\frac{6i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2i}{\sqrt{3}} & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

AL - 293 Să se determine toate matricile $X \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel ca: $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

AL - 294 Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}m & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ cu $m\in\mathbf{R}$.. Să se determine valorile lui $m\in\mathbf{R}$ astfel încât să existe trei constante nu toate nule, $a,b,c\in\mathbf{R}$ cu condiția $aA+bB+cC=0$, 0 - matricea nulă.

a) $m=1$ b) $m=0$ c) orice $m\in\mathbf{R}$ d) $m\in\varnothing$ e) $m=\frac{5}{4}$ f) $m=-\frac{5}{4}$

AL - 295 Să se calculeze suma: $\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1 & k & k^2 & k^3\\ -1 & 2 & 3 & k(k+1)\end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\\ -n & 2n & 3n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} n & n! & 2n! & 3n!\\ -n & 2n & 3n & 3n!\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{n(n+1)}{3}\\ -n & 2n & 3n & 3n!\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3\\ -1 & 2 & 3 & n(n+1)\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} n! & (2n)! & (3n)! & (4n)!\\ -n! & 2! & 3! & (6n)!\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & n! & n^2 & n^3\\ -n & 2n & 3n & 3n!\end{pmatrix}$

AL – 296 Dacă $\omega=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ iar $A=\begin{pmatrix}1 & \omega\\ \omega^2 & 1\end{pmatrix}$, să se determine numărul $a_n\in\mathbf{R}$ astfel încât să avem

$$A^2+A^3+\ldots+A^n=a_n\cdot A,\quad (\forall)n\in\mathbf{N}.$$

a) 2^n+2 b) $2^{n-1}-2$ c) 2^n-2

d) $2^{n-1}+2$ e) $2^{n-1}-1$ f) $2^{n-1}+1$.

AL - 297 Dacă ω este o rădăcină a ecuației $x^2+x+1 = 0$ şi $n = 3p$, $p\in\mathbf{N^*}$, să se calculeze suma:

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}\omega^k & \omega^{2k} & \omega^{3k}\\ \omega^{3k} & \omega^{2k} & \omega^k\end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & n\\ n & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & n\\ n & -1 & -1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0 & 0 & n\\ n & 0 & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & \omega^3\\ \omega^2 & \omega & \omega^2\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & \omega^3\\ \omega^3 & \omega^2 & \omega\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}n & 0 & 0\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$

AL – 298 Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & \varepsilon & 1\\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unității şi fie ecuația matriceală AX = B. Fie S suma modulelor elementelor matricei X. Atunci :

a) S = 4; b) S = 16; c) S = 3;

d) S = $1+\sqrt{3}$; e) S = $1-\sqrt{3}$; f) S = $2+\sqrt{3}$

AL – 299 Fie M mulțimea tuturor matricelor cu 4 linii şi 5 coloane în care toate elementele sunt numerele +1 şi - 1 şi astfel încât produsul numerelor din fiecare linie şi din fiecare coloană este -1 . Să se calculeze numărul elementelor mulțimii M.

a) 2 b) 7 c) 6

d) 4 e) 0 f) 1

AL - 300 Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Să se determine condițiile în care există $p,q \in \mathbf{R}$, unici astfel ca $M^2 - pM - qI = 0$, I fiind matricea unitate, 0 matricea nulă. Să se determine în acest caz valorile lui p şi q.

a) $b = c,\ a = d,\ p = a,\ q = b^2 - a^2$ b) $b,c \in \mathbf{R},\ a = d,\ p = 2a,\ q = bc - a^2$

c) $b = c,\ a,d \in \mathbf{R},\ p = a+d,\ q = b^2 - a^2$ d) $b \neq 0$ sau $c \neq 0$ sau $a \neq d,\ p = a+d,\ q = bc - ad$

e) $b = 0,\ c = 0,\ a = d,\ p = a+d,\ q = bc - ad$ f) $b \neq 0,\ a \neq d,\ c \in \mathbf{R},\ p = a+d,\ q = -ad$

AL - 301 Fie $A,B,C \in M_n$ **(C)** cu proprietățile $A+B = AB$, $B+C = BC$, $C+A = CA$. Pentru ce valoare $m \in \mathbf{R}$ are loc egalitatea $A+B+C = mABC$?

a) $m = 1$ b) $m = \frac{1}{2}$ c) $m = \frac{1}{4}$

d) $m = 3$ e) $m = \frac{3}{4}$ f) $m = \frac{1}{3}$

AL - 302 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $ad = bc$, $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Să se determine (în funcție de elementele matricii A) numărul real r asfel încât să aibă loc egalitatea $A^n = r^{n-1}A$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

a) $r = a - d$ b) $r = a + d$ c) $r = b + c$

d) $r = b - c$ e) $r = a + c$ f) $r = b + d$

AL - 303 Să se determine puterea $n \in \mathbf{N}$ a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = 2n^2 + n \end{matrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n \\ b_n = n^2 \end{matrix}$

c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = 2n^2 \end{matrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = 2n \\ b_n = n^2 + n \end{matrix}$

e) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n^2 \\ b_n = 2n^2 + n \end{matrix}$

f) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 \\ b_n & a_n & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} a_n = n \\ b_n = n^2 - n \end{matrix}$

AL - 304 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculați det $P(A)$, unde $P(x) = x^{100} - 1$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 99 e) 100 f) -100

AL - 305 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că A^n este de forma: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi să se determine apoi a_n, $n \in \mathbf{N}$.

a) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2n$ b) $a_{n+1} = a_n, a_n = 1$ c) $a_{n+1} = a_n + 1, a_n = n$

d) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2^n$ e) $a_{n+1} = a_n + 2, a_n = 2^n$ f) $a_{n+1} = 2a_n, a_n = 2n^2$

AL - 306 Să se determine A^n, $n\in\mathbf{N}^*$, unde $A\in M_3(\mathbf{Z})$ este o matrice care verifică relația: $(1 \quad 1+x \quad 1+x^2) = (1 \quad x \quad x^2)A$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

a) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & n\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix}1 & -n & -n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & -n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}n & 1 & 1\\ 0 & n & 0\\ 0 & 0 & n\end{pmatrix}$

AL - 307 Fie matricea $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $(n\geq 1)$.

a) $A^n=\begin{pmatrix}\cos^n\alpha & -\sin^n\alpha\\ \sin^n\alpha & \cos^n\alpha\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}n\cos\alpha & -n\sin\alpha\\ n\sin\alpha & n\cos\alpha\end{pmatrix}$

c) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ d) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$

e) $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & n\sin n\alpha\\ -n\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\cos\alpha & -\frac{1}{n}\sin\alpha\\ \frac{1}{n}\sin\alpha & \frac{1}{n}\cos\alpha\end{pmatrix}$

AL - 308 Să se calculeze $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^{30}$.

a) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

AL - 309 Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, să se calculeze matricea A^n, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n^2(n-1)}{4}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&3n\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

d) $A^n=\begin{pmatrix}1&3n&n^2\\0&1&3n\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $A^n=\begin{pmatrix}1&n^2&n^3-1\\0&1&n^2\\0&0&1\end{pmatrix}$ f) $A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

AL - 310 Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$. Să se arate că A^n, $n\geq 1$ are forma

$\begin{pmatrix}1&a_n&b_n\\0&1&a_n\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi să se determine a_n şi b_n.

a) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(n+1)}{6}$ b) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(2n+5)}{12}$

c) $a_n=\frac{n+1}{2}$, $b_n=\frac{n(2n+1)}{6}$ d) $a_n=\frac{n}{2}$, $b_n=\frac{n(3n+5)}{24}$

e) $a_n=2n+3$, $b_n=3n+7$ f) $a_n=\frac{2n+1}{4}$, $b_n=\frac{n(5n+4)}{4}$

AL - 311 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2n & n^2+4n-2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{3} & 3n \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} n & 2n & 3n \\ 0 & n & 2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 312 Să se calculeze A^n, $n \in \mathbf{N^*}$ unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{pmatrix}$ b) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ c) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

d) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ e) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ f) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

AL - 313 Care sunt valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$ pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & \frac{1}{2} - a \\ \frac{1}{2} - a & \frac{1}{2} & a \\ a & \frac{1}{2} - a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ este inversabilă.

a) orice $a \in \mathbf{R} \setminus \{1,2\}$ b) orice $a \in [-7,2]$ c) orice $a \in \mathbf{R}$

d) orice $a \in (-\infty, 1] \cup \{9\}$ e) orice $a \in \{1,2,3,4\}$ f) orice $a \in \mathbf{R} \setminus \{3,4\}$

AL - 314 Să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 6 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 315 Să se determine parametrul $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă şi apoi să se afle inversa sa.

a) $\alpha \neq -2$; $\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \\ \frac{-\alpha}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$ b) $\alpha = -2$; $\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \\ \frac{-\alpha}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

c) $\alpha \neq -1$; $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+2} & \frac{2}{\alpha+2} \\ \frac{-\alpha}{\alpha+2} & \frac{\alpha}{\alpha+2} \end{pmatrix}$ d) $\alpha = -1$; $\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \\ \frac{-\alpha}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$

e) $\alpha = 1$; $\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-2}{\alpha+1} \\ \frac{-\alpha}{\alpha+2} & \frac{1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$ f) $\alpha \neq -1$; $\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha+1} & \frac{2}{\alpha+2} \\ \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$

AL - 316 Matricea $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \\ 5 & -4 & 7 & \beta \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru:

a) $\alpha = 2,\ \beta = -5$ b) $\alpha = -1,\ \beta = -10$ c) $\alpha = -3,\ \beta = 2$
d) $\alpha = 1,\ \beta = -10$ e) $\alpha = 3,\ \beta = -1$ f) $\alpha = -1,\ \beta = 10$

AL - 317 Să se determine valorile parametrilor reali α şi β pentru care matricea:

$$A=\begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ are rangul 2.}$$

a) $\alpha = 1, \beta = 1$ b) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ c) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$

d) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 1$ e) $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$ f) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$

AL - 318 Se dă matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$. Să se determine parametrul real a pentru care rangul matricei este egal cu 2.

a) $a = 4$ b) $a = -2$ c) $a = 3$ d) $a = 8$ e) $a = -1$ f) $a = 0$

AL - 319 Pentru ce valori ale parametrilor $a, b \in \mathbf{R}$, matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & a & 4 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{pmatrix}$$ au ambele rangul 2.

a) $a = \dfrac{44}{7}, b = \dfrac{19}{5}$ b) $a = \dfrac{1}{3}, b = -1$ c) $a = \dfrac{19}{5}, b = \dfrac{44}{7}$

d) $a = -1, b = -2$ e) $a = 2, b = -1$ f) $a = -1, b = \dfrac{1}{3}$

AL - 320 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & i \\ \alpha & i & i \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; dacă rangul matricii este 2, atunci suma elementelor sale este soluție a ecuației:

a) $x^2 + 1 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ c) $x^3 + 1 = 0$

d) $x^3 - 27i = 0$ e) $x^4 + 1 = 0$ f) $x^4 - 81 = 0$

AL - 321 Să se determine valorile parametrilor $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ a & 1 & 2 & -1 \\ a & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul minim.

a) $a = 1, b = 1$ b) $a = 1, b = -1$ c) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$

d) $a = 2, b = -\frac{1}{3}$ e) $a = 2, b = 2$ f) $a = -1, b = -\frac{1}{3}$

AL - 322 Se dă matricea: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & 2 & \alpha & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se determine toate valorile parametrilor reali α, β pentru care rangul matricei este doi.

a) $\alpha \neq 1, \beta \neq -1$ b) $\alpha = 1, \beta \neq -1$ c) $\alpha = 1, \beta \neq -1$; $\alpha \neq 1, \beta = -1$

d) $\alpha \neq 1, \beta = -1$ e) $\alpha = 1, \beta = -1$ f) $\alpha = 1, \beta \in \mathbf{R}$

AL - 323 Pe care din următoarele mulțimi de variație ale parametrilor reali α şi β matricea $\begin{pmatrix} \beta & 1 & 2 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 1 & 2\alpha & 2 & 4 \end{pmatrix}$ are rangul 3?

a) $\alpha \in [-1,1], \beta \in [-1,4]$ b) $\alpha \in \left(-7, \frac{2}{3}\right], \beta \in (0,2)$

c) $\alpha \in \left(0, \frac{3}{4}\right), \beta \in \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ d) $\alpha \in \left(-3, \frac{3}{5}\right), \beta \in (0,1)$

e) $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right), \beta \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$ f) $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right], \beta \in (0,7]$

AL – 324 Se consideră matricea

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se precizeze valoarea parametrului α, pentru care rangul matricei este doi.

a) α = 3; b) α = 1; c) α = -5; d) α = 5; e) α = -3; f) α = 4.

AL – 325 Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & a & a & a \\ a & a+1 & a+2 & a+3 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{pmatrix}$

Pentru ce valori reale ale lui *a* şi *x* matricea *A* are rangul 2?

a) $a = 0$; $x = 1$ b) $x = 1$; $a \in \mathbf{R}$ c) $a = 0$; $x \in \mathbf{R}$ d) $a = 0$; $x \in (-1,2)$
e) pentru nici o valoare reală a lui *a* şi *x*. f) $a = 0$; $x = 0$

AL - 326 Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2X-5Y=A \\ -X+3Y=B \end{cases}$ unde $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $X=\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $X=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$

c) $X=\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ d) $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $X=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL - 327 Să se precizeze care dintre perechile de matrice (X,Y), date mai jos,

reprezintă o soluție a sistemului: $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

AL - 328 Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 8 b) 6 c) 16 d) 17 e) 18 f) 0

AL - 329 Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) $2a^2$ c) $4a^2$

d) $6a^2$ e) 1 f) -1

AL - 330 Să se calculeze $\det\left(A^{-1}\right)$ dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{11}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{11}$ f) $\frac{1}{5}$

AL - 331 Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$. Să se calculeze

determinantul matricii $A\cdot B$.

a) -2; b) -1; c) 0; d) 1; e) 2; f) 3

AL - 332 Calculați determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x^2 & x & 1\\ 1 & -y & y^2\\ y^2 & -xy & x^2\end{vmatrix}$.

a) $\Delta=\left(x^2+y\right)(1-xy)\left(x+y^2\right)$ b) $\Delta=\left(x^2-y\right)(1-xy)\left(x-y^2\right)$

c) $\Delta=\left(x^2-y\right)(1-xy)\left(x+y^2\right)$ d) $\Delta=\left(x^2+y\right)(1+xy)\left(x+y^2\right)$

e) $\Delta=-\left(x^2+y\right)(1+xy)\left(x-y^2\right)$ f) $\Delta=-\left(x^2-y\right)(1+xy)\left(x+y^2\right)$

AL - 333 Se consideră $f(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{1+x^2}+2 & \dfrac{2}{1+x^2}+5 & \dfrac{2}{1+x^2}+3 \\ -2x & 1-5x & -3x \\ 4 & 7+x & 5 \end{vmatrix}$.

Aduceți $f(x)$ la forma cea mai simplă.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

d) $f(x) = x^2$ e) $f(x) = 0$ f) $f(x) = 2 + x^2$

AL - 334 Care este valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

a) 3 b) 2 c) -2 d) 1 e) -1 f) 0

AL - 335 Se consideră $f(x) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ 1+\sin 2x & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Aduceți $f(x)$ la forma cea mai simplă.

a) $f(x) = 1+\cos x$ b) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ c) $f(x) = -2\sin 2x$

d) $f(x) = \cos^2 x$ e) $f(x) = -\cos^3 2x$ f) $f(x) = \cos^3 2x$

AL - 336 Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi h_a, h_b, h_c sunt înălțimile corespunzătoare, care este valoarea determinantului: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & h_b \cdot h_c \\ 1 & b & h_c \cdot h_a \\ 1 & c & h_b \cdot h_a \end{vmatrix}$?

a) $\Delta = abc$ b) $\Delta = 0$ c) $\Delta = a^2+b^2+c^2$

d) $\Delta = 1$; e) $\Delta = 2abc$ f) $\Delta = \dfrac{1}{2}(ab+ac+bc)$

AL - 337 Să se calculeze determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, unde ω este o rădăcină cubică complexă a unității ($\omega^3 = 1$).

a) $\Delta = -3$ b) $\Delta = -3-6\omega$ c) $\Delta = -3+6\omega$

d) $\Delta = 1$ e) $\Delta = 3$ f) $\Delta = 6\omega$

AL - 338 Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculați determinantul matricii $\sum_{k=0}^{4} A^k$.

a) 15 b) 20 c) 40 d) 30 e) 31 f) 41

AL – 339 Să se calculeze

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

a) $\Delta = 2abc(a-b)(b-c)(c-a)$ b) $\Delta = 2abc(a-c)(c-b)(b-a)$

c) $\Delta = 2abc(a+b)(b+c)(c+a)$ d) $\Delta = 0$

e) $\Delta = 2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$ f) $\Delta = (a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)$

AL – 340 Fie x,y,z $\in$**R;** să se calculeze valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & x+y+z & xy+xz+yz & xyz \end{vmatrix}$$

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = -1$ c) $\Delta = 0$

d) $\Delta = x+y+z$ e) $\Delta = x^2+y^2+z^2$ f) $\Delta = xyz$

AL – 341 Fie $a,b,c,d \in \mathbf{R}$. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 1+a^2 & ab & ac & ad \\ ba & 1+b^2 & bc & bd \\ ca & cb & 1+c^2 & cd \\ da & db & dc & 1+d^2 \end{vmatrix}$$

a) $1-a^2-b^2-c^2-d^2$ b) $(a-b)(b-c)(c-d)$ c) $1+a^2+b^2+c^2+d^2$

d) $a^2+b^2+c^2+d^2$ e) 1 f) 0

AL – 342 Să se calculeze valoarea determinantului asociat matricei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

a) $a^2+b^2+c^2+d^2$ b) $-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ c) $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

d) $\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ e) $(a+b+c+d)^2$ f) $\pm(a+b+c+d)^2$

AL – 343 Să se determine toate valorile x $\in \mathbf{R}$ astfel ca valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4+2i & 4-2i & 1-3i \\ 1 & x+2i & x-2i & 1+3i \\ 1 & x+i & 8+3i & 1-i \end{vmatrix}$$

să fie un număr real.

a) $x \in \{0,6\}$ b) $x \in \{0,2\}$ c) $x \in \{2,6\}$

d) $x \in \{1,2\}$ e) $x \in \{-1,1\}$ f) $x \in \{3,4\}$.

AL – 344 Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

a)4 b)3 c) 5 d)-4 e)-5 f) 0

AL – 345 Fie $A=(a_{ij})$ o matrice pătrată de ordinul 4, definită astfel :

$$a_{ij} = \max\{i, j\},\ \ i, j = \overline{1,4}\ .$$

Să se determine det *A*.

a) 0 b) 4 ! c) -4 !

d) –4 e) 4 f) 1

AL – 346 Să se calculeze $\dfrac{\det(A_{2008})}{\det(A_{2007})}$, unde

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n \\ 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$$

a) 2009!; b) 2008!; c) 2007!; d) 2006!; e) 2008; f) 2007.

AL – 347 Dacă b_1, b_2, b_3 sunt numere reale în progresie geometrică cu rația $q \in \mathbf{R}_+$, să se calculeze pentru $\alpha \in \mathbf{R}$, în funcție de primul termen b_1 şi rația q, valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1+b_1^{2\alpha} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b_2^{2\alpha} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b_3^{2\alpha} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) $b_1^{6\alpha} q^{2\alpha}$ b) $b_1^{6\alpha+1} q^{12\alpha}$ c) $b_1^{6\alpha} q^{15\alpha}$

d) $b_1^{6\alpha} q^{6\alpha}$ e) $b_1^{6\alpha} q^{3\alpha}$ f) $b_1^{6\alpha} q^{4\alpha}$

AL - 348 Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix} = 0$.

a) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ b) $x_1 = x_2 = x_3 = a$

c) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c$ d) $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = a^2 + b^2 + c^2$

e) $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = a^2 + b^2 - c^2$ f) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 0$

AL - 349 Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$?

a) $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = -1$ b) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$

c) $x_1 = 7,\ x_2 = \sqrt{5}, x_3 = -\sqrt{5}$ d) $x_1 = x_2 = 7, x_3 = 1$

e) $x_1 = 7,\ x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$ f) $x_1 = -2,\ x_2 = 7, x_3 = 1$

AL - 350 Care sunt soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$?

a) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$

b) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$

c) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

d) $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\ x_3 = -1$

e) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 2$

f) $x_1 = -1,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

AL - 351 Precizați soluțiile ecuației $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0$.

a) $a, -a, 2a, 3a$

b) $a, -a, 2a, -2a$

c) $a, -a, -a, -3a$

d) $a, a, -a, -3a$

e) $a, a, a, -3a$

f) $a, a, -a, 3a$

AL - 352 Care sunt soluțiile reale ale ecuației $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{-x} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0$?

a) $x = 0$

b) $x = a$

c) $x = 2a$

d) $x = -\dfrac{a}{2}$

e) $x = -a$

f) $x = -2a$

AL - 353 Fie A o matrice pătratică de ordinul n ($n \geq 2$) nesingulară. Precizați care este relația între $\det(A^*)$ şi $\det A$, unde A^* este reciproca lui A.

a) $\det A = \det A^*$

b) $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$

c) $\det(A^*) = (\det A)^n$

d) $(\det A^*)^n = \det A$

e) $(\det A^*)^{n-1} = \det A$

f) $\det A = \dfrac{1}{\det A^*}$

AL - 354 Fie matricea $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 4}},\ a_{ij} = \max\left\{\left|i+j-2\right|,\left|i+j-3\right|\right\}$.

Să se calculeze det ($A^t \cdot A$), unde A^t este transpusa matricei A.

a) 25 b) 9 c) 0 d) 1 e) -1 f) 36

AL - 355 Fie matricea $A = \left(a_{ij}\right),\ 1\le i\le 3,\ 1\le j\le 3$, cu elementele

$a_{ij} = \min\left\{\left|\,i+j-3\,\right|,\left|\,i-2j+3\,\right|\right\}$. Să se calculeze $\det A$ şi A^{-1}.

a) $\det A = 2,\quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\det A = -3,\quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\det A = 1,\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\det A = 2,\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\det A = -3,\ A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ f) $\det A = 1,\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

AL - 356 Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt

rădăcinile ecuației $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = -1$ c) $\Delta = p-q$ d) $\Delta = 0$ e) $\Delta = p-q+r$ f) $\Delta = -1$

AL - 357 Se dă ecuația $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 \\ x & 1 & a \end{vmatrix} = 0$; $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Să se determine parametrul a astfel încât între rădăcinile ecuației să existe relația $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 < \left(x_1 x_2 x_3\right)^2$.

a) $a \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$ b) $a \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ c) $a \in [-1,2]$

d) $a \in [1,2]$ e) $a \in (-\infty,1]$ f) $a \in [1,+\infty)$

AL - 358 Să se calculeze $\Delta = |d|$**,** unde $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, iar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ sunt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$.

a) $\Delta = 2p^2$ b) $\Delta = \sqrt{p^3 - 27pq}$ c) $\Delta = 4pq$

d) $\Delta = \sqrt{q^2 - p}$ e) $\Delta = \sqrt{-4p^3 - 27q^2}$ f) $\Delta = \sqrt{-4p^3 + 27q^2}$

AL - 359 Să se calculeze determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$

a) $\Delta = 1$ b) $\Delta = -1$ c) $\Delta = 2$ d) $\Delta = 4$ e) $\Delta = 3$ f) $\Delta = 0$

AL - 360 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -x_1 & x_2 & -x_3 \\ x_1^2 & -x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației:

$x^3 + ax + b = 0$, a, $b \in \mathbf{R}$. Să se calculeze $\det\left(A \cdot {}^tA\right)$ în funcție de a şi b,

unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

a) $a^3 + b^2$ b) $-4a^3 - 27b^2$ c) $4a^3 + 27b^2$

d) $4a^3 - 27b^2$ e) $a^3 + b^2$ f) $-4a^3 + 27b^2$

AL - 361 Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y + 3z = 5 \\ 2x + y + \ z = 2 \end{cases}$.

a) (1,1,0) b) (1,-1,1) c) (-4,0,3)

d) (0,0,2) e) (1,0,0) f) (1,0,2)

AL - 362 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) x =1, y =2, z =3 b) x =2, y =1, z =1 c) x =3, y =2, z =2

d) x =1, y =1, z =4 e) x =1, y =3, z =2 f) x =1, y =7, z =6

AL - 363 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - y + 3z + t = -8 \\ 3x + y - z + 2t = -5 \\ 2x + 2y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

a) $x = -\dfrac{2z+3t+13}{4},\ y = \dfrac{10z+t+19}{4},\ z = z \in \mathbf{R},\ t = t \in \mathbf{R}$

b) $x = \dfrac{z+t+1}{3},\ y = \dfrac{2z+t+1}{3},\ z = z \in \mathbf{R},\ t = t \in \mathbf{R}$

c) $x = z + t,\ y = 2z + t,\ z = z \in \mathbf{R},\ t = t \in \mathbf{R}$

d) $x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2 + t,\ t = t \in \mathbf{R}$

e) $x = 2t + 1,\ y = 2t - 1,\ z = 2 - t,\ t = t \in \mathbf{R}$

f) $x = 2z + 1,\ y = z - 1,\ t = z,\ z = z \in \mathrm{R}$

AL - 364 Care sunt valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$ admite soluție unică ?

a) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,1\}$ b) $m \in \mathbf{R} \setminus \{2,-1\}$ c) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,-1\}$

d) $m \in \mathbf{R} \setminus \{2,1\}$ e) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2,2\}$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$

AL – 365 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x - 2y + z = m \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Să se determine parametrul real m pentru ca sistemul să fie incompatibil.

a) $m = 1,\ m = -2$; b) $m = 2,\ m = -2$; c) $m = -1,\ m = 0$;

d) $m = 3,\ m = 4$; e) $m = -3,\ m = 3$; f) $m = 0,\ m = -2$.

AL - 366 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$$

să fie compatibil.

a) 0 b) 1 c) 20

d) 23 e) 8 f) 21

AL - 367 Pentru ce valoare a parametrului real $m \in \mathbf{R}$ sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + 5y + 4z = 4 \\ x + 2y + z = m \end{cases}$$

este compatibil şi nedeterminat de ordinul întâi ?

a) m =-1 b) m =2 c) m =-2 d) m =1 e) m =-3 f) m=3

AL - 368 Să se determine la care din următoarele mulțimi aparțin parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} ax + ay + (a+1)z = b \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat.

a) $a \in (-1,1), b \in (0,1)$ b) $a \in (-1,1), b \in (-1,1)$

c) $a \in (1,90), b \in (-2,30)$ d) $a \in (0,32), b \in (-2,30)$

e) $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbf{R}$ f) $a \in (-1,3), b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

AL - 369 Să se determine valorile parametrilor reali a şi b pentru care sistemul $\begin{cases} x+2y-2z=-6 \\ 2x+\ y+bz=\ 4 \\ ax-\ y+\ z=\ 8 \end{cases}$ este incompatibil.

a) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \neq -1$

b) $\begin{cases} a=-\frac{1}{2},\ b \in \mathbf{R} \text{ sau} \\ a \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{4}{7}\right\},\ b=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a \neq -\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$

d) $a \neq \frac{1}{2}$ şi $b \in \mathbf{R}$

e) $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a=\frac{4}{7} \\ b=-1 \end{cases}$

AL - 370 Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x_1+\alpha x_2+2x_3=\ 1 \\ 2x_1+2x_2+\ x_3=-1 \\ x_1+\ x_2-\ x_3=\ \beta \end{cases}$,

să fie incompatibil.

a) $\alpha \neq 1, \beta \neq -2$

b) $\alpha = 1, \beta \neq -2$

c) $\alpha = 1, \beta = -2$

d) $\alpha = 1, \beta \neq 1$

e) $\alpha = \beta = -2$

f) $\alpha = 1, \beta \neq -6$

AL - 371 Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+by+\ z=\ 1 \\ bx+ay+bz=a \\ x+\ y+az=b \end{cases}$, $a,b \in \mathbf{R}$.

Să se determine valorile parametrilor $a,b \in \mathbf{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $a = 1$, $b = -2$

b) $a \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, $b = -2$

c) $a = -1$, $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

d) orice $a = b \in \mathbf{R}$

e) $a = 1$, $b \in \mathbf{R} \setminus \{1, -2\}$

f) $a = -1$, $b = 0$

AL - 372 Se consideră sistemul liniar $\begin{cases} mx + \ \ y - 2z = 2 \\ 2x + \ \ y + 3z = 1 \\ (2m-1)x + 2y + \ \ z = n \end{cases}$, $m,n \in \mathbf{R}$.

Pentru ce valori ale parametrilor m şi n sistemul este compatibil simplu nedeterminat?

a) $m=3$, $n\neq 3$ b) $m=3$, $n=3$ c) $m\neq 3$, $n=3$

d) $m\neq 3$, $n\neq 3$ e) $m=3$, $n=0$ f) $m=3$, $n=2$

AL - 373 Să se determine toate valorile parametrilor reali α, β, χ pentru care

sistemul: $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \alpha x + \ \ \beta y + \ \chi z = 1 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \chi^2 z = 1 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat.

a) $\alpha \neq \beta \neq \chi$ b) $\alpha = \beta \neq \chi$ c) $\alpha = \chi \neq \beta$

d) $\alpha \neq \beta = \chi \neq 1$ e) $\alpha = \beta = \chi = 1$ f) $\alpha = 1, \beta \neq 1, \chi = -1$

AL - 374 Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul liniar:

$\begin{cases} 3x + 2y + z - t = 2 \\ x + \alpha y - 2z + 3t = 1 \\ x + 4y + 5z - 7t = \beta \end{cases}$ să fie compatibil dublu nedeterminat.

a) $\alpha = -1, \beta = 2$ b) $\alpha = 0, \beta = 1$ c) $\alpha = 1, \beta = -1$

d) $\alpha = -1, \beta = 3$ e) $\alpha = -1, \beta = 0$ f) $\alpha = 2, \beta = 0$

AL - 375 Pentru ce valori ale lui $\lambda \in \mathbf{R}$ sistemul: $\begin{cases} -\ \ x + 2y + 2z + \ \ t = 1 \\ -2x + \ \ y + \ \ z + \ \ t = 0 \\ \ \ 5x - \ \ y - \ \ z - 2t = \lambda \end{cases}$

este compatibil ?

a) $\lambda = 2$ b) $\lambda = -1$ c) $\lambda = -2$ d) $\lambda = 3$ e) $\lambda = 1$ f) $\lambda = -3$

AL - 376 Să se determine parametrii reali *a*,*b*,*c* astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 2x-3y+\ 4z-5t= & 1 \\ x+9y+\ \ az+\ \ t= & -3 \\ 5x-6y+10z+bt= & c \end{cases}$$ să fie dublu nedeterminat.

a) $a = b = c = 2$ b) $a = 2$, $b = -12$, $c = -2$ c) $a = c = 2$, $b = -12$

d) $a = b = 2$, $c = -12$ e) $a = b = 2$, $c = 12$ f) $a = c = 2$, $b = 12$

AL - 377 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real *m* pentru care sistemul următor este compatibil

$$\begin{cases} x- & my+ & 1 & =0 \\ 2x+ & y- & m & =0\,. \\ 3x+(m-1)y+m-1 & & & =0 \end{cases}$$

a) $\{0,2\}$ b) $\varnothing$ c) $\{1,0\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$ f) $\{3,2\}$

AL - 378 Pentru ce valori ale lui *m* sistemul $\begin{cases} 2x+my+z=0 \\ 2x+\ 2y-z=0 \\ 2x-\ \ \ y+z=0 \end{cases}$ admite şi soluții diferite de soluția banală?

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in\varnothing$ c) $m = 0$ d) $m \neq 0$ e) $m = -1$ f) $m \neq -1$

AL - 379 Să se determine parametrul real α astfel încât sistemul omogen:

$$\begin{cases} x-y+z-t=0 \\ x+2y+z-4t=0 \\ x-y+\alpha z+\alpha t=0 \\ x+2y-z-2t=0 \end{cases}$$ să aibă soluții nenule.

a) $\alpha = 1$ b) $\alpha = -1$ c) $\alpha = 0$

d) $\alpha = 2$ e) $\alpha = 1$ sau $\alpha = -1$ f) $\alpha = -1$ sau $\alpha = 2$

AL - 380 Ce valori întregi pot lua parametrii p, q şi r astfel încât sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = px + qy + rz \\ \frac{1}{2}y = rx + py + qz \\ \frac{1}{2}z = qx + ry + pz \end{cases}$$ să admită soluții nenule ?

a) $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$ b) $p = -1$, $q = 0$, $r = 1$ c) p,q şi r pot lua orice valori întregi

d) p,q şi r nu pot lua nici o valoare întreagă pentru a satisface condiția cerută

e) $p = 1$, $q = 1$ şi r orice valoare întreagă f) $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$

AL - 381 Dacă $p = xyz$, unde (x, y, z) este o soluție a sistemului:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$$

atunci

a) $p \in \varnothing$; b) $p \in (-3,-2]$; c) $p \in (-2,-1]$;

d) $p \in (-1,0]$; e) $p \in (0,1]$; f) $p \in (1,2]$

AL – 382 Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ x - 2y + z = n \\ mx + y + z = 6 \end{cases} \quad (m, n \in \mathbf{R})$$

Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$, astfel ca sistemul dat să fie compatibil şi nedeterminat.

a) $m \neq -11$, $n \in \mathbf{R}$; b) $m = -11$, $n = -\frac{21}{2}$; c) $m = -11$, $n \in \mathbf{R}$

d) $m = -11$, $n \neq -\frac{21}{2}$; e) $m \in \mathbf{R}$, $n = -\frac{21}{2}$; f) $m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$.

AL – 383 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2ax + y + z = 0 \\ x + ay - z = -1 \\ x + 2ay + z = 1 \end{cases}, \quad \text{unde } a \in \mathbf{R}.$$

Fie S suma valorilor parametrului a pentru care sistemul este incompatibil. Stabiliți dacă :

a) $S = \frac{1}{2}$; b) $S = \frac{1}{6}$; c) $S = -\frac{1}{6}$;

d) $S = \frac{5}{3}$; e) $S = -\frac{3}{4}$; f) $S = -\frac{2}{3}$

AL – 384 Fie $A = \begin{pmatrix} a & a & o \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ şi sistemul $\left(A^3 - I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

a fiind un parametru real iar I_3 este matricea unitate de ordinul trei. Pentru ce valori ale lui a sistemul de mai sus admite soluție unică ?

a) $a \neq 1$ b) $a = 1$ c) $a \neq -2$

d) $a \neq 0$ e) $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ f) $a \neq 2$.

AL – 385 Să se determine parametrii $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

astfel încât sistemul $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha \beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

să aibă soluțiile $x = z = \lambda$, $y = -\frac{1}{2}(1 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

a) $\alpha = 2, \beta = 0$ b) $\alpha = -2, \beta = 2$ c) $\alpha = \beta = 1$

d) $\alpha = \beta = -2$ e) $\alpha = -2, \beta \in \mathbf{R}$ f) $\alpha \in \mathbf{R}, \beta = 0$

AL – 386 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

Să se determine mulțimile *A*, *B*, *C* cărora le aparțin valorile reale respectiv ale lui *a*, *b*,*c* pentru care sistemul are o infinitate de soluții, iar $x = 1$, $y = 3$ este una dintre soluții.

a) $A = [0,3]; \quad B = [-2,-1); \quad C = (0,3)$ b) $A = [0,3]; \quad B = [-1,0]; \quad C = (0,3)$

c) $A = (0,3); \quad B = (-2,-1); \quad C = (0,3)$ d) $A = (1,2]; \quad B = [-1,0]; \quad C = (1,2]$

e) $A = (1,3); \quad B = [-1,0]; \quad C = (1,2]$ f) $A = (2,4]; \quad B = [-1,0]; \quad C = [1,3)$

AL – 387 Se consideră sistemul liniar : $\begin{cases} x - ay + a^2 z = a^3 \\ x - by + b^2 z = b^3 \\ x - cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$

Care din următoarele condiții sunt satisfăcute de soluțiile x,y și z ale sistemului, pentru orice valori ale parametrilor $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ şi $a \neq b \neq c$?

a) $x < y < z$ b) $y < z < x$ c) $z^2, y^2 < x^2$

d) $27x \geq z^3,\ y < z^2$ e) $27x \leq z^3,\ y < z^2$ f) $z, x < y$

AL – 388 Să se determine toate valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ pentru care tripletele (x, y, z) corespunzătoare sunt soluții ale sistemului omogen

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 0 \\ 2x - (\lambda + 3)y - 2z = 0 \\ 3x - 7y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$:

a) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = 6k,\ y = -k,\ z = 5k)$ sau $(x = 6k,\ y = 2k,\ z = -k)$

b) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = 6k,\ y = -k,\ z = 5k)$ sau $(x = 6k,\ y = 2k,\ z = -k)$

c) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = 2k,\ y = k,\ z = -k)$ sau $(z = 2k,\ y = 3k,\ z = k)$

d) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = 2k,\ y = k,\ z = -k)$ sau $(x = 2k,\ y = 3k,\ z = k)$

e) $\lambda \in \{-5,4\}$, $(x = k,\ y = k,\ z = -2k)$ sau $(x = k,\ y = 3k,\ z = 2k)$

f) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-5,4\}$, $(x = k,\ y = k,\ z = -2k)$ sau $(x = k,\ y = 3k,\ z = 2k)$.

AL – 389 Fie $a,b \in \mathbf{R}$ și $\theta \in [0,2\pi)$. Să se afle varianta în care una sau alta dintre perechile (x,y) , prezentate alăturat , este soluție a sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta = a \cdot \sin\theta \\ x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta = a \cdot \cos\theta + b \\ ax \cdot \sin\theta + y \cdot (a\cos\theta + b) = 0 \end{cases}$$

a) $a \neq \pm b$, $(x = a + b,\ y = -b)$ sau $(x = a - b,\ y = -b)$

b) $a \neq \pm b$, $(x = a + b,\ y = 0)$ sau $(x = a - b,\ y = 0)$

c) $a \neq \pm b$, $(x = a + b,\ y = b)$ sau $(x = a - b,\ y = b)$

d) $a = \pm b$, $(x = a^2 + b^2,\ y = -b)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = -b)$

e) $a = \pm b$, $(x = a^2 + b^2,\ y = 0)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = 0)$

f) $a = \pm b$, $(x = a^2 + b^2,\ y = b)$ sau $(x = a^2 - b^2,\ y = b)$.

AL – 390 Se consideră sistemul:

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{m}{m^2-m+1}\right)x+\left(-1+\dfrac{m}{m^2-m+1}\right)y+\left(2+\dfrac{m}{m^2-m+1}\right)z=0\\ 3mx+(1+m)y+4mz=1\\ 2x+(1-m)y+3z=1\end{cases}$$

cu $x, y, z \in \mathbf{R}$ şi parametrul $m \in \mathbf{R}$.
Dacă $M = \{m \in \mathbf{R} \mid \text{ sistemul este incompatibil } \}$, să se calculeze $S = \sum_{m \in M} m^3$.

a) $S = \dfrac{7}{4}$ b) S=1 c) $S = \dfrac{9}{8}$

d) $S = -\dfrac{1}{8}$ e) $S = -\dfrac{9}{8}$ f) $S = \dfrac{8}{9}$

AL – 391 Să se determine produsul valorilor parametrului $\lambda \in \mathbf{R}$, valori pentru care sistemele de ecuații

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2\lambda y-2z=2\lambda-2 \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} 2x-y-3z=-3 \\ 3x+\lambda(\lambda+1)y-4z=\lambda-1 \end{cases}$$

sunt compatibile şi au aceleaşi soluții.

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

AL - 392 Se consideră funcțiile $f_i : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, definite prin

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = -x$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.

Care din următoarele afirmații relative la operația de compunere a funcțiilor este adevărată?

a) necomutativă şi neasociativă b) comutativă şi asociativă

c) necomutativă, dar asociativă d) comutativă, dar neasociativă

e) nu orice element are invers f) fără element neutru

AL - 393 Să se determine toate valorile parametrului $a \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $(-1,\infty)$ este partea stabilă în raport cu legea de compoziție

$$x * y = xy + x + y + a$$

a) $a \in \varnothing$ b) $a \le 0$ c) $a=0$

d) $a \ge 0$ e) $a=-1$ f) $a \ge -1$

AL - XII. 394 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : (1,\infty)x(1,\infty) \to (1,\infty)$, definită prin $f(x, y) = xy - (x + y) + \alpha$ să fie o lege de compoziție pe $(1,\infty)$.

a) $\alpha<0$ b) $\alpha>0$ c) $\alpha<1$

d) $\alpha\ge-1$ e) $\alpha<-2$ f) $\alpha\ge2$

AL - XII. 395 Pe **R** se consideră legea de compoziție internă „∗” definită astfel:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + m, \qquad m \in \mathbf{R}$$

Să se determine m astfel încât această lege să fie asociativă.

a) $m=1$ b) $m=2$ c) $m=3$

d) $m=4$ e) $m=-1$ f) $m=-2$

AL - 396 Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$”, definită prin

$$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21.$$

Când relația $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ este adevărată?

a) numai pentru x=y=z; b) pentru orice $x,y,z \in \mathbf{R}$;
c) numai pentru valori pozitive ale lui x,y,z; d) numai pentru x=y şi z=0;
e) numai pentru valori negative ale lui x,y,z;
f) numai pentru valori întregi ale lui x,y,z.

AL - 397 Mulțimea $K = \{e_0, e_1, ..., e_6\}$ cu $e_i \neq e_j$ dotată cu operațiile:

1) $e_i + e_j = e_k$ unde k=i+j dacă i+j≤6 şi
k=i+j-7 dacă i+j>6
2) $e_i e_j = e_k$ unde k este restul împărțirii lui i·j la 7 formează un corp.

Atunci ecuația $e_3 x + e_4 = e_6$ are soluția

a) e_0 b) e_1 c) e_3
d) e_4 e) e_5 f) e_6

AL - 398 În mulțimea $[0,+\infty)$ este definită legea de compoziție internă „*” definită prin

$$x * y = \frac{x^2 + y^2 + xy + x + y}{1 + x + y}.$$

Determinați elementul neutru al acestei legi.

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) 2 f) $1+\sqrt{2}$

AL - 399 Pe Z se defineşte legea de compoziție $*$ prin:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20, \quad \forall x, y \in \mathbf{Z}$$

Fie $A = \{x_k \in \mathbf{Z} \mid x_k \text{ este simetrizabil în raport cu legea } *\}, \alpha = \sum_{x_k \in A} x_k$

Să se precizeze care dintre afirmațiile următoare este adevărată.

a) α=3 b) α=5 c) α=8 d) α=0 e) α=10

AL - 400 Determinați elementele simetrizabile în raport cu înmulțirea claselor din $\mathbf{Z}_{20}$.

a) $\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{9}, \widehat{11}, \widehat{13}, \widehat{17}, \widehat{19},$

b) $\hat{1}, \hat{3}, 9, \hat{4}, \widehat{11}, \widehat{13}, \widehat{17}, \widehat{19},$

c) $\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}, \widehat{11}, \widehat{13}, \widehat{17}, \widehat{19},$

d) $\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{9}, \widehat{11},$

e) $\hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \widehat{17},$

f) $\varnothing$

AL - 401 Se definește pe **C** legea de compoziție

$$Z_1 * Z_2 = Z_1 Z_2 + i(Z_1 + Z_2) - 1 - i, \ \left(i = \sqrt{-1}\right).$$

Determinați soluția ecuației: $z * (1 - i) = 3 + i$.

a) $z = 3 + i$

b) $z = 2 + i$

c) $z = -5 + 2i$

d) $z = -3 + i$

e) $z = 3 - i$

f) $z = 2 - i$

AL - XII. 402 Fie $M = \{0,1,2,3\}$. Pe M se definește legea de compoziție:

$$(x, y) \to x * y = \begin{cases} |x - y| + 1, & x < y < 3 \\ \max\{x, y\}, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Să se rezolve ecuația $z * 2 = 2 \ (z \in M)$.

a) $z = 0, z = 1;$

b) $z = 1, z = 3;$

c) $z = 0, z = 2;$

d) $z = 1, z = 2;$

e) $z = 3, z = 2;$

f) $z = 0, z = 3;$

AL - 403 Pe mulțimea **R** se definesc legile de compoziție internă ”$*$” şi ”$\circ$” astfel: $(\forall)\ a,b\in\mathbf{R}: a*b=2a+2b+2ab+1,\ \ a\circ b=2a+2b+ab+2$.

Sistemul $\begin{cases}(x+y)*2=35\\(x-y)\circ 3=13\end{cases}$ are soluțiile :

a) $x=3,\ y=2$ b) $x=1,\ y=0$ c) $x=2,\ y=3$

d) $x=2,\ y=2$ e) $x=1,\ y=1$ f) $x=1,\ y=2$

AL - 404 Găsiți toate soluțiile din $\mathbf{R}_{12}$ ale sistemului de ecuații liniare $\begin{cases}3\otimes x\oplus 4\otimes y=11\\4\otimes x\oplus 9\otimes y=10\end{cases}$, unde $\otimes$ şi $\oplus$ sunt simbolurile înmulțirii şi adunării modulo 12.

a) $x=1,\ y=2$ b) $x=2,\ y=1$ c) $x=5,\ y=2$

d) $x=5,\ y=1$ e) $x=9,\ y=6$ f) $x=1,\ y=6$

AL – 405 Găsiți soluțiile din $\mathbf{R}_6$ ale ecuației:
$5\otimes x\oplus 2=4$ unde $\oplus$ şi $\otimes$ sunt simbolurile adunării şi înmulțirii modulo 6.

a) x=1 b) x=2 c) x=3

d) x=4 e) x=5 f) x=0

AL – 406 Pe mulțimea **R** definim două legi de compoziție internă „* „ şi „T „ prin:

$x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ şi $x\mathrm{T}y=x+y+1$ $(\forall)x,y\in\mathbf{R}$.

Indicați soluțiile (x,y) ale sistemului: $\begin{cases}x*y=-1\\x\mathrm{T}y=0\end{cases}$

a) (0,1);(2,0) b) (2,0); (-1,1) c) (0,-1); (-1,0)

d) (-2,1); (1,2) e)(0,3); (3,0) f) (2,1); (-1,1)

AL - 407 În mulțimea $\mathbf{Q}_+$ se definește operația $x * y$ astfel încât $(\forall)x, y, z, t \in \mathbf{Q}_+$, să avem:

1) $(x * y)(z * t) = (xz) * (yt)$
2) $x * x = 1$
3) $x * 1 = x$

Care din răspunsurile de mai jos ne dă $12 * 3$?

a) 36 | b) 4 | c) 15
d) 9 | e) 0,25 | f) 0,15

AL – 408 Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = \ln\left(e^x + e^y\right)$; precizați mulțimea soluțiilor ecuației $(x * x) * x = 0$

a) $\left\{\ln\sqrt{3}, \ln\frac{1}{3}\right\}$ | b) $\left\{\ln\frac{1}{3}, -\ln\frac{1}{3}\right\}$ | c) $\left\{-\ln\sqrt{3}\right\}$

d) $\left\{-\ln\frac{1}{3}\right\}$ | e) $\{-\ln 3\}$ | f) $\{\ln 3\}$

AL - 409 Pe mulțimea $\mathbf{R}$ definim legea de compoziție

$$x * y = 2x + y, (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

și notăm $x_{n+1} = x_n * x$; $x_1 = x$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

Să se determine numărul natural $n \geq 2$ pentru care $x_{2n} = 8(x_n - x) - x, (\forall)x \in \mathbf{R}$

a) $n \geq 2$ | b) $n \in \phi$ | c) $n = 6$
d) $n = 4$ | e) $n = 2$ | f) nici un răspuns nu e corect

AL - 410 Fie $a \in \mathbf{Z}$ şi $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ f(x) = x + a$. Cum sunt definite legile de compoziție pe **Z** notate „⊥” şi „T” dacă

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y), \quad (\forall) x, y \in \mathbf{Z}$$

şi $$f(xy) = f(x) \top f(y), \quad (\forall) x, y \in \mathbf{Z} \ ?$$

a) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y \\ x \top y = xy - ax - ay + a^2 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy + ax + ay \end{array}$

c) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 + a \end{array}$

d) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y - a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 + a \end{array}$

e) $\begin{array}{l} x \perp y = x + y + a \\ x \top y = xy - ax - ay - a^2 - a \end{array}$

f) nici un răspuns nu e corect

AL - 411 Pe **R** se defineşte legea de compoziție „∗” : $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$(x, y) \to x * y = x^2 + y^2 - 4x - 4y + m$, unde $m \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile $m \in \mathbf{R}$ pentru care intervalul $(0,\infty)$ este parte stabilă a lui **R** în raport cu legea considerată?

a) $m < -8$ b) $m \in \{-8, 0, 8\}$ c) $m \in (-8, 0)$

d) $m \in \emptyset$ e) $m > 8$ f) $m < 8$

AL - 412 Fie mulțimea

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbf{R})\ ;$$

să se determine submulțimea maximală a lui K ce este parte stabilă a mulțimii $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

f) K

AL - 413 Pe mulțimea $A = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziție „*” definită prin:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + c, \quad (\forall) x, y \in A, \quad c \in \mathbf{R}$$

Pentru ce valoare a lui c legea „*” este asociativă?

a) c=1 b) c=-1 c) c=3
d) c=2 e) c=4 f) c=6

AL - 414 Pe mulțimea (0,∞) se consideră legea de compoziție „*” definită prin $x * y = e^{a \ln x - b \ln y}$, oricare ar fi $x, y > 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$.
Precizați în ce condiții legea considerată este asociativă şi comutativă.

a) $a = 1, b = -1$ b) pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ cu proprietatea $a + b = -1$
c) $a = -1, b = 1$ d) $a = 1, b = 1$
e) nu există $a, b \in \mathbf{R}^*$ cu proprietatea cerută f) nici un răspuns nu e corect

AL - 415 Fie legea de compoziție internă pe **R** definită prin $x * y = xy + 2\alpha x + \beta y \quad (\forall) x, y \in \mathbf{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Care sunt valorile lui α şi β pentru care legea este comutativă şi asociativă ?

a) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 1$ b) $\alpha + \beta = 1$
c) $\alpha = \beta = 0$ sau $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\beta = 2$ d) $\alpha = \beta = 1$
e) $\alpha = \beta = -1$ f) $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$

AL - 416 Fie operația „*” cu numere reale, definită astfel: $a * b = ma + nb + p \quad (\forall) a, b \in \mathbf{R}$. Sistemele de constante m,n,p pentru care operația $*$ este asociativă şi necomutativă sunt:

a) (1,0,0); (0,1,0) b) (1,1,0); (0,1,0) c) (1,1,1); (0,1,0)

d) (1,0,0); (1,1,0) e) (1,0,0); (1,1,1) f) (1,1,1); (1,1,0)

AL - 417 În mulțimea numerelor reale, se definesc operațiile : $\top$ şi $\perp$ prin relațiile :

$$\begin{aligned} a \top b &= a + ab + b \\ a \perp b &= a - ab + b \end{aligned} \qquad (\forall) a, b \in \mathbf{R}$$

Operațiile au același element neutru e. Expresia

$$\left(a \top \frac{1}{a}\right) \cdot \left(a \perp \frac{1}{a}\right) - (e \top 1) \perp (e \perp 1)$$ are valoarea

a) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ b) a^2 c) $\frac{1}{a^2}$

d) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ e) $-a^2$ f) $-\frac{1}{a^2}$

AL - 418 În mulțimea **R** este definită legea de compoziție internă „∗" astfel încât $(\forall) x, y \in \mathbf{R}: \quad x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$ cu $xy \neq 1$.

Elementul neutru e, admis de lege este:

a) 0 b) 1 c) –1
d) 2 e) –2 f) 3

AL – 419 Pe **R** se defineşte legea de compoziție „∗" prin $x * y = axy - x - y + 2$, unde $a \in \mathbf{R}$. Pentru ce valori ale lui a legea considerată admite element neutru?

a) $a = -1$ b) 0 c) $a = 1$

d) $a = \frac{1}{2}$ e) $a = -\frac{1}{2}$ f) $a = \frac{3}{2}$

AL – 420 Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție bijectivă cu $f^{-1}(1) = 2$. Definim legea de compoziție „∗" pe **R** prin

$$a * b = f\left[f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - 2\right],$$ pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$.

Care este elementul neutru al acestei legi?

a) nu are b) 1 c) 2

d) 0 e) –1 f) –2

AL – 421 Pe mulțimea $(1,\infty)$ se defineşte legea de compoziție $x*y=(x-1)^{\ln(y-1)}+1$. Determinați elementul său neutru.

a) $\varepsilon=1+e$ b) $\varepsilon=1-e$ c) $\varepsilon=-1+e$
d) $\varepsilon=3-e$ e) $\varepsilon=3+e$ f) $\varepsilon=-3+2e$

AL – 422 Pe mulțimea **R** se definesc legile de compoziție $*$ şi $\circ$, $a*b=a+ab+b$ şi $a\circ b=a-ab+b$, care admit acelaşi element neutru, e.
Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care există inegalitatea

$$\left(a*\frac{1}{a}\right)\left(a\circ\frac{1}{a}\right)>(e*1)\circ(e\circ1)$$

a) $a\in\{-3,-2,-1,1,2,3\}$; b) $a\in\phi$ c) $a\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$;
d) $a\in R\bigcap[(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)]$; e) $a\in\mathbf{R}$ f) $a\in\mathbf{R}\setminus\{-2,-1,0,1,2\}$

AL – 423 Ce relații trebuie să existe între a,b şi c pentru ca operația $*$, definită pe mulțimea **Z** a numerelor întregi prin $x*y=axy+b(x+y)+c$, să admită element neutru?

a) $b^2-4ac=0$ b) $b^2-ac=0$ şi b divide pe a;
c) $b^2-ac=b$ şi b divide pe c; d) a divide pe b şi $b^2-ac=b$
e) c divide pe b şi $b^2-ac=2b$ f) c divide pe b şi $b^2-ac=b$

AL – 424 Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ astfel încât matricea $A_x=\begin{pmatrix}2 & x & 1\\ x & \alpha & x\\ 1 & x & 2\end{pmatrix}$ să fie un element simetrizabil al monoidului $(M_3(\mathbf{R}),\ \cdot)$ pentru orice x >1.

a) $\alpha>1$ b) $\alpha=1$ c) $\frac{2}{3}<\alpha\le\frac{3}{2}$
d) $\alpha>\frac{3}{2}$ e) $\alpha\le\frac{2}{3}$ f) $\alpha\in\mathbf{R}^*$

AL - 425 Fie mulțimea $G=\left\{X^n \middle| X=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}^*\right\}$

Care este simetricul elementului X^{1997} în raport cu operația indusă pe G de înmulțirea matricelor?

a) X b) $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$

d) I_4 e) $\begin{pmatrix}1997&0&0&0\\0&1997&0&0\\0&0&1997&0\\0&0&0&1997\end{pmatrix}$ f) nici un răspuns nu e corect

AL - 426 Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&a\\0&0&0\\a&0&a\end{pmatrix}, a\in\mathbf{C}\right\}$

Care este simetricul elementului $A=\begin{pmatrix}\frac{i}{4}&0&\frac{i}{4}\\0&0&0\\\frac{i}{4}&0&\frac{i}{4}\end{pmatrix}$ în raport cu legea de compoziție indusă pe M de înmulțirea matricelor?

a) $\begin{pmatrix}4&0&4\\0&0&0\\4&0&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\0&0&0\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}i&0&i\\0&0&0\\i&0&i\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-i&0&-i\\0&0&0\\-i&0&-i\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

AL - 427 În corpul $(\mathbf{R},+,\cdot)$ se introduce legea de compoziție:

$$x * y = ax + ay + bxy + c,\ (\forall)x, y \in \mathbf{R} \text{ şi } a,b,c \in \mathbf{R}.$$

Ştiind că elementul său neutru este e = - 4 şi că orice element cu excepția lui –5, admite un simetric, să se determine constantele *a,b,c*.

a) $a=b=c=1$ b) $a=b=1,\ c\in\mathbf{R}$ c) $a=5,\ b=1,\ c=20$

d) $a=3,\ b=2,\ c=0$ e) $a=1,\ b=4,\ c=2$ f) $a=b=2,\ c=40$

AL - 428 Determinați elementul neutru al operației $*$ definită în $\mathbf{R}^2$ prin

$$(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1x_2 + x_1 + x_2, y_1y_2 + y_1 + y_2)$$

a) (1,0) b) (0,1) c) (1,1)

d) (0,0) e) (-1,-1) f) (0,-1)

AL – 429 Pe mulțimea **R** a numerelor reale definim legea de compoziție *, astfel:

$x * y = \frac{1}{3}(x + y - 2xy + 1)$, oricare ar fi x,y $\in\mathbf{R}$.

Să se determine elementele simetrizabile şi simetricul fiecăruia dintre acestea.

a) $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\},\quad x' = \frac{x+3}{x-1}$; b) $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\},\quad x' = \frac{2x+1}{x+1}$

c) $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},\quad x' = \frac{x-2}{2x-1}$; d) $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},\quad x' = \frac{x+4}{2x-1}$;

e) $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\},\quad x' = \frac{x-5}{3x-1}$; f) $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\},\quad x' = \frac{x}{x-1}$

AL – 430 Pentru fiecare n $\in \mathbf{N}^*$ se defineşte funcția

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\quad f_n(x) = \begin{cases} nx, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Care este simetricul elementului f_{2001} față de compunerea funcțiilor ?

a) f_1 b) nu există c) f_{2000} d) f_{2002} e) f_{1000} f) f_{1001}

AL – 431 Se consideră mulțimea $M=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbf{Z}\}$ înzestrată cu operația de înmulțire indusă din $\mathbf{R}$.

Care este condiția suficientă pentru ca elementul $x=a+b\sqrt{2}$ să admită un invers în mulțimea M ?

a) Nu există un invers al lui x în M. b) $a^2-2b^2\neq 0$ c) $a^2-2b^2=\pm 1$

d) $a^2-2b^2=2$ e) $a^2-2b^2=-2$ f) $a^2-2b^2=0$

AL - 432 Fie $E=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Pentru orice $t\in\mathbf{R}$, fie funcția $f_t:E\to E$, $f_t(x,y)=\left(x+ty+\frac{t^2}{2},y+t\right),(\forall)(x,y)\in E$ și mulțimea $G=\{\,f_t \mid t\in\mathbf{R}\}$ înzestrată cu operația de compunere a funcțiilor. Care este simetricul elementului f_{-1} ?

a) $g(x,y)=(x,y)$ b) $g(x,y)=(y,x)$

c) $g(x,y)=(x+y,\ y-1)$ d) $g(x,y)=\left(x-y+\frac{1}{2},\ y-\frac{1}{2}\right)$

e) $g(x,y)=\left(x+y+\frac{1}{2},\ y+1\right)$ f) $g(x,y)=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{1}{8},\ y+\frac{1}{2}\right)$

AL - 433 Să se determine elementul neutru al grupului comutativ $(G,*)$, unde $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$ iar $x*y=x^{\ln y}$

a) 1 b) e c) 0 d) 2 e) $\frac{1}{e}$ f) e^2

AL - 434 Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziție

$$x*y=ax+by,\quad (\forall)x,y\in\mathbf{R}$$

unde a şi b sunt parametri reali. Legea „∗” defineşte pe R o structură de grup pentru:

a) a=1, b=0 b) a=0, b=3; c) a=0, b=1;

d) a=1, b=1; e) a=b=$\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$; f) a=b=2

AL - 435 Pe **Z** se defineşte legea de compoziție

$$(x, y) \to x * y = x + y + k,$$

unde $k \in \mathbf{Z}$. Să se determine toate valorile lui k pentru care (**Z**, $*$) este grup.

a) $k \in \mathbf{Z}$; b) k=-1; c) k=0;
d) $k \in \varnothing$; e) $k \in \{-1,1\}$; f) $k \in \{-1,0\}$

AL - 436 Determinați mulțimea $A \subset \mathbf{R}$ astfel ca legea de compoziție

$$x * y = xy - x - y + 2$$

să determine o structură de grup pe **R**\ A.

a) A=**R** b) $A=\{0\}$ c) $A=\{0,1\}$
d) $A=\varnothing$ e) $A=\{1\}$ f) $A=\{2\}$

AL - 437 Ce structură algebrică defineşte pe **R** şi ce element neutru, respectiv inversabil admite pe **R** legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, $x, y \in \mathbf{R}$?

a) grup comutativ; 0; -x b) grup; 0; -x c) grup; -x;0
d) grup comutativ; -x; 0 e) grup; 0;1 f) grup; 0; -1.

AL - 438 Pentru ce valori ale parametrului real λ intervalul $(2,+\infty)$ este monoid în raport cu legea de compoziție definită pe **R** prin :

$$x * y = xy - 2x - 2y + \lambda,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}\ ?$$

a) $\lambda \in (-\infty, 6)$ b) $\lambda \in (6, +\infty)$ c) $\lambda = 6$
d) $\lambda = 0$ e) $\lambda \in (0, +\infty)$ f) $\lambda \in (-\infty, 0)$

AL - 439 În mulțimea **R** a numerelor reale se consideră legea de compoziție ''$\oplus$'' definită prin : $x \oplus y = ax + by - 1$, $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$. Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât această lege de compoziție să determine pe **R** o structură de grup abelian.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 2, b = -1$ c) $a = b = 1$
d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = 0, b = 1$

AL - 440 Fie **R** mulțimea numerelor reale înzestrate cu legea de compoziție internă definită prin : $x*y=ax+by+c,\ a,b,c\in\mathbf{R}$ şi $ab\neq 0$. Precizați valorile lui a, b, c pentru care $(\mathbf{R},*)$ este un grup cu elementul neutru $e=1991$.

a) $a=-1, b=-1, c=1991$ b) $a=1, b=1, c=-1991$ c) $a=-1, b=-1, c=-1991$

d) $a=1, b=1, c=1991$ e) $a=b, c=1991$ f) $a=b=2, c=-1991$

AL - 441 Se consideră grupul abelian $(\mathbf{R},*)$ cu legea de compoziție :

$x*y=\left(\sqrt[k]{x}+\sqrt[k]{y}-\sqrt[k]{a}\right)^k$, unde $a\in\mathbf{R}$ este un număr fixat , iar k este impar şi $k\geq 3$.
Care este elementul neutru şi care este simetricul elementului $x\in\mathbf{R}$ în raport cu legea considerată ?

a) $a;\left(\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{x}\right)^k$ b) $a;\left(\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{x}\right)^k$ c) $a;\left(2\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{x}\right)^k$

d) $1;\left(\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{x}\right)^k$ e) $1;\left(\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{x}\right)^k$ f) $1;\left(2\sqrt[k]{a}-\sqrt[k]{x}\right)^k$

AL - XII. 442 Se defineşte pe **C** legea ''$*$'' : $z_1*z_2=z_1\cdot z_2+i\left(z_1+z_2\right)-1-i$.
Să se determine elementul neutru e , elementele simetrizabile şi să se determine $\alpha\in\mathbf{C}$, astfel încât $\left(\mathbf{C}\setminus\{\alpha\},*\right)$ să fie grup abelian.

a) $e=1-i$; $z'=\dfrac{2+iz}{z-1}$; $\alpha=i$ b) $e=1$; $z'=\dfrac{1-z}{z+i}$; $\alpha=-1$

c) $e=1+i$; $z'=\dfrac{1+z}{2z-i}$; $\alpha=2$ d) $e=-i$; $z'=\dfrac{zi+z}{z-1}$; $\alpha=-2$

e) $e=2+i$; $z'=\dfrac{1}{z}$; $\alpha=2$ f) $e=1-i$; $z'=\dfrac{2-iz}{z+i}$; $\alpha=-i$

AL - 443 Să se determine partea mulțimii **Z** pe care legea de compoziție definită prin : $x*y=x+y+xy,\ (\forall)x,y\in\mathbf{Z}$ determină o structură de grup abelian propriu.

a) $\mathbf{Z}$ b) $\mathbf{Z}\setminus\{1\}$ c) $\mathbf{Z}\setminus\{-1\}$ d) $\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ e) $\{-2,0\}$ f) $\{0\}$

AL – 444 Care este ordinul elementului $\hat{25}$ al grupului abelian $(\mathbf{Z}_{120},+)$?

a) 20; b) 21 c) 22 d) 23 e) 24 f) 25

AL – 445 Se consideră mulțimea $G=(-1,\infty)$ şi legea de compoziție

$$x*y=xy+ax+by,\quad (\forall)x,y\in G\ (a,b\in\mathbf{R}).$$

Să se determine valorile lui a şi b pentru care $(G,*)$ este grup abelian.

a) a = 1, b = 0 b) a = b = 1 c) a = 1, b = -1
d) a = b = -1 e) a = b = 0 f) a = 0, b = 1

AL – 446 Fie mulțimea $M=R\setminus\{-1\}$ pe care se dă legea " * " definită astfel :

$$x*y=a(x^2+y^2)+2xy+2(m^2-3)x+2y+m-1,\quad (\forall)\,x,y\in M,$$

unde a şi m sunt constante reale. Să se determine $a,m\in\mathbf{R}$, astfel ca $(M,*)$ să fie grup.

a) a = 0, m = -1; b) a = 0, $m=-\frac{3}{2}$; c) a = 0, m = 2;
d) $a\in\mathbf{R}$, m = 2; e) $a\in\mathbf{R}$, m = -1; f) $a\in\mathbf{R}$, $m\in\mathbf{R}$

AL – 447 Se consideră grupul $(\mathbf{Z}_6,+)$
Care este numărul subgrupurilor (H,+) ale acestuia, diferite de grupul dat ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL – 448 Fie x şi y elemente distincte ale unui grup multiplicativ cu elementul neutru e, care satisfac relațiile:

$$x^2=y^6=e,\quad xy=y^4x.$$

Care dintre elementele menționate mai jos este egal cu y^3 ?

a) x ; b) xy ; c) y ; d) e ; e) y^2 ; f) xy^2 .

AL - 449 Fie grupul ($\mathbf{R}$, $*$) unde legea de compoziție ''$*$'' este definită prin : $x*y=x+y+axy$, pentru orice $x,y\in\mathbf{R}$, unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât intervalul $(-1,+\infty)$ să fie subgrup al grupului $\left(\mathbf{R}\setminus\{-1\},*\right)$.

a) $a=0$ b) $a=1$ c) $a=-1$ d) $a\in\varnothing$ e) $a\in(-\infty,-1)$ f) $a\in(1,+\infty)$

AL - 450 Fie $M=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$. Să se determine $m,a,b\in\mathbf{R}^*$ astfel ca legea $x*y=2xy-3x-3y+m$ să determine pe M o structură de grup abelian , iar aplicația $f:(M,*)\to\left(\mathbf{R}^*,\bullet\right)$, $f(x)=ax+b$ să fie un izomorfism între ($M,*$) şi grupul multiplicativ al numerelor reale, diferite de zero.

a) $m=6$; $a=2$; $b=-3$ b) $m=6$; $a=1$; $b=2$ c) $m=5$; $a=-1$; $b=1$
d) $m=2$; $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{1}{2}$ e) $m=-3$; $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{2}{3}$ f) $m=3$; $a=3$; $b=-4$

AL - 451 Considerăm mulțimea $F(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\, f:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \mid f \text{ este bijecție}\}$ înzestrată cu structură de grup față de operația de compunere a funcțiilor. Dacă $\varphi:(\mathbf{Z},+)\to\left(F(\mathbf{R},\mathbf{R}),\circ\right)$ este un morfism de grupuri astfel încât $\varphi(1)=f$, unde $f(x)=x^3-5,(\forall)x\in\mathbf{R}$, să se determine funcția $g=\varphi(2)$.

a) $x^9-15x^6+75x^3-130$ b) $x^9+15x^6-75x^3-130$ c) x^8-3x^6+3x-5
d) x^8+3x^6-3x-5 e) $x^6-9x^4+15x^2+1$ f) $x^6+9x^4-15x^2+1$

AL - 452 Fie grupurile $(\mathbf{R},+)$ şi $\left((0,+\infty),\cdot\right)$. În ce condiții funcția $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=e^{\alpha x+\sqrt{\alpha^2-11}-\sqrt{\alpha^2-20}-1}$, $\alpha\in\mathbf{N}$, $\alpha\geq 5$ este un izomorfism de grupuri ?

a) $\alpha=5$ b) $\alpha\in\varnothing$ c) $\alpha=8$ d) $\alpha=6$ e) $\alpha=7$ f) $\alpha=9$

AL - 453 Se consideră grupul $(M_3(\mathbf{R}),+)$ şi $A=\begin{pmatrix} 11 & \lambda & 13 \\ 121 & \lambda^2 & 169 \\ 1331 & \lambda^3 & 2197 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

Să se determine $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția :
$f{:}M_3(\mathbf{R}) \to M_3(\mathbf{R}), f(X) = AX, (\forall) X \in M_3(\mathbf{R})$ să fie un automorfism.

a) $\lambda = 0$ b) $\lambda = 12$ c) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{12\}$
d) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0, 11, 13\}$ e) $\lambda = 11$ şi $\lambda = 13$ f) $\lambda \in \varnothing$

AL - 454 Fie grupul (A , +) unde $A = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ şi ’’+’’ este legea de compoziție definită prin :

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), (\forall)(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in A.$$

Pentru ce $m \in \mathbf{R}$ funcția $f{:}A \to A$ cu

$$f(x_1, x_2, x_3) = (mx_1 + x_2 + x_3, x_1 + mx_2 + x_3, x_1 + x_2 + mx_3)$$

este un automorfism al grupului (A , +) ?

a) $m = \pm 1$ b) $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ c) $m \in \{-1, 3\}$

d) $m = -2$ e) $m \in \varnothing$ f) $m \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}$

AL - 455 Fie $G = (2, +\infty)$ care are o structură de grup față de operația ’’$*$’’ definită prin : $x * y = xy - 2(x + y) + 6$, $(\forall) x, y \in G$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbf{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$, să realizeze un izomorfism de la grupul $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

a) $a = 0, b = 2$ b) $a = 1, b = 2$ c) $a = 0, b = 3$

d) $a = 1, b = 3$ e) $a = b = 1$ f) $a = -1, b = 2$

AL – 456 Fie **Z** mulțimea numerelor întregi. Se ştie că mulțimile $(\mathbf{Z},*)$ şi $(\mathbf{Z},\circ)$ au structură de grup în raport cu operațiile definite prin egalitățile :

$$x*y=x+y+1,\quad x\circ y=x+y-1.$$

Să se determine $a,b\in$ **Z** astfel încât funcția $f(x)=ax+b$, $f:(\mathbf{Z},*)\to(\mathbf{Z},\circ)$ să fie un izomorfism de grupuri, cu condiția $a+b=3$

a) $a = 1, b = 2$ b) $a = 2, b = 1$ c) $a = 3, b = 0$
d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -1, b = 4$ f) $a = 4, b = -1$.

AL – 457 Se consideră legea de compoziție

$$x*y=\frac{3xy-4x-4y+6}{2xy-3x-3y+5}$$, care determină pe intervalul (1,2) o structură de grup comutativ. Precizați valoarea parametrului m, astfel încât între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul menționat mai sus să existe un izomorfism

$f:(0,\infty)\to(1,2)$ de forma $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$.

a) $m = 2$; b) $m = 1$; c) $m = -1$;
d) $m = -2$; e) $m = 3$; f) $m = -3$.

AL – 458 Fie (G, ·) grupul multiplicativ al matricelor de forma

$$X=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ (a,b,c\in\mathbf{R}).$$

Să se determine printre subgrupurile sale comutative subgrupul izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale, (**R**, +) .

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

AL - 459 Fie (I,+,·) un inel cu proprietatea : $x^2 = x,\ (\forall)x \in \mathrm{I}$. Să se precizeze care din următoarele afirmații rezultă din proprietatea menționată :

a) inelul I este necomutativ şi $x^4 = -x, (\forall)x \in \mathrm{I}$
b) inelul I este necomutativ şi $x = -x, (\forall)x \in \mathrm{I}$
c) inelul I este comutativ şi $x = -x, (\forall)x \in \mathrm{I}$
d) inelul I este necomutativ
e) inelul I este necomutativ şi $x = -x^3, (\forall)x \in \mathrm{I}$
f) inelul I este comutativ şi $x^5 = 2x$

AL - 460 Fie ($A, +, \cdot$) un inel pentru care 1 + 1 = 0 (0 şi 1 fiind elementele neutre ale inelului). Să se exprime $(x+1)^5$ ca sumă de puteri ale lui $x \in A$.

a) $x^5 + 1$ b) $x^5 + x$ c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$
d) $x^5 + x^4 + x + 1$ e) $x^5 + x^3 + x + 1$ f) $x^5 + x^4 + x^2 + 1$

AL – 461 Pe mulțimea **Z** se definesc legile de compoziție "$\oplus$" şi "$\otimes$" prin :
$x \oplus y = x + y - 3$ şi $x \otimes y = xy - 3(x + y) + 12$, $(\forall)x, y \in \mathbf{Z}$.
Care din următoarele afirmații este adevărată ?
a) $(\mathbf{Z},\oplus)$ şi $(\mathbf{Z},\otimes)$ sunt grupuri abeliene
b) $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este inel necomutativ
c) $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero
d) $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero
e) $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este corp necomutativ
f) $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ este corp comutativ.

AL – 462 Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pe mulțimea **R** se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = ax + by - 2$$
$$x \top y = xy - 2x - 2y + c, \quad (\forall)x, y \in \mathbf{R}$$

Să se determine *a*,*b* şi *c* astfel încât $(\mathbf{R}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 1$ b) $a = b = c = 6$ c) $a = b = 1,\ c = 6$
d) $a = b = c = 3$ e) $a = b = c = 2$ f) $a = b = 1,\ c = 2$.

AL - 463 Fie $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{Z}\}$. Să se determine $a\in\mathbf{Z}$ pentru care operațiile

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \quad \text{şi}$$
$$(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=(x_1y_2+y_1x_2,ay_1y_2)$$

determină pe $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ o structură de inel cu elementul unitate e=(0,1). În acest caz să se determine divizorii lui zero dacă există.

a) a=1; nu există b) a=1; $(x,0)$, $x\in\mathbf{Z}^*$ c) a=0; $(x,0)$, $x\in\mathbf{Z}^*$
d) $(\forall)a\in\mathbf{Z}$; nu există e) $\forall a\in\mathbf{Z}$; (0,y), $y\in\mathbf{Z}^*$ f) $(\forall)a\in\mathbf{Z}$;$(x,0)$, $x\in\mathbf{Z}^*$

AL - 464 Pe mulțimea $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ a tuturor perechilor ordonate de numere reale, z = (x,y) , se definesc operațiile

$$z\top z'=(x,y)\top(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$z\perp z'=(x,y)\perp(x',y')=(xx',xy'+x'y)$$

Care este structura definită de aceste operații pe mulțimea $\mathbf{R}^2$?

a) inel necomutativ b) inel comutativ c) $(\mathbf{R}^2,\perp)$grup necomutativ
d) corp necomutativ e) corp comutativ f) $(\mathbf{R}^2,\perp)$ este grup comutativ

AL – 465 Fie inelul $(\mathbf{Z},\oplus,\circ)$ unde legile de compoziție sunt definite prin

$$x\oplus y=x+y-p;\quad x\circ y=xy-px-py+p^2+p,\quad p\in\mathbf{Z}^*.$$

Să se stabilească dacă inelul are sau nu divizori ai lui zero. În caz afirmativ să se determine divizorii lui zero.

a) Da; $2p$, p-1; b) Nu; c) Da; p, p;
d) Da; 0, p+1; e) Da; $2p$,p; f) Da; $2p$, p+1.

AL – 466 Fie inelul $(\mathbf{Z},\oplus,\otimes)$ unde:

$$x\oplus y=x+y+2 \quad \text{şi} \quad x\otimes y=xy+2x+2y+2$$

Să se determine divizorii lui zero în acest inel.

a) $\{-2,2\}$; b) $\{0,-1\}$; c) $\{-2,-4\}$; d) $\{2,4\}$; e) nu există ;
f) inelul are o infinitate de divizori ai lui zero.

AL – 467 Fie inelul $(\mathbf{Z},*,\circ)$ unde $x*y=x+y+3$ şi $x\circ y=xy+3x+3y+6$ $(\forall)x,y\in\mathbf{Z}$. Să se determine numărul $\alpha=\sum_{a\in A}a$, (A fiind mulţimea elementelor inversabile din inel) şi mulţimea B a divizorilor lui zero.

a) $\alpha=2$, $B=\{-1,1\}$ b) $\alpha=-4$, $B=\phi$ c) $\alpha=6$, $B=\phi$

d) $\alpha=-6$, $B=\phi$ e) $\alpha=4$, $B=\{-3,3\}$ f) $\alpha=3$, $B=\{-2,-4\}$

AL – 468 Pe **Z** definim legile de compoziţie :

$$x\otimes y=x+y-4 \quad \text{şi} \quad x*y=xy-4x-4y+20,\quad (\forall)x,y\in\mathbf{Z}.$$

Stabiliţi mulţimea divizorilor lui 0 din inelul $(\mathbf{Z},\otimes,*)$.

a) $\varnothing$; b) $\{2k\mid k\in\mathbf{Z}\}$; c) $\{3k\mid k\in\mathbf{Z}\}$;

d) $\{2k+1\mid k\in\mathbf{Z}\}$; e) $\{3k+1\mid k\in\mathbf{Z}\}$; f) $\{3k+2\mid k\in\mathbf{Z}\}$.

AL – 469 Fie $\hat{S}_1$ suma elementelor neinversabile ale inelului $(Z_{12},+,\cdot)$, $\hat{S}_2$ suma elementelor inelului şi $A\in M_3(Z_{12})$, unde $A=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{S}_1 & \hat{S}_2+11\\ \hat{S}_1 & \hat{1} & \hat{S}_1\\ \hat{S}_2+\hat{1} & \hat{S}_1 & \hat{1}\end{pmatrix}$.

Atunci:

a) rang A=1; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ b) rang A=1; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

c) rang A=2; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ d) rang A=2; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

e) rang A=3; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{0}$ f) rang A=3; $\hat{S}_1\hat{S}_2=\hat{3}$

AL - 470 Legile $x \oplus y = x + y - 4$ şi $x \otimes y = xy - 4x - 4y + 20$ determină pe **R** o structură de corp comutativ. Să se determine elementele neutre ale corpului faţă de cele două legi.

a) 4, 5 b) 0, 1 c) 2, 0 d) 1, 1 e) 0, 0 f) 1, 1

AL - 471 Fie $k \in \mathbf{Z}$ şi mulţimea $M_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ care în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor are o structură de inel comutativ. Pentru care din următoarele valori ale lui *k* inelul are divizori ai lui zero ?

a) $k = 2$ b) $k = 3$ c) $k = 4$ d) $k = 5$ e) $k = 6$ f) $k = 7$

AL - 472 Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Pe **R** definim legile de compoziţie ''$\perp$'' şi ''T'' prin: $x \perp y = ax + by - 2,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}$ şi $x \mathrm{T} y = xy - 2x - 2y + c,\ (\forall) x, y \in \mathbf{R}$.
Care sunt valorile *a*, *b*, *c* astfel încât (**R** , $\perp$, T) să fie corp ?

a) $a = 0, b = 0, c = 3$ b) $a = 1, b = 1, c = 6$ c) $a = 0, b = 1, c = 6$
d) $a = 1, b = 1, c = 3$ e) $a = 1, b = 1, c = -3$ f) $a = 1, b = 0, c = 6$

AL - 473 Fie *K* un corp comutativ cu proprietatea că există un cel mai mic număr $n \in \mathbf{N}^*$ astfel ca $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ ori}} = 0$ (0 şi 1 sunt elementele neutre ale corpului).
Care din următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) n = număr par b) n = număr prim c) n = număr impar
d) $n = 4k,\ k \in \mathbf{N}^*$ e) $n = 4^k,\ k \in \mathbf{N}^*$ f) $n = 3^k,\ k \in \mathbf{N}^*,\ k \geq 2$

AL – 474 Fie mulţimea numerelor complexe **C** dotată cu operaţiile $x * y = x + y + a$ şi $x \circ y = bixy + b(x + y) + ci$, $a, b, c \in \mathbf{C}, b \neq 0, i^2 = -1$.

Să se determine valorile numerelor *a*,*b* şi *c* pentru care **C** este corp în raport cu cele două legi de compoziţie, cu elementul neutru faţă de prima lege i, respectiv faţă de a doua lege –*i*.

a) $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$; b) $a = i$, $b = 2$, $c = -1$; c) $a = -i$, $b = c = \frac{1}{2}$;

d) $a = -i$, $b = c = $ i; e) $a = i$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$; f) $a = i$, $b = c = -i$.

AL – 475 Pe mulțimea **R** a numerelor reale se consideră legile de compoziție internă, $x \oplus y = ax + by - 1$, $x \otimes y = 2(xy - x - y) + c$ oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$ iar $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se determine *a,b,* şi *c* astfel ca $(\mathbf{R}, \oplus, \otimes)$ să fie corp.

a) $a = b = 1$, $c = 2$ b) $a = b = c = 1$ c) $a = b = c = 2$

d) $a = b = 1$, $c = 3$ e) $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ f) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

AL - 476 Pentru ce valori ale lui *a* şi *b* funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ determină un izomorfism între corpul numerelor reale şi corpul ($\mathbf{R}$, T, $*$), unde $x \mathrm{T}\, y = x + y - 2$, iar $x * y = \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$ pentru $(\forall) x, y \in \mathbf{R}$?

a) $a = 1, b = 1$ b) $a = 2, b = 2$ c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 4, b = 2$ e) $a = 2, b = 4$ f) $a = 1, b = 4$

AL - 477 Fie corpurile ($K, +, \bullet$) şi ($L, +, \bullet$) unde: $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$,

$L = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$, iar ''+'' şi '' $\bullet$ '' sunt operațiile de adunare şi înmulțire a matricelor , respectiv , a numerelor reale. Care din următoarele funcții este un izomorfism al acestor corpuri ?

a) $f_1(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a^2 & 2b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$ b) $f_2(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -a & -2b \\ -b & -a \end{pmatrix}$

c) $f_3\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = a + b + b^2 \cdot \sqrt{2}$ d) $f_4\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = a + b + b\sqrt{2}$

e) $f_5\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = -a + b\sqrt{2}$ f) $f_6(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix}$

AL - 478 Fie $U, E, X \in M_2(\mathbf{Z}_6)$ (inelul matricilor de ordin doi cu coeficienți din $\mathbf{Z}_6$): $U = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$. Care este soluția X a ecuației: $U \cdot X = E$?

a) $X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{5} \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix}$ d) $X = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ e) $X = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{5} \\ \hat{5} & \hat{3} \end{pmatrix}$ f) $X = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{5} \\ \hat{2} & \hat{5} \end{pmatrix}$

AL - 479 Să se calculeze determinantul de mai jos având elementele în corpul claselor de resturi modulo 7 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{6} & \hat{5} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} \end{vmatrix}.$$

a) $\Delta = \hat{1}$ b) $\Delta = \hat{0}$ c) $\Delta = \hat{2}$

d) $\Delta = \hat{3}$ e) $\Delta = \hat{4}$ f) $\Delta = \hat{5}$

AL - 480 Fie $A \in M_3(\mathbf{Z}_3)$, unde $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{x} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{x} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $\hat{x} \in \mathbf{Z}_3$. Pentru ce valori ale lui $\hat{x}$ matricea A este inversabilă ?

a) $\hat{x} = \hat{0}$ b) $\hat{x} = \hat{2}$ c) $\hat{x} = \hat{1}$ d) $\hat{x} \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$

e) matricea nu este inversabilă pentru nici o valoare a lui $\hat{x}$ f) $\hat{x} \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$

AL – 481 Să se calculeze în corpul claselor de resturi modulo 11 expresia:

$$E=\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}}+\hat{5}+\frac{\hat{8}}{\hat{3}}\cdot\frac{\hat{7}}{\hat{6}}\right)\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}$$

a) $E=\hat{0}$; b) $E=\hat{1}$; c) $E=\hat{2}$; d) $E=\hat{3}$; e) $E=\hat{4}$; f) $E=\hat{5}$.

AL – 482 Să se determine $\hat{a}\in\mathbf{Z}_7$ pentru care polinomul $P\in\mathbf{Z}_7[X]$,

$P(x)=x^6+\hat{a}\,x+\hat{5}$ este ireductibil.

a) $\hat{a}\in\mathbf{Z}_7$; b) $\hat{a}\in\varnothing$; c) $\hat{a}=\hat{2}$; d) $\hat{a}=\hat{4}$; e) $\hat{a}\in\left\{\hat{3},\hat{6}\right\}$; f) $\hat{a}\in\left\{\hat{5},\hat{6}\right\}$

AL – 483 Pe mulțimea $\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\}$ se definește legea de compoziție internă :

$x*y=x^{\ln y}$. Se consideră afirmațiile:

A) $\left(\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\},*\right)$ este grup abelian

B) $(\mathbf{M},*)$ este subgrup al grupului $\left(\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\},*\right)$ unde $M=\left\{e^{\alpha},\alpha\in\mathbf{Q}^*\right\}$.

C) Aplicația $f:\left(R_+^*\setminus\{1\},*\right)\to\left(R^*,\cdot\right)$ cu $f(x)=\ln x$ și "$\cdot$" reprezintă înmulțirea, este un izomorfism de grupuri

D) $\left(\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\},*,\cdot\right)$ este un inel

E) $\left(\mathbf{R}_+^*\setminus\{1\},*,\cdot\right)$ este un corp.

Stabiliți câte afirmații sunt corecte .

a) nici una; b) una; c) două; d) trei; e) patru; f) cinci.

AL – 484 Fie $f_k,\ k=\overline{1,n}$, automorfismele corpului $(\mathbf{C},+,\cdot)$, ce au proprietatea că : $f_k(x)=x,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.

Să se calculeze $S(z)=\sum_{k=1}^{n}f_k(z)$.

a) S(z) = 0 b) S(z) = n c) S(z) = Re z

d) S(z) = Im z e) S(z) = 2Re z f) S(z) = 2Im z

Al – 485 Fie corpul $(M_2,+,\cdot)$, unde $M_2=\left\{M_2(z,u)=\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix};\, z,u\in\mathbf{R}\right\}$ iar legile de compunere internă "+" şi "·" sunt adunarea şi înmulţirea matricelor. Să se determine izomorfismele $f:(M_2,+,\cdot)\to(\mathbf{C},+,\cdot)$, cu proprietatea
$f(\alpha M_2(z,u))=\alpha\, f(M_2(z,u))\ (\forall)\alpha\in\mathbf{R}$,
unde $(\mathbf{C},+,\cdot)$ este corpul numerelor complexe.

a) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z-5iu$ b) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+5iu$; $f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z-3iu$

c) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+\frac{3}{2}u+\frac{5}{2}ui$; $f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+\frac{3}{2}u-\frac{5}{2}ui$

d) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z-\frac{3}{2}u+\frac{\sqrt{5}}{2}ui$; e) $f_1\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+\frac{3}{2}u+\frac{\sqrt{11}}{2}ui$;

$f_2\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+\frac{3}{2}u-\frac{\sqrt{11}}{2}ui$ f) $f\begin{pmatrix} z & -5u \\ u & z+3u \end{pmatrix}=z+\frac{3}{2}u+i\left(\frac{z}{2}-5u\right)$

AL – 486 Legile de compoziţie $x\oplus y=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ şi $x\otimes y=xy$ determină pe $\mathbf{R}$ o structură de corp comutativ. Pentru ce valori $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ funcţia bijectivă
$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sqrt[3]{\alpha x+\beta}$ determină un izomorfism între corpul numerelor reale $(\mathbf{R},+,\cdot)$ şi corpul $(\mathbf{R},\oplus,\otimes)$?

a) nu există $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; b) $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$; c) $\alpha=\beta=1$;
d) $\alpha=1,\ \beta=0$; e) $\alpha=2,\ \beta=1$; f) $\alpha=1,\beta=2$

AL - 487 Să se rezolve următorul sistem de ecuaţii în corpul claselor de resturi modulo 11: $\begin{cases}\hat{3}x+\hat{4}y=\hat{5}\\ \hat{7}x+\hat{3}y=\hat{8}\end{cases}$.

a) $(\hat{9},\hat{0})$ b) $(\hat{0},\hat{9})$ c) $(\hat{6},\hat{9})$ d) $(\hat{8},\hat{9})$ e) $(\hat{5},\hat{0})$ f) $(\hat{6},\hat{0})$

AL - 488 Care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{1} \\ \hat{4}x+\hat{3}y=\hat{2} \end{cases}$ în inelul $\mathbf{Z}_{12}$?

a) $x=\hat{2},\ y=\hat{7}$ b) $x=\hat{1},\ y=\hat{4}$ c) $x=\widehat{10},\ y=\hat{3}$

d) incompatibil e) $x=\widehat{11},\ y=\hat{2}$ f) $x=\hat{8},\ y=\hat{3}$

AL - 489 Să se rezolve în inelul $\mathbf{Z}_{12}$ sistemul: $\begin{cases} \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{4} \\ \hat{2}x+\hat{3}y=\hat{1} \end{cases}$.

a) $x=\hat{0},\ x=\hat{2}$ b) $x=\widehat{10},\ y=\hat{7}$ c) $x=\hat{5},\ y=\hat{2}$

d) $x=\hat{4},\ y=\hat{1}$ e) $x=\hat{2},\ y=\widehat{11}$ f) $x=\widehat{11},\ y=\hat{8}$

AL - 490 Să se rezolve în corpul claselor de resturi modulo 11, sistemul

următor: $\begin{cases} \hat{2}x+\widehat{10}y+z=\hat{4} \\ x+\hat{3}z=\hat{2} \\ \widehat{10}x+\hat{2}y+\hat{2}z=\hat{1} \end{cases}$.

a) $(\hat{6},\hat{3},\hat{6})$ b) $(\hat{3},\hat{6},\hat{3})$ c) $(\hat{3},\hat{3},\hat{6})$ d) $(\hat{6},\hat{6},\hat{3})$ e) $(\hat{6},\hat{6},\hat{1})$ f) $(\hat{3},\hat{3},\hat{1})$

AL - 491 Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+y+z+u=\hat{6} \\ x-y+\hat{2}z-u=\hat{2} \\ \hat{2}x+y-z+u=\hat{3} \\ x+y+\hat{3}z-u=\hat{2} \end{cases}$ în corpul claselor de resturi modulo 7.

a) $x=\hat{1},\ y=\widehat{10},\ z=\hat{2},\ u=\hat{4}$ b) $x=\hat{2},\ y=\hat{3},\ z=\hat{1},\ u=\hat{4}$

c) $x=\hat{2}u,\ y=\hat{1}+\hat{3}u,\ z=\hat{5}+u,\ u=u$ d) $x=\hat{2}u,\ y=\hat{1}+\hat{2}u,\ z=\hat{6}+u$

e) $x=\hat{1},\ y=\hat{2},\ z=\hat{3},\ u=\hat{4}$ f) $x=\hat{2},\ y=\hat{3},\ z=\hat{4},\ u=\hat{5}$

AL - 492 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \hat{3}x+\hat{8}y+\hat{8}z=\hat{3} \\ \hat{8}x+\hat{8}y+\hat{3}z=\hat{0} \\ \hat{8}x+\hat{3}y+\hat{8}z=\hat{5} \end{cases}$$ în corpul claselor de resturi modulo 13.

a) $x=\hat{5}, y=\hat{2}, z=\hat{3};$ b) $x=\hat{2}, y=\hat{5}, z=\hat{2};$ c) $x=\hat{4}, y=\hat{1}, z=\hat{2};$

d) $x=\hat{1}, y=\hat{2}, z=\hat{2};$ e) $x=\hat{2}, y=\hat{2}, z=\hat{5};$ f) $x=\hat{2}, y=\hat{2}, z=\hat{7};$

AL - 493 Precizați valorile $\lambda \in \mathbf{Z}_4$ pentru care sistemul: $\begin{cases} \hat{\lambda}x+y+z=\hat{1} \\ x+\hat{\lambda}y+z=\hat{\lambda} \\ x+y+\hat{\lambda}z=\hat{\lambda}^2 \end{cases}$

este incompatibil.

a) $\lambda \in \{\hat{0},\hat{2}\}$ b) $\lambda = \{\hat{3},\hat{0}\}$ c) $\lambda = \{\hat{1},\hat{0}\}$ d) $\lambda \in \{\hat{1},\hat{3}\}$ e) $\lambda \in \varnothing$ f) $\lambda \in \{\hat{1},\hat{2}\}$

AL - 494 Care este condiția ca sistemul: $\begin{cases} \hat{\lambda}x+y+z=\hat{0} \\ x+\hat{\lambda}y+z=\hat{0} \\ x+y+\hat{\lambda}z=\hat{0} \end{cases}$ să aibă numai soluția banală în inelul claselor de resturi modulo 4 ?

a) $\hat{\lambda}=\hat{0}$ b) $\hat{\lambda}=\hat{1}$ c) $\hat{\lambda}\in\varnothing$ d) $\hat{\lambda}\in\mathbf{Z}_4$ e) $\hat{\lambda}=\hat{2}$ f) $\hat{\lambda}=\hat{3}$

AL - 495 În corpul claselor de resturi modulo 5 să se afle restul împărțirii polinomului

$$\hat{2}x^4+\hat{3}x^3+\hat{4}x^2+x+\hat{3} \text{ la polinomul } \hat{3}x^2+\hat{3}x+\hat{4}.$$

a) $x+\hat{2}$ b) $x+\hat{1}$ c) x

d) $x+\hat{4}$ e) $x+\hat{5}$ f) $\hat{2}x+\hat{1}$

AL - 496 Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f, g \in \mathbf{Z}_5[X]$: $f = \hat{3}X^5 + \hat{4}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{2}$ şi $g = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$.

a) $(f, g) = 1$ b) g c) $X + \hat{1}$ d) $\hat{2}X + \hat{3}$ e) $\hat{2}X + \hat{1}$ f) $X + \hat{2}$

AL - 497 Să se descompună în factori ireductibili peste corpul $\mathbf{Z}_3$ polinomul: $f = x^3 + \hat{2}x^2 + x + \hat{2} \in \mathbf{Z}_3[X]$.

a) $\left(x - \hat{1}\right)\left(x^2 + x + \hat{1}\right)$ b) $\left(x + \hat{1}\right)\left(x^2 + x\right)$ c) $\left(x + \hat{1}\right)\left(x^2 + \hat{1}\right)$

d) $\left(x + \hat{2}\right)\left(x^2 + \hat{1}\right)$ e) $\left(x - \hat{2}\right)\left(x^2 - \hat{1}\right)$ f) $x\left(x - \hat{1}\right)\left(x - \hat{2}\right)$

AL - 498 Să se determine *p* astfel încât polinomul $\hat{2}x^3 + \left(p + \hat{2}\right)x + \hat{1} \in \mathbf{Z}_3[X]$ să fie ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$.

a) orice p din $\mathbf{Z}_3$ satisface condiția cerută

b) nici un p din $\mathbf{Z}_3$ nu satisface condiția cerută

c) $p \in \left\{\hat{0}, \hat{1}\right\}$ d) $p = \hat{1}$ e) $p = \hat{0}$ f) $p = \hat{2}$

AL - 499 Să se determine $m \in \mathbf{Z}_5$ astfel încât polinomul
$X^4 + \hat{m}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{1} \in \mathbf{Z}_5[X]$ să aibă două rădăcini diferite.

a) $\hat{m} = \hat{0}$ b) $\hat{m} = \hat{1}$ c) $\hat{m} = \hat{2}$ d) $\hat{m} = \hat{3}$ e) $\hat{m} = \hat{4}$ f) $\hat{m} \in \varnothing$

AL - 500 Produsul elementelor nenule într-un corp comutativ cu *n* elemente este:

a) 1 b) –1 c) 1+1 d) (–1)+(–1) e) (–1)+ (–1)+ (–1) f) 1+1+1

AL – 501 Să se determine toate morfismele de grupuri $f:(\mathbf{Q},+)\to(\mathbf{Q},+)$.

a) $f(x)=rx,\ x\in\mathbf{Q};\ r\in\mathbf{Q}$
b) $f(x)=rx,\ x\in\mathbf{Q};\ r\in\mathbf{Z}$
c) $f(x)=x,\ x\in\mathbf{Q}$
d) $f(x)=-x,\ x\in\mathbf{Q}$
e) $f(x)=nx,\ x\in\mathbf{Q},\ n\in\mathbf{N}$
f) $f(x)=0,\ x\in\mathbf{Q}$

AL – 502 Care trebuie să fie expresia lui f(x) pentru ca aplicația $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{C}$ să fie un morfism de corpuri.

a) $f(x)=x+1$
b) $f(x)=x^2$
c) $f(x)=x$
d) $f(x)=x+x^{-1}$
e) $f(x)=x^{-1}$
f) Nici una dintre cele menționate anterior.

AL – 503 Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât polinomul $P(x)=x^4-x^2+2x-1+m$ să se divide cu x+1.

a) 0 b) –1 c) 3 d) 1 e) –1 f) 2

AL – 504 Să se determine câtul q și restul r al împărțirii polinomului

$$f=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$$

la polinomul $g=x^2-3x+1$.

a) $q=2x^2+3x+11,\ r=25x-5;$
b) $q=2x^2+3x-11,\ r=25x+5;$
c) $q=2x^2-3x+7,\ r=5x-1;$
d) $q=2x^2+2,\ r=x+2;$
e) $q=2x^2+3x-6,\ r=-x+2;$
f) $q=2x^2,\ r=2x+5;$

AL - 505 Să se determine gradul polinoamelor $f\in\mathbf{Z}[X]$ astfel încât *f*(7)=5 şi *f*(15)=9.

a) 2 b) Nu există asemenea polinom c) 3

d) 4 e) 6 f) 8

AL - 506 Să se determine restul împărțirii polinomului: $f=\left(\cos a+x\sin a\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, $a\in\mathbf{R}$ la polinomul $g=x^2+1$.

a) $x\cos na+\sin na$ b) $x\sin na+\cos na$ c) $\cos na+i\sin na$

d) $nx+1$ e) $x\,\mathrm{tg}\,na$ f) $x+1$

AL - 507 Un polinom P împărțit la $x-\alpha$ dă restul β, iar împărțit la $x-\beta$, dă restul α. Fie R_1, respectiv R_2, resturile împărțirii polinomului $P(P(x))$ la $x-\alpha$, respectiv la $x-\beta$. În funcție de α și β să se determine R_1 și R_2.

a) $R_1=\alpha,\ R_2=\beta$ b) $R_1=\beta,\ R_2=\alpha$ c) $R_1=\alpha^2,\ R_2=\beta^2$

d) $R_1=\beta^2,\ R_2=\alpha^2$ e) $R_1=R_2=\alpha\beta$ f) $R_1=\alpha-1,\ R_2=\alpha+1$

AL - 508 Fie P un polinom care împărțit la x^2-1 are restul $x-2$ și câtul $Q(x)$, iar împărțit la x^2-4 are restul $x+1$ și câtul $H(x)$. Fie R_1 restul împărțirii lui $Q(x)$ la $x-2$ și R_2 restul împărțirii lui $H(x)$ la $x+1$. Să se determine R_1 și R_2.

a) $R_1=R_2=1$ b) $R_1=-3,\ R_2=0$ c) $R_1=-3,\ R_2=3$

d) $R_1=0,\ R_2=3$ e) $R_1=R_2=0$ f) $R_1=R_2=-1$

AL - 509 Fie P un polinom cu coeficienți reali. Dacă resturile împărțirii lui P la $x-a$ și $x-b$, $\left(a\neq b\right)$ sunt egale, să se determine restul împărțirii lui P la polinomul $\left(x-a\right)\left(x-b\right)$.

a) $ax+b$ b) $bx+a$ c) $P(a)$ d) $bx+1$ e) $x+a$ f) $x+b$

AL - 510 Să se determine restul împărțirii polinomului

$$P(x)=\left(x-2\right)^{2n}+\left(x-1\right)^n-1 \text{ la polinomul } Q(x)=x^2-3x+2.$$

a) $x+1$ b) $x-1$ c) 0 d) $x+2$ e) $2x+1$ f) $2x-1$

AL - 511 Fie $f = X^{2n+1} + aX^{2n} + bX^{2n-1} - 1$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât restul împărțirii lui f la $x-1$ să fie egal cu 5, iar restul împărțirii lui f la $x+1$ să fie egal cu –3, apoi să se găsească restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.

a) $a = 2, b = 3; 5x - 3$ b) $a = 2, b = 3; -3x + 5$ c) $a = 2, b = 3; 4x + 1$

d) $a = 2, b = 1; 5x - 3$ e) $a = 2, b = 1; -3x + 5$ f) $a = 2, b = 1; 3x - 4$

AL - 512 Se consideră polinomul: $f(X) = X^4 + X^3 + aX + b,\ f \in \mathbf{R}[X]$.
Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca restul împărțirii lui $f(X+2)$ la $X+1$ să fie -18, iar restul împărțirii lui $f(X-2)$ la $X-1$ să fie egal cu -12.

a) $a = -4, b = -16$ b) $a = 4, b = 16$ c) $a = 5, b = 11$
d) $a = 6, b = 12$ e) $a = 10, b = 16$ f) $a = 9, b = 10$

AL - 513 Fie $f \in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad cel puțin doi. Dacă f dă restul 2 prin împărțirea la $X+1$ şi $(X+2)f(X) - X f(X+3) = 1$, să se determine restul împărțirii lui f la $X^2 - X - 2$.

a) $1 - X$ b) $1 + X$ c) 1 d) 0 e) $X^2 - X - 2$ f) X

AL - 514 Fie $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = X(X+1)^{2n+1} + (m-1)X^n$ unde $m \in \mathbf{R}$.
Determinați condiția necesară şi suficientă pentru ca polinomul f să fie divizibil prin polinomul $g = X^2 + X + 1$.

a) $m = -1$ b) $m = 1$ c) $m = -2$ d) $m = 2$ e) $m \in \mathbf{R}$ f) $m \in \varnothing$

AL - X. 515 Un polinom împărțit la *x*-1, *x*+1 şi *x*+4 dă respectiv resturile 15,7 şi –80. Să se afle restul împărțirii polinomului prin $(x-1)(x+1)(x+4)$.

a) $5x^2 + 4x + 16$ b) $5x^2 - 4x + 16$ c) $5x^2 - 4x - 16$
d) $-5x^2 + 4x + 16$ e) $-5x^2 - 4x + 16$ f) $-5x^2 + 4x - 16$

AL - 516 Să se determine toate polinoamele de gradul trei care se divid la x-1, iar resturile împărțirii la x-2, x-3 şi x-4 sunt egale.

a) $\alpha\left(x^3-9x^2+26x-18\right)$ b) $\alpha\left(x^3+9x^2+26x-18\right)$
c) $\alpha\left(x^3-9x^2-26x-18\right)$ d) $\alpha\left(x^3-9x^2+26x+18\right)$
e) $\alpha\left(x^3+9x^2-26x-18\right)$ f) $\alpha\left(x^3+9x^2+26x+18\right)$ $\alpha\in\mathbf{R}$

AL - 517 Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul $f=2X^{29}+X^{23}+X^{12}+mX^{11}+X^{8}+5X^{6}+nX^{2}+2$ să fie divizibil prin polinomul $g=X^4+X^3+X^2+X+1$.

a) $m=-3, n=1$ b) $m=-3, n=-1$ c) $m=0, n=0$
d) $m=1, n=-3$ e) $m=1, n=3$ f) $m=0, n=-3$

AL - 518 Determinați restul împărțirii polinomului

$P(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1,\ (n\geq 3)$ la polinomul $Q(x)=x(x-1)^2$.

a) $nx^2+n(n-3)x+1$ b) $\frac{1}{2}n(n-1)x^2-\frac{1}{2}n(n-3)x+1$

c) $\frac{1}{2}n(n+1)x^2+\frac{1}{2}n(n+3)x+1$ d) $(n-1)x^2+2nx+1$

e) $\frac{1}{2}n(n+1)x^2+n(n-1)x+2$ f) $\frac{1}{2}(n+1)x^2+2nx+3$

AL - 519 Să se determine restul împărțirii polinomului $P(x)=x^{2n}-x^n+x^4+1$,

prin polinomul $Q(x)=(x-1)^2$.

a) $nx-2$ b) $(n+1)x-n-2$ c) $(n+4)x-n-2$
d) $(n-4)x+n+2$ e) $(2n+1)x-3$ f) $(2n-1)x+n-2$

AL - 520 Fie *P* un polinom cu coeficienți reali de grad mai mare sau egal cu 3, iar $R = mX^2 + nX + p$ restul împărțirii lui *P* prin produsul $(X^2 - 1)(X - 2)$. Să se determine *m* , *n* și *p* astfel încât resturile împărțirii lui *P* prin $X - 1, X - 2$ și $X + 1$ să fie, respectiv , -2, 3, -6.

a) $m = 1, n = 2, p = -1$ b) $m = 1, n = -1, p = 2$ c) $m = -7, n = 26, p = -21$

d) $m = 1, n = 2, p = -5$ e) $m = -1, n = 3, p = 1$ f) $m = 1, n = 2, p = 3$

AL - 521 Determinați puterile naturale *n* pentru care polinomul

$f = \left(X^2 + X + 1\right)^{3n} + \left(2X - 2\right)^{3n}$ este divizibil prin $g = X^2 - X + 1$.

a) $n = 3p,\ p \in \mathbf{N}$ b) $n = 3p + 1,\ p \in \mathbf{N}$ c) $n = 3p + 2,\ p \in \mathbf{N}$

d) $n = 2p,\ p \in \mathbf{N}$ e) $n = 2p + 1,\ p \in \mathbf{N}$ f) $n \in \mathbf{N}$

AL - 522 Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul $P(x) = 2x^4 - 2x^3 + ax + b$, să fie divizibil cu $Q(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) $a = 12$, $b = -12$ b) $a = 16$, $b = -16$ c) $a = -16$, $b = 16$

d) $a = 16$, $b = -14$ e) $a = 15$, $b = -15$ f) $a = 13$, $b = -13$

AL – 523 Să se determine restul $R(x)$ al împărțirii polinomului $Q(x) = x^{3n-1} + ax + b$ la x^2+x+1, $n \in \mathbf{N}^+$.

a) $R(x) = (a^2 - 1)x + b^2 - 1$ b) $R(x) = (a + 1)x + b + 1$ c) $R(x) = ax + b$

d) $R(x) = (a - 1)x + b - 1$ e) $R(x) = (a - 1)x + 1 - b$ f) $R(x) = (a - 1)x + b + 1$

AL - 524 Să se determine polinomul de gradul trei, care împărțit la $x^2 - 3x$ dă restul $6x - 15$ și împărțit la $x^2 - 5x + 8$ dă restul $2x - 7$.

a) $x^3 - 7x^2 + 14x - 13$ b) $2x^3 - x + 1$ c) $x^3 - 6x^2 + 15x - 15$

d) $x^3 - 6x^2 + 14x - 15$ e) $2x^3 - 6x^2 + 15x - 15$ f) $x^3 - 7x + 1$

AL - 525 Să se determine λ şi $\mu \in \mathbf{Q}$ astfel încât un cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f = 2X^3 - 7X^2 + \lambda X + 3$ şi $g = X^3 - 3X^2 + \mu X + 3$ să fie un polinom de gradul doi.

a) $\lambda = -1, \mu = 2$ b) $\lambda = \mu = 0$ c) $\lambda = 2, \mu = 0$

d) $\lambda = 2, \mu = -1$ e) $\lambda = \mu = -1$ f) $\lambda = 0, \mu = 2$

AL - 526 Fie $f \in \mathbf{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$. Determinați coeficienții polinomului f, dacă $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^4$, $(\forall)\, n \in \mathbf{N}^*$.

a) $f = -1 + 3X - 5X^2 + 4X^3$ b) $f = 2 - 2X - 3X^2 + 2X^3$

c) $f = -1 + 4X + 6X^2 + 4X^3$ d) $f = -1 + 4X - 6X^2 + 4X^3$

e) $f = -2 - 2X + 3X^2 - 2X^3$ f) $f = 1 - 4X - 6X^2 + 4X^3$

AL - 527 Să se determine polinomul $P \in \mathbf{R}[\mathrm{X}]$ care satisface condițiile:
$(X-1)[P(X) - P(X-1)] - 4P(X) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ şi $P(0) = 24$.

a) $X(X-1)(X-3)(X-4) + 24$ b) $-2(X+1)(X-1)(X-3)(X-4)$

c) $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ d) $X(X-1)(X-2)(X-3) + 24$

e) $X(X-5)(X+1)(X-2) + 24$ f) $X + 24$

AL - 528 Să se determine toate polinoamele $P \in \mathbf{R}[X]$, astfel încât
$P(x+1) = P(x) + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a) $kx^3, k \in \mathbf{R}$ b) $x^4 + x^3 - 5$ c) $x^4 + k, k \in \mathbf{R}$

d) $x^5 + k, k \in \mathbf{R}$ e) $k \in \mathbf{R}$ f) $x^4 + x + k, k \in \mathbf{R}$

AL - 529 Fie $f\in\mathbf{Z}[X]$ un polinom de grad oarecare, care pentru patru valori întregi diferite este egal cu p, p fiind un număr prim. Pentru ce valori întregi ale lui x avem $f(x)=2p$?

a) Nu există $x\in\mathbf{Z}$ b) Pentru orice $x\in\mathbf{N}$ c) Pentru $x=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}$

d) Pentru orice $x\in\mathbf{Z}$ e) Pentru $x=2k,\ k\in\mathbf{Z}$ f) Pentru x număr prim

AL - 530 Dacă polinomul $f\in\mathbf{Z}[X]$ are proprietatea că $f(0)$ şi $f(1)$ sunt numere impare, atunci:

a) f are numai rădăcini întregi b) f are numai rădăcini întregi pare

c) f are numai rădăcini întregi impare d) f nu are rădăcini întregi

e) f are numai rădăcini întregi pozitive f) f are numai rădăcini întregi negative

AL - 531 Să se determine toate valorile parametrilor $a,b\in\mathbf{R}$ pentru care există polinoame $P\in\mathbf{R}[X]$ care verifică identitatea $x[P(x)-b]=(x-a)P(x+a),(\forall)\,x\in\mathbf{R}$.

a) $b=0,\ a\in\mathbf{R}$ b) $a=0, b\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) $a\neq b$ şi $a\neq 0, b\neq 0$

d) $a=b$ sau $a\neq 0$ şi $b=0$ e) $a,b\in\mathbf{R}$ f) $a,b\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$

AL - 532 Fie polinomul $f=X^4-2aX^3+b^2X^2-bX+1,\ a,b\in\mathbf{R}$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice valori ale numerelor reale a şi b.

a) f are cel mult o rădăcină reală b) f nu are rădăcini reale

c) f are 4 rădăcini reale d) f are cel puţin două rădăcini reale

e) f are cel mult două rădăcini reale f) $a+ib;\ a,b\in\mathbf{R}$ este rădăcină a polinomului

AL - 533 Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 - 6x^2 + ax + a = 0$, să verifice relația $(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$.

a) $a \in \{-1,1,3\}$, b) $a \in \left\{\frac{27}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{2}\right\}$, c) $a \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{16}{3}, \frac{27}{4}\right\}$,

d) $a \in \left\{\frac{7}{2}, \frac{16}{3}, \frac{27}{2}\right\}$, e) $a \in \left\{\frac{5}{3}, \frac{16}{5}, \frac{27}{2}\right\}$, f) $a \in \{2,3,5\}$

AL - 534 Determinați ordinul de multiplicitate $m \in \mathbf{N}$ al rădăcinii $x = 2$ a ecuației : $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL - 535 Fie $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b \neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții *a*, *b*, *c*, *d* pentru care rădăcinile lui *P* sunt în progresie aritmetică.

a) $3b^3 + 27ab + 9abc = 0$ b) $2b^3 - 27a^2d + 9abc = 0$ c) $2b^3 + 27a^2d - 9abc = 0$
d) $3a^3 + 27abc - 9bd = 0$ e) $3c^3 + 27abc = 0$ f) $2c^3 + 27a^2d - 9abc = 0$

AL - 536 Fie polinomul $P \in \mathbf{R}[X]$, $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, d \neq 0$. Să se determine relația dintre coeficienții *a*, *b*, *c*, *d* pentru ca rădăcinile polinomului *P* să fie în progresie geometrică.

a) $a^2b = c^2d$ b) $a^2b^2 = c^2d$ c) $ab^3 = c^3d$
d) $ac^3 = b^3d$ e) $ac = bd$ f) $a^3c = b^3d$

AL - 537 Să se determine valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care produsul a două rădăcini ale ecuației $x^3 - 3x - \frac{2m}{m^2 + 1} = 0$ este egal cu 1.

a) $m = 0$ b) $m \in \{2,5\}$ c) $m \in \mathbf{R}$ d) $m \in \varnothing$ e) $m = -2$ f) $m \in \{-5,7,10\}$

AL - 538 Care este relația dintre a şi b atunci când ecuația $x^3 - 3ax + 2ab = 0$, $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, are o rădăcină dublă.

a) $2b = 3a$ b) $b^2 = a\sqrt{2}$ c) $b^2 = a$ d) $a^3 = 5b$ e) $a = 2b$ f) $a = b$

AL - 539 Arătați că ecuația $x^3 + (2m-5)x^2 + (9-5m)x + 2(m-3) = 0$, $m \in \mathbf{R}$, admite o rădăcină x_1 independentă de m şi apoi determinați m astfel încât : $\log_{10}|x_2 - x_3| = \frac{1}{2}\log_{10}(6m+5)$, x_2 şi x_3 fiind celelalte rădăcini ale aceleiaşi ecuații.

a) $m_1 = 4, m_2 = -\frac{1}{2}$ b) $m_1 = 3, m_2 = 1$ c) $m = 2$

d) $m = \frac{1}{2}$ e) $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 3$ f) $m = 5$

AL - 540 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ ştiind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + 2x^2 - mx + 1 = 0$ satisfac relația $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 24$.

a) $m = 0, m = -1$ b) $m = 1, m = -1$ c) $m = 0, m = 1$

d) $m = 0, m = -8$ e) $m = -1, m = 3$ f) $m = 4, m = 0$

AL - 541 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + x + m = 0$, să verifice egalitatea $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 10$.

a) $m = 1$ b) $m = 2$ c) $m = -1$ d) $m \in \varnothing$ e) $m = -2$ f) $m \in \mathbf{R}$

AL - 542 Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - x + 1 = 0$, să se calculeze expresia : $E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_2^2}$.

a) $E = 3$ b) $E = -3$ c) $E = 2$ d) $E = -2$ e) $E = -1$ f) $E = 1$

AL - 543 Se consideră ecuația $x^3+ax^2+ax+a=0$, $a\in\mathbf{C}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se calculeze expresia : $E=\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+1\right)^2$.

a) $E=(a+1)^6$ b) $E=(a-1)^6$ c) $E=\left(a^3+1\right)^2$

d) $E=\left(a^3-1\right)^2$ e) $E=a^6+1$ f) $E=a^6-1$

AL - 544 Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a,b,c,d\in\mathbf{R}^*$, să se formeze ecuația în y care are ca rădăcini :

$$y_1=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3},\ y_2=\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1},\ y_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

a) $by^3+cy^2+dy+a=0$ b) $d\left(y+\frac{c}{d}\right)^3+c\left(y+\frac{c}{d}\right)^2+b\left(y+\frac{c}{d}\right)-a=0$

c) $dy^3+cy^2+by+a=0$ d) $\left(y+\frac{1}{a}\right)^3+\left(y+\frac{1}{b}\right)^2+y+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0$

e) $d\left(y+\frac{c}{d}\right)^3-c\left(y+\frac{c}{d}\right)^2+b\left(y+\frac{c}{d}\right)-a=0$

f) $d\left(y-\frac{c}{d}\right)^3-c\left(y-\frac{c}{d}\right)^2+b\left(y-\frac{c}{d}\right)-a=0$

AL - 545 Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3+x^2-3=0$, să se precizeze care din ecuațiile următoare are drept rădăcini :

$$y_1=x_2+x_3,\ y_2=x_3+x_1,\ y_3=x_1+x_2.$$

a) $y^3-y+2=0$ b) $2y^3-y-1=0$ c) $2y^3+y+7=0$

d) $y^3+2y^2+y+3=0$ e) $y^3+y-2=0$ f) $y^3-2y^2+y-3=0$

AL - 546 Ştiind că ecuaţia : $x^3-(a+2)x^2+2(a+2)x-8=0$, admite şi rădăcini independente de *a*, să se determine mulţimea tuturor valorilor lui *a* pentru care toate rădăcinile ecuaţiei sunt strict pozitive.

a) $[-4,4]$ b) $(0,+\infty)$ c) $(-1,0)$ d) $[4,+\infty)$ e) $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$ f) $(-\infty,-4]$

AL - 547 Să se rezolve ecuaţia : $x^3-2(1+\sqrt{2})x^2+(1+4\sqrt{2})x-2=0$, ştiind că ea admite rădăcina $1+\sqrt{2}$.

a) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},2$ b) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},2\sqrt{2}$ c) $1+\sqrt{2},-1+\sqrt{2},2$

d) $1+\sqrt{2},-2,-2$ e) $1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}$ f) $1+\sqrt{2},1-\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

AL - 548 Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel ca ecuaţia $x^4-4x^3+ax^2+bx+17=0$ să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

a) $a=2, b=-17$ b) $a=12, b=-19$ c) $a=-52, b=12$

d) $a=-14, b=36$ e) $a=21, b=36$ f) $a=52, b=40$

AL - 549 Fie ecuaţia $x^4-7x^3+17x^2+mx+n=0$. Să se rezolve şi să se afle m şi n ştiind că admite o rădăcină dublă şi că suma celorlalte două rădăcini este 5.

a) $x_1=x_2=1, x_3=2, x_4=3, m=-17, n=6$

b) $x_1=x_2=1, x_3=2, x_4=3, m=6, n=-17$

c) $x_1=x_2=2, x_3=1, x_4=5, m=1, n=1$

d) $x_1=x_2=1, x_3=1, x_4=5, m=3, n=4$

e) $x_1=x_2=3, x_3=2, x_4=3, m=-3, n=3$

f) $x_1=x_2=2, x_3=4, x_4=1, m=3, n=-3$

AL - X. 550 Să se rezolve ecuația: $x^3 - 2x^2 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)x + 2 = 0$, știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{2}$.

a) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_{2,3} = \dfrac{1 + \sqrt{2} \pm i\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}{2}$ b) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_{2,3} = \dfrac{\pm i\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}{2}$

c) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$ d) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{2}}$

e) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{5 + 6\sqrt{2}}$ f) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{5 + 6\sqrt{2}}$

AL - 551 Să se determine valorile raționale ale parametrilor *a* și *b* astfel încât $1 + \sqrt{2}$ să fie rădăcină a ecuației : $x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$.

a) $a = -3, b = -1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = -3, b = 1$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = -2, b = -1$ f) $a = -2, b = 1$

AL - X. 552 Să se determine toate valorile parametrilor reali *a* și *b* pentru care ecuația $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ are cel mult două rădăcini reale.

a) $a = 1, b = 2$ b) $a \in \mathbf{R}, b = 5$ c) $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}, b = 2$

d) $a, b \in \mathbf{R}$ e) $a = -2, b = 3$ f) $a \neq 1, b \neq 3$

AL - 553 Să se determine parametrul real *a* astfel încât ecuația : $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$, să aibă toate rădăcinile reale.

a) $a \in (-\infty, 3]$ b) $a \in (-6, 3]$ c) $a \in (0,1)$ d) $a \in (-\infty, -6]$ e) $a = 0$ f) $a = 1$

AL – 554 Se consideră ecuația

$$x^4 - \left(2^m - 1\right)x^3 + 2^m x^2 - \left(2^m - 1\right)x + 1 = 0$$

Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuația să aibă două rădăcini reale, distincte, negative.

a) $m = \log_2 3$ b) $m = 2$ c) $m \in \varnothing$

d) $m < 0$ e) $m \in (0,1)$ f) $m \in (2, \infty)$

AL - 555 Precizați mulțimea *A* căreia îi aparține cel mai mic număr întreg *k* pentru care ecuația $x^4 - 2(k+2)x^2 - 12 + k^2 = 0$ are numai două rădăcini reale distincte.

a) $A = \{-6,-5,-4\}$ b) $A = \{-2,-1,1\}$ c) $A = \{-3,2,7\}$

d) $A = \{-1,0,7\}$ e) $A = \varnothing$ f) $A = \{0,1,2\}$

AL - 556 Să se determine toate polinoamele de gradul $n \in \mathbf{N}^*$, $P \in \mathbf{R}[X]$, care verifică identitatea :

$$P(1) + P(x) + P(x^2) + \ldots + P(x^n) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)P(x),\ (\forall)\ x \in \mathbf{R}\ .$$

a) $k(x^2+1)$ b) $k(x^2-x)$ c) $k(x^3-x)$

d) $k(x^2+x)$ e) $k(x^4-3)$ f) $k(x^2-2)$

AL - X. 557 Să se determine parametrii reali *m*, *n* şi *p* pentru care ecuațiile de gradul trei : $(m+1)x^3 + (m+n+p-1)x^2 + (3m-n-2p)x + 3 - m - 2n - 2p = 0$ şi $x^3 + x + 1 = 0$ au aceleaşi rădăcini.

a) $m = n = p = 1$ b) $m,n,p \in \phi$ c) $m = \dfrac{p+2}{3}, n = \dfrac{1-4p}{3}, p \in \mathbf{R}$

d) $m = 1 - n - p,\ n, p \in \mathbf{R}$ e) $m = \dfrac{p+2}{3}, n = \dfrac{1-4p}{3}, p \neq -5$

f) $m = \dfrac{p-2}{3}, n = \dfrac{4p-1}{3}, p = -5$

AL - 558 Să se determine parametrii reali *a, b* şi *c* ştiind că ecuaţiile $x^4 + ax^2 + bx + 2 = 0$ şi $x^3 - 3x + 2c = 0$ au o rădăcină dublă comună.

a) $a = -1, b = -2, c = 1$; $a = -1, b = 2, c = -1$
b) $a = 1, b = 2, c = 2$
c) $a = -1, b = 3, c = -1$; $a = 1, b = -3, c = 1$
d) $a = -2, b = 3, c = -1$
e) $a = -1, b = 3, c = 1$; $a = 1, b = 2, c = -1$
f) $a = b = c = 1$

AL - 559 Să se determine suma coeficienţilor polinomului obţinut din dezvoltarea

$$\left(10x^8 - x^4 - 8\right)^{1997}.$$

a) 0 b) 1 c) 2^{1997} d) 10^{1997} e) C_{1997}^{8} f) 1997

AL - 560 Să se determine coeficientul lui x^{1997} din expresia :
$E = (1+x)^{1997} + x(1+x)^{1996} + x^2(1+x)^{1995} + \ldots + x^{1996}(1+x) + x^{1997}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$.

a) 0 b) 1 c) 1996 d) 1998 e) 1997 f)1999

AL - 561 Să se determine toate valorile lui $m \in \mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia :
$x^4 + x^3 - 2x^2 + 3mx - m^2 = 0$, să admită numai rădăcini reale.

a) ϕ b) $\left[-\frac{1}{4}, -1\right]$ c) $\left[-1, \frac{1}{4}\right]$ d) $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ e) $(-4, 1]$ f) $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$

AL - 562 Să se rezolve ecuaţia

$$5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0$$

a) $\left\{1; \frac{3 \pm i\sqrt{21}}{5}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $\left\{3; \frac{2 \pm i\sqrt{21}}{5}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3}\right\}$ c) $\left\{-1; \frac{2 \pm i\sqrt{21}}{5}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$

d) $\left\{-1; \frac{1 \pm i\sqrt{21}}{3}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ e) $\left\{-1; \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}\right\}$ f) $\left\{-1; \frac{2 \pm i\sqrt{3}}{3}; \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}\right\}$

AL - 563 Ştiind că ecuaţia

$$2ax^5+2(a+b)x^4+(2b+3)x^3+2ax^2+(2a+b-2)x+b+1=0$$

este reciprocă să se calculeze suma rădăcinilor negative ale acesteia

a) –5 b) –6 c) $-\frac{9}{2}$ d) –1 e) $-\frac{1}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$

AL - 564 Determinaţi polinomul de grad minim cu coeficienţi raţionali care admite ca rădăcini $x_1=-\frac{4}{1-\sqrt{5}}$ şi $x_2=\frac{5}{2-3i}$.

a) $13X^4+46X^3-13X^2+30X+100$ b) $13X^4-46X^3+13X^2+30X-100$

c) X^4-5X^2+129 d) $X^4+10X^3-X^2+5$

e) X^4-3X^2+5X+6 f) X^4-9X^2+81

AL - 565 Determinaţi modulul rădăcinilor ecuaţiei

$$9x^4+8x^3+14x^2+8x+9=0.$$

a) 2 b) 1 c) 3 d) 0 e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

AL - 566 Să se determine $a\in\mathbf{R}^*$ astfel încât ecuaţia $ax^3-x^2-(a+2)x-2a=0$ să aibă o rădăcină complexă nereală de modul egal cu 1.

a) $a=1$ b) $a=-1$ c) $a=2$ d) $a=-2$ e) $a=\frac{1}{2}$ f) $a=-\frac{1}{2}$

AL - 567 Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4+2x^3+ax^2+2x+1=0$ să aibă numai două rădăcini reale.

a) $a\in(-\infty,2)$ b) $a\in(2,+\infty)$ c) $a\in(2,3]$ d) $a\in(1,+\infty)$ e) $a\in(-6,2]$ f) $a\in\varnothing$

ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ
ŞI TRIGONOMETRIE

ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ ŞI TRIGONOMETRIE
(simbol TG)

TG - 001 Corzile $\left[AB\right]$şi $\left[CD\right]$ ale cercului $C\left(O,r\right)$ sunt perpendiculare şi se intersectează în punctul P. Determinați valoarea parametrului m pentru care are loc relația:

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+m\cdot\overrightarrow{PO}=\vec{0}$$

a) -1; b) -2; c) -4; d) 4; e) 2; f) 1.

TG - 002 Se consideră vectorii

$$\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j} \quad \text{şi} \quad \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$$

Exprimați vectorul $\vec{v}=5\vec{i}-4\vec{j}$ în funcție de $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

a) $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{2}\vec{b}$ b) $\vec{v}=-2\vec{a}+\vec{b}$ c) Imposibil: $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt coliniari

d) $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$ e) $\vec{v}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}$ f) $\vec{v}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

TG - 003 În triunghiul dreptunghic ABC suma catetelor este $AB+AC=1+\sqrt{3}$ iar înălțimea din vârful A are lungimea $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se determine lungimea ipotenuzei şi măsura unghiului B.

a) $a=2\sqrt{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{6}$ b) $a=2,\ \hat{B}=\frac{\pi}{6}$ sau c) $a=2+\sqrt{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{6}$ sau

$a=2\sqrt{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{3}$ $a=2,\ \hat{B}=\frac{\pi}{3}$ $a=2+\sqrt{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{3}$

d) $a=2,\ \hat{B}=\frac{\pi}{4}$ e) $a=2+\sqrt{3},\ \hat{B}=\frac{\pi}{4}$ f) $a=4,\ \hat{B}=\frac{\pi}{4}$

TG - 004 Fie $A(3,1)$, $B(2,5$ şi$)$, $C(-1,4\!\!3)$,5 $\quad D(- \quad -)$ patru puncte în planul $\mathbf{R}^2$ raportat la reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor AC respectiv BD.

Determinaţi coordonatele şi lungimea vectorului MN. Exprimaţi $\overrightarrow{MN}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$.

a) $\overrightarrow{MN}=-2\vec{i}-2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}\right)$

b) $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}-2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}\right)$

c) $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=\sqrt{6}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CD}\right)$

d) $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}-2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=\sqrt{6}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(9\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

e) $\overrightarrow{MN}=-2\vec{i}-2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

f) $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+2\vec{j}$; $\left\|MN\right\|=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(7\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

TG - 005 Determinaţi parametrii reali *m* şi *n* aşa încât vectorii $\vec{a}=(1-m)\vec{i}+\frac{n}{5}\vec{j}$ şi $\vec{b}=-\frac{n}{5}\vec{i}+4m\vec{j}$ să fie vectori ortogonali în $\mathbf{R}^2$.

a) $m=\frac{1}{4}, n=0$ sau $m=-\frac{1}{4}, n=0$;

b) $m=\frac{1}{5}, n=3$ sau $m=\frac{1}{5}, n=-3$;

c) $m=-\frac{1}{3}, n=3$ sau $m=-\frac{1}{3}, n=-3$;

d) $m=\frac{1}{5}, n=0$ sau $m=-\frac{1}{3}, n=0$

e) $m=\frac{1}{2}, n=3$ sau $m=-\frac{1}{2}, n=-3$;

f) $m=\frac{1}{4}, n=0$ sau $m=-\frac{1}{2}, n=-3$

TG - 006 Vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(-5,8)$, $B(-2,a)$ şi $C(b,1)$. Determinaţi aria triunghiului ABC ştiind că centrul său de greutate este $G(1,1)$.

a) 189 b) $\frac{231}{2}$ c) $\frac{189}{2}$

d) 231 e) Nu există un astfel de triunghi f) $\frac{201}{2}$

TG - 007 Fie ABCD un paralelogram, O punctul de intersecţie al diagonalelor şi M un punct arbitrar în plan. Determinaţi parametrul α pentru care are loc relaţia:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = \|OM\|^2 + \alpha\cdot\|AC\|^2 .$$

a) $-\frac{1}{4}$ b) -1 c) 2 d) 1 e) $\frac{1}{4}$ f) -2

TG - 008 Se consideră hexagonul regulat ABCDEF. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{AF}$ în funcţie de $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ şi $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

a) $2\vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{b} - 2\vec{a}$ c) $\vec{b} + \vec{a}$

d) $2\vec{b} + \vec{a}$ e) $\vec{b} - \vec{a}$ f) $2\vec{a} + \vec{b}$

TG - 009 Fie ABC un triunghi oarecare şi punctul $N \in (AC)$ astfel încât $2AN = CN$. Să se exprime vectorul $\overrightarrow{BN}$ în funcţie de $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC}$.

a) $\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ b) $3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$

d) $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ f) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$

TG - 010 Să se determine parametrul real m aşa încât vectorii $\vec{a} = (m+1)\vec{i} + 3m\vec{j}$ şi $\vec{b} = (m-1)\vec{i} + m\vec{j}$ să aibă aceeaşi lungime şi să fie perpendiculari.

a) $+\frac{1}{2}$; b) 2; c) 0; d) -2; e) Nu există m cu această proprietate; f) $-\frac{1}{2}$;

TG - 011 Determinați parametrul real m astfel încât vectorii $\vec{a} = 2\sqrt{3}\,\vec{i} + 2m\vec{j}$ şi $\vec{b} = m\,\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ să formeze un unghi de 45^0.

a) ± 2 b) $\sqrt{2} \pm 1$ c) ± 1 d) $\sqrt{6} \pm \sqrt{3}$ e) $\sqrt{3} \pm 1$ f) 3

TG - 012 Fie ABC triunghiul cu laturile AB = c, BC = a şi CA = b. Exprimați suma de produse scalare:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

în funcție de a, b şi c.

a) $\frac{1}{3}(a+b+c)$ b) $a+b+c$ c) $a^2+b^2+c^2$

d) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$ e) $\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ f) $\frac{1}{2}(a+b+c)$

TG - 013 Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ doi vectori ce formează un unghi de 60^0 având lungimile 1 şi respectiv 2. Calculați ariile paralelogramelor formate de vectorii

$$\bar{u} = \bar{a} + 2\bar{b} \qquad \text{şi} \qquad \bar{v} = 3\bar{a} - \bar{b}$$

respectiv

$$\bar{u} = \bar{a} + 2\bar{b} \qquad \text{şi} \qquad \bar{w} = -3\bar{a} + 2\bar{b}$$

a) 7; 8 b) $6\sqrt{3}$; $8\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$

d) $7\sqrt{3}$; $8\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$ f) 5; 6.

TG - 014 Fie A(-3,4) şi B(5,12) două puncte situate în planul real raportat la reperul ortogonal $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$.

Calculați măsura unghiului pe care vectorul $\overrightarrow{AB}$ îl face cu vectorul de poziție al punctului A şi precizați natura triunghiului OAB.

a) $\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; ΔOAB - ascuțitunghic
b) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; ΔOAB - obtuzunghic

c) $\pi - \arccos\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$; ΔOAB - obtuzunghic
d) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; ΔOAB - dreptunghic

e) $\arccos\dfrac{33}{65}$; ΔOAB - dreptunghic
f) $\pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; ΔOAB - obtuzunghic.

TG - 015 Se consideră patru puncte coplanare distincte A,B,C şi D situate în planul $\mathbf{R}^2$ raportat la reperul ortogonal $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$. Calculați valoarea expresiei:

$$E = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

a) $\sqrt{\|DA\|^2 + \|DB\|^2 + \|DC\|^2}$;
b) -1
c) $\|BC\| + \|CA\| + \|AB\|$;
d) 0
e) $\sqrt{\|BC\|^2 + \|CA\|^2 + \|AB\|^2}$
f) 1.

TG - 016 Punctele A(5,-12), B(-12,-5) şi C(5,-5) determină în planul real raportat la reperul ortogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ vectorii de poziție $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ şi respectiv $\overrightarrow{OC}$. Calculați valoarea expresiei $E = \alpha + \beta + \gamma$ ştiind că α= ∢ $\left(\overrightarrow{OA},\vec{i}\right)$, β= ∢ $\left(\overrightarrow{OC},\vec{i}+\vec{j}\right)$.

a) $\dfrac{\pi}{2}$
b) $\dfrac{3\pi}{2}$
c) $2\arccos\dfrac{5}{13}+\dfrac{\pi}{2}$
d) π
e) $\arccos\dfrac{10}{13}$
f) 0

TG - 017 Suma a trei vectori $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ şi $\overline{v_3}$ având aceeaşi lungime l şi acelaşi punct de aplicație este $\overline{0}$.
Precizați natura poligonului format de extremitățile acestor vectori.

a) Nu există asemenea trei vectori

b) Triunghi dreptunghic

c) Triunghi echilateral

d) Triunghi isoscel.

e) Lungimea vectorilor este *l*=0 şi triunghiul se reduce la punctul de aplicație comun.

f) Cei trei vectori sunt coliniari şi triunghiul se reduce la un segment.

TG - 018 Să se calculeze: $E = \dfrac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{tg15^0 + ctg15^0}$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

TG - 019 Să se determine soluțiile ecuației $\text{ctg } x - 2\cos x = 0$, satisfac condiția

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi .$$

a) $\dfrac{5\pi}{6}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{9\pi}{10}$ d) $\dfrac{7\pi}{12}$ e) $\dfrac{5\pi}{8}$ f) $\dfrac{5\pi}{9}$

TG - 020 Dacă $tga = 1,\ tgb = 2,\ tgc = 3$, cât este $tg\left(a+b+c\right)$?

a) 1 b) 0 c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{2}{3}$

TG - 021 Dacă $tg\ x + ctg\ x = m$, să se calculeze în funcție de *m* expresiile:

$$E_1 = tg^2 x + ctg^2 x, \quad E_2 = tg^3 x + ctg^3 x .$$

a) $E_1 = m-2, \quad E_2 = m^3 - 3m$

b) $E_1 = m^2-2, \quad E_2 = m^3 - 3m$

c) $E_1 = m^2-2, \quad E_2 = m^3$

d) $E_1 = m^2, \quad E_2 = m^3$

e) $E_1 = m^2-2, \quad E_2 = m^3 - 3$

f) $E_1 = m^2+2, \quad E_2 = m^3 + 3m$

TG - 022 Dacă se notează $t = \sin 2u$, se cere să se exprime în funcție de t expresia

$$E = \text{tg}^2 u + \text{ctg}^2 u .$$

a) $t^2 + 1$ b) $\frac{1}{t^2}$ c) $2t^2$ d) $\frac{1}{t^2} - 1$ e) $\frac{4}{t^2} - 2$ f) $\frac{1}{t^2 + 1}$

TG - 023 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației: $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) $x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{12} + k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{8} + k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\{ \frac{3\pi}{8} + 2k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left\{ \frac{\pi}{9} + 2k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

e) $x \in \left\{ \frac{3k\pi}{4} \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

f) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

TG - 024 Determinați soluțiile ecuației $\sin x + |\sin x| = 2\cos x$ situate în intervalul $[0, 2\pi]$

a) $x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{2\pi}{3}$ b) $x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{3\pi}{2}$ c) $x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \pi$

d) $x_1 = \frac{3\pi}{4},\ x_2 = \pi$ e) $x = \frac{5\pi}{4}$ f) $x = \frac{2\pi}{3}$

TG - 025 Rezolvați ecuația: $\sin 4x + 3\sin 2x = 0$.

a) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \pm\arccos\left(-\frac{3}{2} \right) + 2k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

b) $x \in \left\{ \pm\arccos\left(-\frac{3}{2} \right) + 2k\pi \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

c) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} \right\},\ k \in \mathbf{Z}$

e) $x \in \{ k\pi \},\ k \in \mathbf{Z}$

f) $x \in \{ 2k\pi \},\ k \in \mathbf{Z}$

TG - 026 Rezolvați ecuația: $\sin x \cos x = \dfrac{3}{2}$.

a) $x \in \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left\{ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ c) $x \in \left\{ k\dfrac{\pi}{4} \right\}, k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left\{ k\dfrac{\pi}{3} \right\}, k \in \mathbf{Z}$ e) $x \in \left\{ (-1)^k \arcsin\dfrac{3}{2} \right\}, k \in \mathbf{Z}$ f) ecuația nu are soluții

TG - 027 Să se restrângă expresia: $E = \dfrac{\sin\left(45^0 + x\right) - \cos\left(45^0 + x\right)}{\sin\left(45^0 + x\right) + \cos\left(45^0 + x\right)} - \operatorname{tg} x$.

a) $E = 0$ b) $E = 1$ c) $E = \operatorname{tg} x$ d) $E = \operatorname{ctg} x$ e) $E = \sin x$ f) $E = \cos x$

TG - 028 Dacă $A_1 = \cos\theta$, $A_2 = \cos 2\theta$, iar $A_k = 2\cos\theta \cdot A_{k-1} - A_{k-2}$, pentru orice $k \in \mathbf{N}, (k > 2)$, să se determine A_4.

a) $\sin 3\theta$ b) $\cos 3\theta$ c) $\sin 4\theta$ d) $\cos 4\theta$ e) $\sin 5\theta$ f) $\cos 5\theta$

TG - 029 Determinați valoarea constantei $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru care are loc egalitatea

$\dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = \alpha \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbf{Z}} \cup \left\{ k\dfrac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbf{Z}} \right)$.

a) $\alpha = 2$ b) $\alpha = 1$ c) $\alpha = 3$ d) $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e) $\alpha = 4$ f) $\alpha = \dfrac{3}{2}$

TG - 030 Să se verifice că următoarea expresie este independentă de x

$$E = 2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - 3\left(\cos^4 x + \sin^4 x\right).$$

a) $E = -1$ b) $E = 0$ c) $E = 1$ d) $E = 2$ e) $E = -2$ f) $E = \dfrac{1}{4}$

TG - 031 Să se restrângă expresia $E=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos 2^n\alpha$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) $\dfrac{\sin 2^n\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$ b) $\dfrac{\sin 2^n\alpha}{2^n\sin\alpha}$ c) $\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$

d) $\dfrac{\cos 2^n\alpha}{2^n\cos\alpha}$ e) $\dfrac{\cos 2^n\alpha}{2^{n+1}\cos\alpha}$ f) $\dfrac{\cos 2^{n+1}\alpha}{2^n\sin\alpha}$

TG - 032 Să se calculeze expresia: $E=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $-\dfrac{1}{4}$ e) 1 f) $\dfrac{3}{2}$

TG - 033 Dacă $\cos x=\dfrac{1}{7}$, $\cos y=\dfrac{13}{14}$ şi $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $x-y$.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{5\pi}{4}$ f) π

TG - 034 Ştiind că $\operatorname{ctg} x=2$, să se calculeze: $E=\dfrac{\sin^2 x-2\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $-\dfrac{3}{7}$ e) $\dfrac{7}{3}$ f) $-\dfrac{7}{3}$

TG - 035 Să se calculeze valoarea expresiei: $E=\dfrac{\sin\dfrac{2x}{3}-\operatorname{tg} x}{\cos x-\operatorname{ctg} 2x}$ pentru $x=\dfrac{\pi}{4}$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{1}{3}$

TG - 036 Ştiind că $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $-\frac{4}{3}$ f) $\frac{2}{3}$

TG - 037 Să se afle valoarea numerică a produsului $P = \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{1}{8}$

TG - 038 Să se afle $\alpha \in [0, \pi]$ pentru care avem $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3} = \alpha$.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{2\pi}{3}$ f) $\frac{3\pi}{4}$

TG - 039 Care sunt soluțiile ecuației: $\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$ din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

a) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$ b) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right\}$ c) $x \in \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

d) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ e) $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$ f) $x \in \left\{0, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}\right\}$

TG - 040 Să se calculeze

$$S=\cos^4 10^0+\cos^4 50^0+\cos^4 70^0$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{9}{8}$ d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{1}{9}$ f) $\frac{7}{8}$

TG - 041 Să se rezolve ecuația: $\sin\left(x+20^0\right)+\cos\left(x-10^0\right)-\sin\left(x-40^0\right)=\sqrt{3}$.

a) $x\in\left\{30^0+k\cdot 360^0\right\}$ b) $x\in\left\{60^0+k\cdot 360^0\right\}$

c) $x\in\left\{45^0+k\cdot 360^0\right\}$ d) $x\in\left\{-20^0+k\cdot 180^0\right\}\bigcup\left\{40^0+k\cdot 180^0\right\}$

e) $x\in\left\{20^0+k\cdot 360^0\right\}\bigcup\left\{-40^0+k\cdot 360^0\right\}$ f) $x\in\left\{20^0+k\cdot 180^0\right\}\bigcup\left\{40^0+k\cdot 180^0\right\}$

TG - 042 Să se determine soluția generală a ecuației:

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+\frac{1}{2}=0.$$

a) $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$ b) $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$

c) $x\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $x\in\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{3\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}$

e) $x\in\left\{(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\}$ f) $x\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{6}\right\}$

pentru orice $k\in\mathbb{Z}$

TG - 043 Să se determine toate soluțiile reale ale ecuației:

$$\arccos x\sqrt{3}+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

a) $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{\pm\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ f) $\varnothing$

TG - 044 Determinați perioada principală a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos\frac{7x}{5}$.

a) 0 b) $\frac{7\pi}{10}$ c) 35π

d) $\frac{10\pi}{7}$ e) $\frac{5\pi}{7}$ f) $\frac{3\pi}{4}$

TG - 045 Să se calculeze expresia $E=\frac{\sin 60^0-\sin 30^0}{\cos 30^0+\cos 60^0}$

a) $2+\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}-2$ c) $\sqrt{2}-3$

d) $3+\sqrt{2}$ e) $2-\sqrt{3}$ f) $2+\sqrt{2}$

TG - 046 Care este mulțimea tuturor valorilor parametrului real a pentru care ecuația $\cos x-\sin x=a$, admite soluții?

a) $\varnothing$ b) $[-1,1]$ c) $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

d) $[-2,2]$ e) $\mathbf{R}$ f) $\left[-\frac{1}{2},2\right]$

TG - 047 Să se determine soluțiile ecuației: $\sin\left(\frac{1}{5}\arccos x\right)=1$.

a) $x\in\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right]$ b) $x\in\left[-1,-\frac{1}{5}\right]$ c) $x\in\mathbf{R}$

d) $x\in\varnothing$ e) $x\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{6}+k\pi\right\},k\in\mathbf{Z}$ f) $x=\frac{1}{5}$

TG - 048 Să se calculeze expresia: $\dfrac{\sin x + tgx}{\cos x + ctgx}$, ştiind că avem $\cos x = \dfrac{2}{3}$, $x \in [0, \pi / 2]$.

a) $\dfrac{3}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)$ b) $\dfrac{4}{3}\left(3+\sqrt{5}\right)$ c) $\dfrac{16}{25}\left(3-\sqrt{5}\right)$

d) $\dfrac{16}{25}\left(3+\sqrt{5}\right)$ e) $\dfrac{25}{16}\left(3-\sqrt{5}\right)$ f) $\dfrac{25}{16}\left(3+\sqrt{5}\right)$

TG - 049 Arătaţi că următoarea expresie este independentă de *x*,

$$E = \frac{1+\sin^2 x}{2+\mathrm{ctg}^2 x} + \frac{1+\cos^2 x}{2+\mathrm{tg}^2 x}.$$

a) $E = \dfrac{1}{2}$ b) $E = \dfrac{1}{3}$ c) $E = \dfrac{1}{4}$ d) $E = 1$ e) $E = 2$ f) $E = 3$

TG - 050 Să se verifice că expresia $E = \cos^2(x-y) + \cos^2(x+y) - \cos 2x \cos 2y$ este independentă de x şi y .

a) $E = -1$ b) $E = 0$ c) $E = -\dfrac{1}{2}$ d) $E = \dfrac{1}{2}$ e) $E = 1$ f) $E = -4$

TG - 051 Să se scrie sub formă de produs de funcţii trigonometrice expresia:

$$E = \sin\frac{5\pi}{24} + \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{11\pi}{24}$$

a) $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{5\pi}{48}$ b) $4\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{19\pi}{48}$ c) $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{19\pi}{48}$

d) $4\cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{5\pi}{48}$ e) $4\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{48}$ f) $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{48}$

TG - 052 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

a) $x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ c) $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ e) $x \in \left\{ k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ f) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} \right\}, k \in \mathbf{Z}$

TG - 053 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației:

$$2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) + \sin^4 x + \cos^4 x = 3.$$

a) $x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ b) $x \in \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}, k \in \mathbf{Z}$ c) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbf{Z}$

d) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{3} \right\}, k \in \mathbf{Z}$ e) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{4} \right\}, k \in \mathbf{Z}$ f) $x \in \left\{ k\frac{\pi}{6} \right\}, k \in \mathbf{Z}$

TG - 054 Ştiind că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, să se calculeze $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{3}{4}$

TG - 055 Să se transforme în produs următoarea expresie:

$$S = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x.$$

a) $6\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$ b) $6\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x$ c) $6\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$

d) $6\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ e) $6\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x$ f) $6\cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

TG - 056 Determinați toate valorile lui $x \in [0,5]$ care verifică acuația:

$$2\arccos\frac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{5}$$

a) $\{0,1\}$ b) $\{0,5\}$ c) $[0,1]$ d) $[0,5]$ e) $\{0,3\}$ f) $\{1,5\}$

TG - 057 Să se calculeze

$$\frac{1}{cos^2 15^0}+\frac{1}{sin^2 15^0}$$

a) 4   b) 16   c) 24   d) $4\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$ f) $16\sqrt{2}$

TG - 058 Să se calculeze: $\dfrac{1}{\sin 10^0}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) $\dfrac{3}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG - 059 Să se arate că funcția $f(x)=a\sin x+b\cos x,\quad a,b\in\mathbf{R}^*$ se poate scrie sub forma $f(x)=m\sin(x+\alpha)$, determinându-se m şi $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

a) $m=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha=\arcsin\dfrac{b}{a}$

b) $m=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha=\text{arctg}\dfrac{b}{a}$

c) $m=\sqrt{a^2-b^2}$, $\alpha=\text{arctg}\dfrac{b}{a}$

d) $m=a^2+b^2$, $\alpha=\text{arctg}\dfrac{b}{a}$

e) $m=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha=\text{arctg}\dfrac{a}{b}$

f) $m=\sqrt{a^2-b^2}$, $\alpha=\arccos\dfrac{b}{a}$

TG - 060 Să se calculeze:

$$\frac{\operatorname{tg}15^0+\operatorname{ctg}15^0}{\cos 15^0-\sin 15^0}$$

a) 1 b) 4 c) $3\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$ f) $\sqrt{2}$

TG - 061 Să se descompună în produs expresia

$$E=\sin 3x+\sin 2x+\sin x$$

a) $2\sin 2x\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ b) $4\sin x\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $4\sin 2x\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ d) $4\sin 2x\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

e) $4\cos 2x\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ f) $4\sin x\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

TG - 062 Care sunt valorile lui $a\in\mathbb{R}$, pentru care expresia:

$$E=\frac{4\cos^2 x+\cos 2x+\cos 2a}{\cos 2a-\cos 2x}$$ nu depinde de x ?

a) $a=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ b) $a=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ c) $a=2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

d) $a=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ e) $a=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ f) $a=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

TG - 063 Fie $E=\dfrac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}$.

Să se calculeze valoarea expresiei *E*, pentru $y=\dfrac{7\pi}{12}$.

a) $\sqrt{3}$ b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $2\operatorname{tg} x$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$ f) $\sqrt{2}$

TG - 064 Să se restrângă expresia: $\Omega=\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2^n}\right)$

a) $2^n\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$ b) $2^n\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$ c) $2^n\operatorname{tg}(x/2)\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$

d) $2^n\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$ e) $2^n\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$ f) $2^n\operatorname{ctg}(x/2)\cdot\operatorname{tg}\left(x/2^n\right)$

TG – 065 Să se calculeze:

$$E=\sin^8 x-\cos^8 x+4\cos^6 x-6\cos^4 x+4\cos^2 x$$

a) 1 b) 2 c) $\cos x$ d) $\sin x$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) 4

TG - 066 Să se determine soluțiile din intervalul $[0,\pi]$ ale ecuației

$$4\sin^4 x-3\sin^2 2x=1-2\cos 2x.$$

a) $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}$

d) $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{6},\dfrac{3\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$ e) $\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{11\pi}{12}$ f) $\dfrac{\pi}{24},\dfrac{5\pi}{24},\dfrac{7\pi}{24},\dfrac{11\pi}{24}$

TG - 067 Să se determine toate valorile parametrului real m pentru care ecuația:

$\sqrt{3}\sin x-\cos x+m-1=0$, are două soluții în intervalul $\left[0,4\pi\right]$.

a) $m=2$ b) $m\in\left\{-1,3\right\}$ c) $m\in\left[-1,3\right]$

d) $m=\frac{1}{2}$ e) $m=1$ f) $m=-\frac{1}{2}$

TG – 068 Să se determine toate valorile lui $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația:

$m\left(\sin x-\cos x\right)^2-\cos 4x-1=0$, admite soluții.

a) $m\in\left[0,4\right]$ b) $m\in\left[-2,2\right]$ c) $m\in\mathbf{R}$

d) $m\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$ e) $m\in\left[-1,1\right]$ f) $m\in\left[-4,4\right]$

TG - 069 Să se determine toate valorile parametrului real λ pentru care ecuația:

$\cos\left(x-\lambda\right)+\cos\left(x+\lambda\right)=1$, admite soluții.

a) $\lambda\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\left(2k+1\right)\pi-\frac{\pi}{3},\left(2k+1\right)\pi+\frac{\pi}{3}\right]$

b) $\lambda\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\lambda\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\lambda\in\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\left(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$ e) $\lambda\in\varnothing$ f) $\lambda\in\mathbf{R}$

TG - 070 Să se calculeze valoarea expresiei: $E(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$

pentru argumentele x care verifică ecuația $8(\sin x+\cos x)+3\sin 2x=0$.

a) 1 b) 2 c) -1 d) -2 e) -3 f) $-\frac{1}{3}$

TG - 071 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației:

$$(1-\sin x)^2+\sin^2(1-x)=0.$$

a) $x\in\mathbb{R}$ b) $x\in\varnothing$ c) $x\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{k}{2}+k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

d) $x\in\{1-k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ e) $x\in\{k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ f) $x\in\left\{k\frac{\pi}{4}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

TG - 072 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației:

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}.$$

a) $x\in\{3,5\}\cup\{k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ b) $x\in\{3,5\}\cup\left\{k\frac{\pi}{2}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

c) $x\in\{5\}\cup\{k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ d) $x\in\{3\}\cup\{k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$

e) $x\in\{2k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ f) $x\in\{0\}$

TG - 073 Determinaţi mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei: $\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2$.

a) $x\in\{k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ b) $x\in\left\{k\frac{\pi}{4}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$ c) $x\in\left\{\frac{2\pi}{5}+\frac{8k\pi}{5}\right\}\cap\{2k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$

d) $x\in\left\{\frac{2\pi}{5}+\frac{8k\pi}{5}\right\}\cup\{2k\pi\},\ k\in\mathbb{Z}$ e) $x\in\left\{\frac{2k\pi}{5}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$ f) $x\in\left\{\frac{k\pi}{3}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

TG - 074 Determinaţi mulţimea tuturor valorilor parametrului $m\in\mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $\sin x-\cos x=m+1$ admite rădăcini reale.

a) $m\in(0,2)$ b) $m\in(0,2]$ c) $m\in\left(-\frac{9}{8},0\right)$

d) $m\in\left[-\frac{9}{8},0\right]$ e) $m\in\left[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right]$ f) $m\in\left(-\frac{9}{8},2\right)$

TG - 075 Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

a) $m\in\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}$ b) $m\in\left\{-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}$

c) $m\in\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}\ k\in\mathbb{Z}$ d) $m\in\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\ k\in\mathbb{Z}$

e) $m\in\left\{k\frac{\pi}{3}\right\},k\in\mathbb{Z}$ f) $m\in\left\{k\frac{\pi}{4}\right\},k\in\mathbb{Z}$

TG - 076 Dacă $\sin 2(a+c)=p\sin 2b$, să se calculeze în funcţie de p expresia:

$$E=\frac{tg(a+b+c)}{tg(a-b+c)}$$

a) $\frac{2p-1}{2p+1}$ b) $\frac{2p-1}{p-1}$ c) $\frac{p+1}{2p-1}$ d) $\frac{3p-1}{p+1}$ e) $\frac{p+1}{p-1}$ f) $\frac{p-1}{p+1}$

TG - 077 Să se transforme în produs de funcții trigonometrice expresia:

$$E = 1 + \cos x + \cos 2x$$

a) $2\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $4\cos x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ d) $4\cos x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

e) $4\cos x \cos\frac{x}{2}$ f) $4\cos x \cos\frac{3x}{2}$

TG - 078 Calculați produsul: $P = \cos 10^0 \cos 30^0 \cos 50^0 \cos 70^0$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{16}$ e) $\frac{5}{8}$ f) $\frac{1}{2}$

TG - 079 Să se calculeze: $\mathrm{tg}1^0 \cdot \mathrm{tg}2^0 \cdot \mathrm{tg}3^0 \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}89^0$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\sqrt{3}$ e) 10 f) 2

TG - 080 Să se determine soluțiile ecuației: $\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5x} = \frac{\pi}{4}$.

a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm\frac{1}{2}$ c) $x = \pm\frac{1}{3}$

d) $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $x = \pm\sqrt{3}$ f) $x = \pm\frac{1}{4}$

TG - 081 Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x\left(1+\operatorname{tg} x\right)}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\left(1+\operatorname{ctg} x\right)}=\sqrt{2}\,.$$

a) $x\in\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\},\ k\in\mathbf{Z}$ b) $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right\},\ k\in\mathbf{Z}$

c) $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\right\},\ k\in\mathbf{Z}$ d) $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\},\ k\in\mathbf{Z}$

e) $x\in\varnothing$ f) $x\in\left\{k\frac{\pi}{3}\right\},\ k\in\mathbf{Z}$

TG - 082 Determinați mulțimea tuturor soluțiilor ecuației:

$$\cos\left(\pi x\right)+2\cos\left(\pi^2 x\right)=3\,.$$

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x\in\varnothing$

d) $x\in\mathbf{R}$ e) $x=2$ f) $x=k,\ k\in\mathbf{Z}$

TG - 083 Să se arate că funcția: $f\left(x\right)=\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ se poate scrie sub forma $f\left(x\right)=m\cos\left(\alpha+x\right)$, determinându-se m şi $\alpha\in\left(0,\pi\right)$.

a) $m=-\sqrt{2},\ \alpha=\frac{3\pi}{4}$ b) $m=\sqrt{2},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$ c) $m=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{2}$

d) $m=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha=\frac{3\pi}{4}$ e) $m=\sqrt{2},\ \alpha=\frac{3\pi}{4}$ f) $m=1,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$

TG - 084 Determinați valorile lui $n \in \mathbf{N}$ şi $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pentru care expresia

$E = 3 - 4\sin^2 x$ se poate scrie sub forma $E = n\sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x)$.

a) $n = 4,\ \alpha = \frac{\pi}{3}$ b) $n = 3,\ \alpha = \frac{\pi}{6}$ c) $n = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{4}$

d) $n = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{2}$ e) $n = 8,\ \alpha = \frac{\pi}{2}$ f) $n = 1,\ \alpha = 0$

TG - 085 Să se determine valorile lui $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuația:

$$\left(1 - \lambda^2\right)\sin 3x + 2\lambda\cos 3x = \left(1 + \lambda^2\right)^2 \text{ să aibă soluții reale.}$$

a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = -1$ c) $\lambda = 0$

d) $\lambda = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ e) $\lambda \in \{1, 2\}$ f) $\lambda \in \{2, 3\}$

TG - 086 Să se rezolve ecuația: $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\right)$ în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) $\frac{9\pi}{14}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{4\pi}{3}$

d) $\frac{7\pi}{12}$ e) $\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{5\pi}{8}$

TG - 087 Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbf{R}$, ecuația

$$8\operatorname{ctg}8x + 4\operatorname{tg}4x + 2\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}x - \frac{m-1}{\sin x} = \sqrt{3}\text{, admite rădăcini reale?}$$

a) $m \in [0,1]$ b) $m \in [0,2]$ c) $m \in [-1,3]$ d) $m \in [1,2]$ e) $m \in [-1,0]$ f) $m = 0$

TG - 088 În triunghiul ascuțit unghic ABC au loc relațiile: $\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ şi $\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Să se calculeze $\sin(B-C)$.

a) $\sin(B-C)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin(B-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin(B-C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin(B-C)=\frac{1}{2}$ e) $\sin(B-C)=1$ f) $\sin(B-C)=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

TG - 089 Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, în care există relația $a+b=3c$. Să se calculeze $\sin 2B$ şi $tg\frac{C}{2}$.

a) $\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{2},\ tg\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ b) $\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{2},\ tg\frac{C}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\sin 2B=\frac{1}{2},\ tg\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ d) $\sin 2B=\frac{24}{25},\ tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

e) $\sin 2B=\frac{12}{13},\ tg\frac{C}{2}=\frac{2}{3+\sqrt{13}}$ f) $\sin 2B=\frac{12}{25},\ tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

TG - 090 Se dă triunghiul *ABC* în care $AB=R\sqrt{3}$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right)=\alpha$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului. Să se determine celelalte laturi în funcție de α şi **R**.

a) $R\sqrt{3},\ 2R\sin\alpha,\ 2R\sin\left(\alpha+60^0\right)$ b) $R\sqrt{3},\ 2R\sin\alpha,\ 2R\sin\left(\alpha+30^0\right)$

c) $R\sqrt{3},\ 2R\sin\alpha,\ 2R\sin\alpha$ d) $R\sqrt{3},\ R\sqrt{3}, 2R\sin\alpha$

e) $R\sqrt{3},\ R,\ R$ f) $R\sqrt{3},\ 2R\sin\left(\alpha+30^0\right),\ 2R\sin\alpha$

TG - 091 Fie *ABC* un triunghi dreptunghic isoscel, având unghiul drept în punctul C. Ipotenuza $\overline{AB}$ se prelungeşte cu un segment $\overline{BD}$ congruent cu $\overline{BC}$ şi se uneşte *C* cu *D*. Care din valorile de mai jos reprezintă pe sin *D*.

a) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ f) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

TG - 092 Între laturile unui triunghi avem relația: $2a = b + c$, iar între unghiurile sale $2\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Triunghiul este:

a) ascuțit unghic oarecare b) obtuz unghic oarecare c) isoscel

d) dreptunghic e) echilateral f) oarecare

TG - 093 În triunghiul *ABC* se dă $b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}$ şi $m\left(\hat{C}\right) = 60^0$. Să se calculeze latura *a*.

a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$ b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

d) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ e) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$ şi $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ f) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

TG - 094 Un triunghi *ABC* cu lungimile laturilor 13, 14, 15 are vârful *A* opus laturii de mărime mijlocie. Care este valoarea lui $tg\frac{A}{2}$?

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{6}{7}$ e) 1 f) $\frac{8}{7}$

TG - 095 În triunghiul *ABC*, $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{4}$, $AB=a$ şi $AC=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

Să se calculeze tgB.

a) $tgB=2$ b) $tgB=3$ c) $tgB=2$

d) $tgB=3\sqrt{3}$ e) $tgB=1$ f) $tgB=\sqrt{3}$

TG - 096 Unghiurile unui triunghi *ABC* au laturile proporționale cu numerele 2, $\sqrt{6}$ şi respectiv $1+\sqrt{3}$. Să se determine $m\left(\hat{A}\right), m\left(\hat{B}\right)$ şi $m\left(\hat{C}\right)$.

a) $m\left(\hat{A}\right)=45^0, m\left(\hat{B}\right)=30^0, m\left(\hat{C}\right)=105^0$ b) $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{B}\right)=45^0, m\left(\hat{C}\right)=90^0$

c) $m\left(\hat{A}\right)=105^0, m\left(\hat{B}\right)=15^0, m\left(\hat{C}\right)=60^0$ d) $m\left(\hat{A}\right)=30^0, m\left(\hat{B}\right)=90^0, m\left(\hat{C}\right)=60^0$

e) $m\left(\hat{C}\right)=60^0, m\left(\hat{B}\right)=45^0, m\left(\hat{A}\right)=75^0$ f) $m\left(\hat{A}\right)=45^0, m\left(\hat{B}\right)=60^0, m\left(\hat{C}\right)=75^0$

TG - 097 Determinați unghiurile triunghiului ABC ştiind că laturile sale au lungimile:

$AB=20,\ BC=10\left(\sqrt{3}+1\right)$ şi $CA=10\sqrt{2}$.

a) $\hat{A}=90^0, \hat{B}=30^0, \hat{C}=60^0$; b) $\hat{A}=105^0, \hat{B}=30^0, \hat{C}=45^0$;

c) $\hat{A}=75^0, \hat{B}=45^0, \hat{C}=60^0$ d) $\hat{A}=90^0, \hat{B}=15^0, \hat{C}=75^0$

e) $\hat{A}=80^0, \hat{B}=30^0, \hat{C}=70^0$ f) $\hat{A}=105^0, \hat{B}=15^0, \hat{C}=60^0$

TG - 098 Dacă *A*,*B*,*C* sunt măsurile unghiurilor unui triunghi să se calculeze:

$$E=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C$$

a) $E=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C$; b) $E=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{tg}C$ c) $E=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$

d) $E=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$ e) $E=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{ctg}C$ f) $E=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{tg}C$

TG - 099 În ce unghi ABC poate avea loc relația

$$\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

a) oarecare b) numai în triunghiuri dreptunghice c) numai în triunghi isoscel
d) numai în triunghiuri echilaterale e) numai în triunghiuri dreptunghice isoscele
f) relația nu are loc în nici un triunghi

TG – 100 Să se precizeze valoarea maximă a expresiei

$$E=\frac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}$$

Stiind că *A*,*B*,*C* sunt măsurile unghiurilor unui triunghi ascuțitunghic.

a) $E_{\max}=1$ b) $E_{\max}=\frac{1}{2}$ c) $E_{\max}=\frac{2}{3}$

d) $E_{\max}=\frac{4}{9}$ e) $E_{\max}=\frac{8}{27}$ f) $E_{\max}=2$

TG - 101 Dacă *A, B, C* sunt unghiurile unui triunghi *ABC* şi *R* este raza cercului circumscris acestui triunghi, să se calculeze expresia $E=1+\cos A\cdot\cos(B-C)$.

a) $E=\frac{b^2-c^2}{R^2}$ b) $E=\frac{b^2+c^2}{R^2}$ c) $E=\frac{b^2+c^2}{4R^2}$

d) $E=\frac{b^2-c^2}{4R^2}$ e) $E=\frac{bc}{4R^2}$ f) $E=\frac{b^2+c^2}{2R^2}$

TG - 102 Să se determine valoarea expresiei:

$$E=\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$ într-un triunghi oarecare.

a) $E=a+b+c$ b) $E=-(a+b+c)$ c) $E=a^2+b^2+c^2$

d) $E=0$ e) $E=\frac{a+b+c}{2}$ f) $E=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

TG - 103 Dacă în triunghiul ABC avem $tg\frac{A}{2}=\frac{1}{3}$ şi $b+c=3a$, precizați care din răspunsurile de mai jos este corect.

a) $m(\hat{B})=\frac{\pi}{2}$ sau $m(\hat{C})=\frac{\pi}{2}$ b) $m(\hat{A})=m(\hat{B})$ c) $m(\hat{A})=\frac{\pi}{2}$

d) $m(\hat{B})=\frac{\pi}{4}$ sau $m(\hat{C})=\frac{\pi}{4}$ e) $m(\hat{A})=m(\hat{C})$ f) $m(\hat{A})=\frac{\pi}{3}$

TG - 104 În triunghiul ABC are loc relația: $a^2+b^2+c^2=8R^2$. Ce putem afirma despre acesta?

a) este un triunghi isoscel b) este un triunghi echilateral

c) este un triunghi dreptunghic d) este un triunghi oarecare

e) relația din enunț nu poate avea loc în nici un fel de triunghi

f) este triunghi isoscel şi dreptunghic

TG - 105 Între unghiurile unui triunghi există relația: $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$. Ce fel de triunghi este ABC ?

a) echilateral b) dreptunghic c) obtuzunghic

d) isoscel e) oarecare f) isoscel şi dreptunghic

TG - 106 În triunghiul ABC are loc relația: $\frac{a+c}{b}=ctg\frac{B}{2}$. Care din numerele de mai jos reprezintă măsura unuia dintre unghiurile triunghiului ?

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{\pi}{12}$

TG - 107 Dacă între lungimile laturilor triunghiurilor ABC are loc relația:

$b^2 - c^2 = 2a^2$ ce putem afirma despre măsura unghiului $\hat{A}$.

a) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{4}$ b) $0<m\left(\hat{A}\right)\le\frac{\pi}{6}$ c) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{3}$

d) $m\left(\hat{A}\right)>\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}<m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{3}$ f) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{2}$

TG – 108 Fie triunghiul *ABC* cu lungimile laturilor *a*,*b*,*c* şi aria $S=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$.

Determinați măsurile unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

a) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{3}, m\left(\hat{B}\right)=\frac{\pi}{2}, m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{6}$ b) $m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{2}, m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{4}$

c) $m\left(\hat{A}\right)=m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{3}$ d) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{2\pi}{3}, m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{6}$

e) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{2\pi}{3}, m\left(\hat{B}\right)=\frac{\pi}{4}, m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{12}$ f) $m\left(\hat{A}\right)=\frac{\pi}{2}, m\left(\hat{B}\right)=\frac{\pi}{6}, m\left(\hat{C}\right)=\frac{\pi}{3}$

TG - 109 Aria triunghiului *ABC* este de 16 cm^2. Ştiind că $AC=5$ cm, $BC=8$ cm şi $\hat{C}$ este obtuz să se calculeze cos *C*.

a) $-\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{5}$

TG - 110 Să se calculeze aria triunghiului *ABC*, ştiind că $a=6$, $B=60^0$ şi $C=45^0$.

a) $6\left(3+\sqrt{3}\right)$ b) $9\left(3-\sqrt{3}\right)$ c) $9\left(3+\sqrt{3}\right)$

d) $6\left(3-\sqrt{3}\right)$ e) $\frac{9}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ f) $\frac{9}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$

TG - 111 Lungimile laturilor unui triunghi oarecare sunt trei numere consecutive, iar aria triunghiului este 84. Care sunt lungimile acestor laturi?

a) 10, 11, 12 b) 11, 12, 13 c) 12, 13, 14

d) 13, 14, 15 e) 14, 15, 16 f) 15, 16, 17

TG - 112 Într-un triunghi *ABC* laturile *a*, *b, c* sunt îm progresie aritmetică, *a* fiind termenul din mijloc. Să se calculeze expresia:

$$E = tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}.$$

a) $E = \frac{1}{3}$ b) $E = \frac{1}{6}$ c) $E = \frac{1}{2}$

d) $E = 3$ e) $E = 6$ f) $E = 2$

TG - 113 Dacă *A*, *B*, *C* sunt unghiurile unui triunghi, iar tgA, tgB, tgC sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, care dintre relațiile de mai jos este adevărată?

a) $tgA\cdot tgC = 0$ b) $tgA = -ctgC$ c) $tgA\cdot tgC = 3$

d) $tgA = ctgC$ e) $tgA = -tgC$ f) $ctgA\cdot ctgC = 0$

TG - 114 În triunghiul dreptunghic *ABC*, $m\left(\hat{C}\right) = 90^0$, se cunosc lungimea *a* a catetei (*BC*) şi raza *r* a cercului înscris în triunghi. Să se determine lungimile celorlalte laturi *b, c* ale triunghiului.

a) $b = \frac{r\left(a-r\right)}{a-2r},\ c = \frac{a^2 - r\left(a-r\right)}{a-2r}$ b) $b = \frac{2r\left(a-r\right)}{a-2r},\ c = \frac{a^2 - 2r\left(a-r\right)}{a-2r}$

c) $b = \frac{2ar - r^2}{a-2r},\ c = \frac{\left(a-r\right)^2}{a-2r}$ d) $b = \frac{ar}{2},\ c = \frac{2a - r^2}{a-2r}$ e) $b = \frac{r^2 - a^2}{r-2a},\ c = \frac{\left(r+a\right)^2}{2a-r}$

f) Nici una din afirmațiile a), b), c), d), e) nu este corectă.

TG - 115 Calculați suma $\sin A+\sin B+\sin C$ în funcție de aria S a triunghiului *ABC*, aria S_1 a cercului înscris în triunghi şi aria S_2 a cercului circumscris triunghiului.

a) $\dfrac{\pi S}{\sqrt{S_1S_2}}$ b) $S\sqrt{S_1S_2}$ c) $\dfrac{\pi\cdot S^2}{S_1S_2}$ d) $S\left(\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}\right)$ e) $\dfrac{S_1S_2}{S}$ f) $\dfrac{\pi\sqrt{S_1S_2}}{S}$

TG - 116 Dacă *A, B, C* sunt unghiurile unui triunghi, să se calculeze expresia:

$$E=\frac{\cos B+\cos C}{tg\dfrac{A}{2}\left(\sin B+\sin C\right)}.$$

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 2 d) $\dfrac{2}{3}$ e) 3 f) $\dfrac{1}{3}$

TG - 117 Fie în planul (Oxy) punctele A(5,6), B(-4,3), C(-3,-2) şi D(6,1). Ce figură geometrică reprezintă patrulaterul ABCD ?

a) dreptunghi b) romb c) pătrat

d) trapez isoscel e) trapez dreptunghic f) paralelogram

TG - 118 Se dau punctele A(3,5), M(-1,3), N(4,1). Să se scrie ecuațiile dreptelor ce trec prin A şi fac unghiurile de 45° şi, respectiv ,135° cu dreapta (MN).

a) $3x - 7y + 26 = 0,\ 7x + 3y - 36 = 0$ b) $2x - 5y + 19 = 0,\ 5x -2y -5 =0$

c) $x - y + 2 = 0,\ x + y - 8 = 0$ d) $3x - 2y + 1 = 0,\ 2x + 3y - 21 = 0$

e) $x - 2y + 7 = 0,\ 2x + y - 11 = 0$ f) $3x - 7y +1 = 0,\ 7x - 3y - 2 = 0$

TG - 119 Fie în planul (Oxy) punctele A(1,2), B$\left(-\dfrac{5}{3},0\right)$ şi C(0,2). Să se afle lungimea bisectoarei interioare unghiului $\hat{A}$ în triunghiul $\overline{ABC}$.

a) $\sqrt{5}$ b) $\dfrac{\sqrt{10}}{13}$ c) $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ d) $\dfrac{6\sqrt{10}}{13}$ e) $\dfrac{7\sqrt{5}}{13}$ f) $\dfrac{8\sqrt{10}}{13}$

TG - 120 Să se afle coordonatele vârfurilor unui triunghi cunoscând mijloacele laturilor P(3,-1), Q(1,7), R(-4,3).

a) (-1,-4), (5,2), (-3,12) b) (-2,3), (8,-5), (-6,19) c) (-2,-5), (4,19), (-12,13)
d) (-2,-5), (8,3), (-6,11) e) (2,-3), (-10,9), (0,17) f) (1,-3), (5,1), (-9,9)

TG - 121 Se dau punctul A(-3,4) şi dreapta (d) $2x-y+5=0$. Să se determine coordonatele punctului B, simetricul lui A faţă de dreapta (d).

a) B(-1,3) b) B(2,1) c) B(1,-2)

d) B(1,2) e) B(3,-4) f) B(-1,2)

TG - 122 Fiind date numerele $a, b \in \mathbf{R}^*$, se consideră punctele A(a,0), B(0,b) şi M(0,λ) situate pe axele de coordonate (Ox) şi (Oy). Să se determine λ astfel ca proiecţia punctului M pe dreapta (AB) să coincidă cu mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

a) $\dfrac{a^2-b^2}{a}$ b) $\dfrac{a^2-b^2}{b}$ c) $\dfrac{a^2+b^2}{a}$

d) $\dfrac{b^2-a^2}{2a}$ e) $\dfrac{b^2-a^2}{2b}$ f) $\dfrac{a^2+b^2}{b}$

TG – 123 În sistemul cartezian (Oxy) se consideră punctele A(3,0), B(0,2), M(3,-3) şi N(-2,2) . Să se determine punctul de concurenţă al dreptelor (AN), (BM) şi al perpendicularei din O pe (AB).

a) $\left(\dfrac{18}{19},\dfrac{12}{19}\right)$ b) $\left(\dfrac{12}{19},\dfrac{18}{19}\right)$ c) $\left(\dfrac{8}{19},\dfrac{12}{19}\right)$

d) $\left(\dfrac{12}{19},\dfrac{8}{19}\right)$ e) $\left(\dfrac{18}{19},\dfrac{6}{19}\right)$ f) $\left(\dfrac{16}{19},\dfrac{18}{19}\right)$

TG - 124 Se dau punctele A(3,5), B(-1,3), C(4,1). Se cere să se scrie ecuația medianei din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x + 5y - 31 = 0$ b) $x - 2y + 7 = 0$ c) $2x + y - 11 = 0$

d) $x + 2y - 13 = 0$ e) $2x - y - 1 = 0$ f) $3x - y - 4 = 0$

TG – 125 Ştiind că punctul M(x,y) se află pe dreapta $D: x + y + 1 = 0$, să se determine minimul expresiei: $E = x^2 + y^2$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

TG – 126 Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul de intersecție al dreptelor

$(d_1)\quad x + 2y - 7 = 0,\quad (d_2)\quad 2x - y + 1 = 0$

şi este paralelă cu prima bisectoare.

a) $2x - 2y = 1;$ b) $y = x + 7;$ c) $x - y + 5 = 0$

d) $x - y + 2 = 0;$ e) $x - y + 3 = 0;$ f) $3x - 3y + 7 = 0$.

TG - 127 Se dă dreapta $(\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y - \alpha + 3 = 0$ cu $\alpha \in \mathbf{R}$. Să se determine α astfel că dacă A,B sunt intersecțiile dreptei cu (Ox), respectiv (Oy), să avem:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 10.$$

a) $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$ b) $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ $\alpha_2 = \frac{17}{4}$ c) $\alpha_1 = \frac{7}{2}$ $\alpha_2 = \frac{15}{4}$

d) $\alpha_1 = -\frac{5}{2}$ $\alpha_2 = \frac{17}{4}$ e) $\alpha_1 = \frac{5}{2}$ $\alpha_2 = -\frac{17}{2}$ f) $\alpha_1 = -\frac{7}{2}$ $\alpha_2 = -\frac{15}{4}$

TG - 128 Într-un sistem de axe rectangulare se dau dreptele:

(AB) $8x + 15y - 168 = 0$, (CA) $4x - 3y = 0$, (BC) $12x + 5y + 168 = 0$,

care formează triunghiul $\overline{ABC}$. Să se calculeze lungimea m_c a medianei din vârful C şi aria triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $m_c = 20$, $S = 255\sqrt{2}$ b) $m_c = 25$, $S = 625$ c) $m_c = 28$, $S = 420$

d) $m_c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $S = \sqrt{2996}$ e) $m_c = 17\sqrt{3}$, $S = 210\sqrt{3}$ f) $m_c = 27$, $S = 421$

TG - 129 Un triunghi isoscel cu baza $\overline{AB}$ are vârfurile A(-3,-1), B(7,5), iar C este situat pe dreapta (d) $x - y + 8 = 0$. Să se scrie ecuaţiile laturilor (AC) şi (BC).

a) $2x - y + 9 = 0$ (AC), $x + 2y - 13 = 0$ (BC) b) $x - 3y = 0$ (AC), $3x - y - 16 = 0$ (BC)

c) $2x - y + 5 = 0$ (AC), $x + 2y - 17 = 0$ (BC) d) $4x - y + 11 = 0$ (AC), $x + 4y - 27 = 0$ (BC)

e) $4x - 3y + 9 = 0$, (AC), $3x + 4y - 41 = 0$ (BC) f) $x + y + 4 = 0$ (AC), $x - y - 2 = 0$ (BC)

TG - 130 Pe catetele $\overline{OB}$ şi $\overline{OC}$ ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în afară pătrate în care vârfurile opuse lui O sunt, respectiv, D şi E. Să se determine coordonatele punctului H de intersecţie a dreptelor (CD) şi (BE), dacă B(b,0) iar C(0,c).

a) $H\left(\frac{bc^2}{b^2 + c^2 + bc}, \frac{b^2c}{b^2 + c^2 + bc}\right)$ b) $H\left(\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - bc}, \frac{b^2c}{b^2 + c^2 - bc}\right)$

c) H $\left(\frac{bc}{b+c},\frac{bc}{b-c}\right)$ d) H $\left(\frac{b^2}{b+c},\frac{c^2}{b+c}\right)$

e) H $\left(\frac{b^2}{b-c},\frac{c^2}{b-c}\right)$ f) H $\left(\frac{b^2+c^2}{bc},\frac{b^2-c^2}{bc}\right)$

TG - 131 Fie A şi B punctele în care dreapta $ax + (2a + 1)y + a^2 = 0$ taie axa (Ox), respectiv (Oy), (d_1) dreapta ce trece prin A şi este paralelă cu prima bisectoare a axelor; (d_2) dreapta care trece prin B şi este perpendiculară pe (d_1). Să se determine "a" astfel încât punctul de intersecție dintre (d_1) şi (d_2) să fie pe dreapta de ecuație $x + 5y = 1$.

a) $a = \pm 2$ b) $a = \pm 1$ c) $a = 0$, $a = 1$

d) $a = 2$, $a = 3$ e) $a = \pm 3$ f) $a = -1$, $a = 3$

TG - 132 Se dau dreptele (AB): $x - 2y + 3 = 0$, (AC): $2x - y - 3 = 0$, (BC): $3x + 2y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația înălțimii din A a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $2x - 3y + 3 = 0$ b) $6x - 9y - 1 = 0$ c) $-4x + 6y - 1 = 0$

d) $2x - 3y - 1 = 0$ e) $6x - 9y + 2 = 0$ f) $4x - 6y + 3 = 0$

TG – 133 Fie în planul (Oxy) punctele A(3,0) şi B(-1,8) . Prin A se duce o paralelă (d) la prima bisectoare, iar prin punctul B se duce o dreaptă care taie dreapta (d) într-un punct C astfel încât triunghiul $\overline{ABC}$ să fie isoscel cu baza $\overline{AB}$. Să se afle coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului $\overline{ABC}$.

a) (3,4) b) (-1,3) c) (3,5)

d) $\left(\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$ e) $\left(\frac{19}{3},\frac{20}{3}\right)$ f) $\left(\frac{17}{3},\frac{10}{3}\right)$

TG - 134 Se dau punctele A(3,0), B(-1,8) şi C astfel încât triunghiul $\overline{ABC}$ este isoscel cu baza $\overline{AB}$ şi C aparținând dreptei (d), paralela prin A la prima bisectoare. Să se determine coordonatele punctului H de intersecție a înălțimilor triunghiului.

a) H(2,4) b) $H\left(\frac{7}{3},\frac{14}{3}\right)$ c) $H\left(\frac{7}{3},-\frac{14}{3}\right)$

d) $H\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ e) $H\left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3}\right)$ f) $H\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

TG - 135 Se dau dreptele $x + y - 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ şi $x - 2y - 3 = 0$, care sunt laturile unui paralelogram. Să se scrie ecuațiile diagonalelor.

a) $2x - y = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ b) $x - 2y - 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$

c) $x - 2y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ d) $x + 4y - 1 = 0$, $-x + 2y + 3 = 0$

e) $3x + 6y - 5 = 0$, $5x + 2y - 7 = 0$ f) $3x + 6y - 5 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$

TG - 136 Fie în planul (xOy) triunghiul având laturile de ecuații $x - y + 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$ şi $x + 2y + 7 = 0$. Să se determine coordonatele ortocentrului H al acestui triunghi.

a) $H\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ b) $H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ c) $H\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$

d) $H\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ e) $H\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ f) $H\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

TG - 137 Să se determine punctul de intersecție al dreptei (d), de pantă $\frac{2}{5}$ şi care trece prin punctul (3,1), cu drepta (d') având urmele : $-\frac{8}{3}$ pe axa (Ox) şi -4 pe (Oy).

a) (1,1) b) (-1, -1) c) (2,1) d) (2,2) e) (-2, -1) f) (1,2)

TG - 138 Se dau punctele A(1,0), B(-2,4), C(-1,4), D(3,5). Să se găsească pe dreapta $y = 3x - 5$ un punct M astfel încât ariile triunghiurilor $\overline{MAB}$ şi $\overline{MCD}$ să fie egale.

a) $M_1\left(2,\frac{7}{3}\right)$, $M_2(-9, -32)$
b) $M_1\left(\frac{7}{3},2\right)$, $M_2(-9,-32)$
c) $M_1(1,-2)$, $M_2\left(\frac{5}{3},0\right)$
d) $M_1(-1,-8)$, $M_2\left(-\frac{5}{3},-10\right)$
e) $M_1(-2, -11)$, $M_2\left(\frac{1}{3},-4\right)$
f) $M_1(3,4)$, $M_2\left(\frac{2}{3},-3\right)$

TG - 139 Se dă triunghiul $\overline{ABC}$ determinat de dreptele (AB): $x + 2y - 4 = 0$, (BC): $3x + y - 2 = 0$, (CA): $x - 3y - 4 = 0$. Să se calculeze aria triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $A_{\Delta ABC} = 10$
b) $A_{\Delta ABC} = 8$
c) $A_{\Delta ABC} = 6$
d) $A_{\Delta ABC} = 5$
e) $A_{\Delta ABC} = 7$
f) $A_{\Delta ABC} = 9$

TG - 140 Se dau punctele A(2,1) şi B(-5,-3). Să se afle punctul M pe dreapta

(d) $y = x + 4$, astfel ca $m\left(\widehat{AMB}\right) = 90°$.

a) $M_1(-1,3)$, $M_2(1,5)$
b) $M_1(-2,2)$, $M_2\left(-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$
c) $M_1(-1,3)$, $M_2\left(-\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$
d) $M_1(1,5)$
e) $M(-3,1)$
f) $M_1(0,4)$, $M_2(-3,1)$

TG - 141 Să se scrie ecuația dreptei care trece prin intersecția dreptelor (d_1) $2x - 3y + 6 = 0$, (d_2) $x + 2y - 4 = 0$ şi este perpendiculară pe dreapta care trece prin P(2,2) şi intersectează axa (Ox) într-un punct aflat la distanța 4 de originea O a sistemului de axe de coordonate.

a) $x + y - 2 = 0$
b) $x - 3y + 4 = 0$
c) $x + y -2 = 0$ şi $x - 3y + 4 = 0$
d) $x - 2y + 4 = 0$ şi $6x + y - 2 = 0$
e) $4x + y - 2 = 0$
f) $x - y + 2 = 0$ şi $3x + y - 2 = 0$

TG - 142 Se dau punctele A(2,2) şi B(5,1). Să se determine punctul C situat pe dreapta $x - 2y + 8 = 0$, astfel încât aria triunghiului $\overline{ABC}$ să fie 17.

a) $C_1(12,10)$, $C_2\left(-\frac{76}{5},-\frac{18}{5}\right)$ b) $C_1(10,9)$, $C_2\left(-\frac{8}{5},-\frac{16}{5}\right)$

c) $C_1(8,8)$, $C_2\left(-\frac{12}{5},-\frac{14}{5}\right)$ d) $C_1(-20,-6)$, $C_2\left(-\frac{26}{5},\frac{7}{5}\right)$

e) $C_1(-2,3)$, $C_2\left(-\frac{14}{3},\frac{5}{3}\right)$ f) $C_1(12,10)$, $C_2\left(-\frac{12}{5},-\frac{14}{5}\right)$

TG - 143 Se dă dreapta $3x - 4y + 4 = 0$ şi punctul A(8,0). Să se afle aria triunghiului format de dreapta dată şi două drepte ce trec prin A şi fac cu axa (Ox) unghiurile de 45° şi 135°.

a) 90 b) 100 c) 105 d) 110 e) 116 f) 112

TG - 144 Se dă dreapta $5x - 12y + 32 = 0$ şi punctele A(1,-1), B(5,-3). Să se afle coordonatele punctului M egal depărtat de A şi B şi care are distanța de 4 unități până la dreapta dată.

a) $M_1(1,-6)$, $M_2(9,10)$ b) $M_1(-1,-10)$, $M_2(9,10)$ c) $M_1(2,-4)$, $M_2(-2,12)$

d) $M_1(-2,-12)$, $M_2(1,-6)$ e) $M_1(4,0)$, $M_2\left(\frac{180}{19},\frac{208}{19}\right)$ f) $M_1(0,-8)$, $M_2\left(-\frac{180}{19},-\frac{512}{19}\right)$

TG - 145 Să se determine λ astfel ca distanța de la punctul A(3,4) la dreapta variabilă $(\lambda+3)x - (\lambda-2)y + 3\lambda - 1 = 0$ să fie $d = \sqrt{10}$.

a) 4, -2 b) $1, -\frac{7}{4}$ c) $-\frac{9}{2},\frac{7}{4}$ d) $\frac{9}{2},-\frac{7}{4}$ e) $-1, \frac{7}{4}$ f) $\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$

TG - 146 Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul A(-5,7) şi sunt situate la distanța 3 de punctul B(0,7).

a) $4x + 3y - 1 = 0$, $4x - 3y + 41 = 0$ b) $4x + 5y - 15 = 0$, $4x - 5y + 55 = 0$

c) $3x - 2y + 29 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ d) $3x + 4y - 13 = 0$, $4x + 3y - 1 = 0$

e) $3x - 4y + 43 = 0$, $3x + 2y + 1 = 0$ f) $3x - 4y + 43 = 0$, $3x + 4y - 13 = 0$

TG - 147 Se dau dreptele $3x - 4y + 6 = 0$ şi $4x - 3y - 9 = 0$. Să se determine paralela la a doua bisectoare a axelor de coordonate care formează între cele două drepte un segment de $5\sqrt{2}$ unități.

a) $y = -x + 10$, $y = -x + 20$ b) $y = -x - 20$, $y = -x + 20$ c) $y = -x + 50$, $y = -x + 20$

d) $y = -x + 50$, $y = -x - 20$ e) $y = -x - 10$, $y = -x + 30$ f) $y = -x + 10$, $y = -x – 30$

TG - 148 Să se calculeze mărimea unghiului format de dreptele $2x - y - 5 = 0$ şi $x - 3y + 4 = 0$ în care se află originea axelor.

a) 30° b) 150° c) 45° d) 135° e) 60° f) 120°

TG - 149 Se consideră triunghiul cu vârfurile: A(7,4), B(5,1) şi C(1,3). Să se determine distanțele vârfurilor B şi C la mediana din vârful A.

a) $d_B = \frac{4}{\sqrt{5}}, d_C = 1$ b) $d_B = 1, d_C = \frac{4}{\sqrt{5}}$ c) $d_B = d_C = 1$

d) $d_B = d_C = \frac{3}{\sqrt{5}}$ e) $d_B = \frac{3}{\sqrt{5}}, d_C = \frac{2}{\sqrt{5}}$ f) $d_B = d_C = \frac{4}{\sqrt{5}}$

TG - 150 Fie în planul (xOy) punctul M(-2,6) şi dreapta (d) $x + 2y - 5 = 0$. Să se afle distanța simetricului punctului M în raport cu dreapta (d) până la prima bisectoare.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

TG - 151 Fie în planul (xOy) punctele A(3,3) şi B(7, -3) şi dreapta (d)

$4x$-$2y$+3=0. Să se afle punctul M de pe dreapta (d) care este echidistant faţă de punctele A şi B.

a) M(1,2) b) $M\left(-\frac{13}{4},-\frac{23}{4}\right)$ c) $M\left(-\frac{23}{4},-\frac{29}{4}\right)$

d) $M\left(\frac{1}{8},-\frac{1}{4}\right)$ e) $M\left(-\frac{29}{8},-\frac{23}{4}\right)$ f) $M\left(-\frac{13}{8},-\frac{23}{4}\right)$

TG – 152 Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele d_1 : 3x+my+2m+3=0 şi d_2 : 2x+(m-1)y+m+3=0 să coincidă.

a) $m \in \varnothing$ b) m=0 c) m=1

d) m=2 e) m=3 f) m=4

TG – 153 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât dreptele de ecuaţii (d_1) x+2y-2=0, (d_2) 2x-4y+3=0 şi (d_3) αx+y-1=0 să fie concurente:

a) α=1 b) α=0 c) $\alpha=\frac{1}{2}$ d) α=-1 e) $\alpha=-\frac{1}{2}$

TG – 154 Să se scrie ecuaţia dreptei din plan, ştiind că A(2, 3) este piciorul perpendicularei coborâtă din origine pe dreaptă.

a) 3x+2y-13=0; b) x+3y-11=0; c) 3x+y-9=0;

d) 2x+3y-13=0; e) 3x+4y-14=0; f) 4x+3y-17=0.

TG – 155 Pe dreapta care uneşte punctele A(-3,5), B(-1,2) să se determine un punct de abscisă x=5

a) (5, -1) b) (5, -7) c) (3, 5)

d) (-7, 5) e) (5, 0) f) (1,5)

TG – 156 Să se determine ecuaţia mediatoarei segmentului ce uneşte punctele (3,1) şi (4,8)

a) 9x-7y=0 b) 7x-9y=0 c) x+7y-35=0

d) 7x-y-20=0 e) x+7z-20=0 f) x-y+1=0

TG – 157 În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(-2, 0) şi B(0,1). Fie A' mijlocul segmentului [OA] şi B' simetricul lui B faţă de origine. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei (A'B') cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

a) $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

d) (-1, -1) e) (1,1) f) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

TG – 158 Să se determine vârful C al triunghiului ABC, A(1,0), B(-2,4) pentru care centrul de greutate este punctul G (1,2).

a) C (4,2) b) C (0,2) c) C (-4,2) d) C (4,-2) e) C(1,1) f) C (2,4)

TG – 159 Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}^*$ astfel încât punctele A(3,9), B(8,4), C(-2,4) şi D(α, -α) să definească un patrulater inscriptibil.

a) α=1 b) $\alpha\in\varnothing$ c) α=-1 d) α=2 e) α=-2 f) α=3

TG – 160 Să se determine raza cercului de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 .$$

a) 4; b) $\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $4\sqrt{2}$; e) 8; f) 9.

TG – 161 Să se determine ecuaţia cercului ce trece prin origine şi are centrul în punctul (-1,3).

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ d) $x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 10 = 0$

TG – 162 Să se determine ecuația cercului tangent dreptei y=1 în punctul A(1,1) şi tangent dreptei 4x-3y=0 în punctul $B\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

a) $x^2 + y^2 - 10x + 9y - 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 13x + 13y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 1y + 1 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 8x + 5y + 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 12x + 13y - 3 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 11y + 9 = 0$

TG – 163 În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele A(4,5), B(-2, -3) şi C(5, 4). Cercul circumscris triunghiului ABC are ecuația:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 23 = 0$ f) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 23 = 0$

TG – 164 Să se determine coordonatele centrelor cercurilor de rază $\sqrt{13}$ ce trec prin punctul A(2,1) şi taie axele de coordonate după două coarde de lungime egală.

a) $C_1(1, -1)$, $C_2(1, 4)$ b) $C_1(4, 1)$, $C_2(1, 4)$

c) $C_1(-1, -1)$, $C_2(4, 4)$ d) $C_1(1, 1)$, $C_2(4, 4)$

e) $C_1(1, 2)$, $C_2(2, 1)$ f) $C_1(4, 4)$, $C_2(3, 3)$

TG – 165 Găsiti ecuația cercului care trece prin punctele A(1,0) , B(-1,0) şi C(1,1).

a) $x^2 + y^2 + y - 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - y - 1 = 0$ c) $x^2 + y^2 - y + 1 = 0$

d) $x^2+y^2+y+1=0$ e) $x^2+y^2-y=0$ f) $x^2+y^2-1=0$

TG – 166 Se consideră dreapta D: $x = 4$ şi punctul P (6,5) în planul (Oxy). Să se determine cercul de diametru $\overline{PP'}$, unde P' este proiecţia punctului P pe dreapta D.

a) $x^2+y^2-10x+10y+49=0$ b) $x^2+y^2-10x-10y+49=0$

c) $x^2+y^2-10x-10y-49=0$ d) $x^2+y^2+10x-10y+49=0$

e) $x^2+y^2+10x+10y+49=0$ f) $x^2+y^2+10x+10y-49=0$

TG – 167 Se dă cercul de ecuaţie $x^2+y^2-3x-3y+2=0$ şi punctul A(0,2) situat pe cerc. Să se afle coordonatele vârfurilor pătratului $\overline{ABCD}$ înscris în cerc.

a) $C(2,0); B(1,3); D(1,0);$ b) $C(3,2); B(3,1); D(2,0);$

c) $C(1,3); B(0,1); D(3,2);$ d) $B(1,0); C(3,1); D(2,3);$

e) $B(3,2); C(0,1); D(2,3);$ f) $B(2,3); C(2,0); D(3,2)$.

TG - 168 Se cer centrul şi raza cercului a cărei ecuaţie este

$$8(x^2+y^2)+4x+12y-27=0.$$

Care este poziţia originii faţă de acest cerc ?

a) C$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, r = 2 interioară b) C$\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$, r = 2 interioară c) C$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, r = 4 exterioară

d) C$\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$, r = 2 exterioară e) C$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$, r = 3 interioară f) C$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, r = 2 exterioară

TG - 169 Se dau punctele A(-1,4), B(3,-2). Să se scrie ecuația cercului care are pe $\overline{AB}$ ca diametru .

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 11 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 13 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 14 = 0$

TG - 170 Să se determine toate valorile parametrului real λ pentru care dreapta $(1 - \lambda^2)x - 2\lambda y + 2(1 + \lambda^2) = 0$ este tangentă la cercul cu centrul în origine şi având raza r = 2.

a) $\lambda = 1$ b) $\lambda = 2$ şi $\lambda = -2$ c) $\lambda = \frac{1}{2}$

d) $\lambda = -1$ şi $\lambda = 3$ e) $\lambda \in \varnothing$ f) $\lambda \in \mathbf{R}$

TG - 171 Să se scrie ecuația cercului înscris în triunghiul ce are ca vârfuri punctele A(2,-2), B($2, \sqrt{2} - 2$) şi C($\sqrt{2} + 2, -2$).

a) $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 3 - \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ b) $\left(x + 1 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 3 + \sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$

c) $\left(x - 1\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 = 1$ d) $\left(x + 1\right)^2 + \left(y - 1\right)^2 = 1$

e) $x^2 + \left(y + 2\right)^2 = \sqrt{2}$ f) nici un răspuns nu e corect

TG - 172 Se consideră cercul de ecuație $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$. Să se determine cercurile de centru C(-2,5) tangente cercului dat.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 35 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$
$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$
$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 35 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$
$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 35 = 0$

TG - 173 Să se determine centrele cercurilor ce sunt tangente axei (Ox) şi trec prin punctele A(2,3) şi B(4,1).

a) $C_1\left(\sqrt{6},\sqrt{3}\right)$, $C_2\left(\sqrt{6},-\sqrt{3}\right)$ b) $C_1\left(3+\sqrt{6},2+\sqrt{6}\right)$, $C_2\left(3-\sqrt{6},2+\sqrt{6}\right)$ c) $C_1\left(5+\sqrt{6},4-\sqrt{6}\right)$, $C_2\left(5-\sqrt{6},4+\sqrt{6}\right)$

d) $C_1\left(5+\sqrt{6},4+\sqrt{6}\right)$, $C_2\left(5-\sqrt{6},4-\sqrt{6}\right)$ e) $C_1\left(5-\sqrt{6},2+\sqrt{6}\right)$, $C_2\left(5+\sqrt{6},2-\sqrt{6}\right)$ f) $C_1\left(5+\sqrt{6},3-\sqrt{6}\right)$, $C_2\left(5-\sqrt{6},3+\sqrt{6}\right)$

TG - 174 Să se afle lungimea tangentei duse din origine la cercul care trece prin punctele A(1,1), B(2,0), C(3,2).

a) 1 b) 10 c) $\sqrt{\frac{14}{3}}$ d) $\frac{14}{5}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\sqrt{\frac{3}{14}}$

TG - 175 Unul dintre focarele unei elipse este situat la distanțele 7 şi, respectiv, 1 față de extremitățile axei mari.

Să se scrie ecuația acestei elipse.

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$

d) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{9}=1$ e) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ f) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

TG - 176 Un punct M descrie o elipsă de centru O şi semiaxe 2 şi 1. Fie P proiecția lui M pe axa mare iar N un punct pe (OM) aşa încât ON = 2 NM . Dreapta (PN) taie axa mică în Q, să se calculeze lungimea segmentului PQ.

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{4}$

TG - 177 Se consideră elipsa de ecuație $x^2 + 4y^2 = 9$. Să se scrie ecuația unei drepte ce trece prin punctul M(2,1), care intersectează elipsa în punctele A şi B, astfel ca M să fie mijlocul segmentului $\overline{AB}$.

a) $8x - y + 17 = 0$　　b) $x - 8y + 17 = 0$　　c) $8x - 8y + 17 = 0$

d) $8x + y - 17 = 0$　　e) $x + 2y - 4 = 0$　　f) $x - 2y + 4 = 0$

TG - 178 Prin focarul F(c,0) al elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se duce o coardă perpendiculară pe axa mare. Să se găsească lungimea acestei coarde.

a) $\frac{a}{b}$　　b) $\frac{b}{a}$　　c) $\frac{2b}{a^2}$　　d) $\frac{2b^2}{a}$　　e) $\frac{a^2}{b}$　　f) $a + b$

TG – 179 Fiind dat punctul $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ al elipsei : $(E)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$, să se scrie ecuațiile dreptelor suport pentru razele focale ale acestui punct.

$a)\ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + 4y + 3 = 0 \end{array}$　　$b)\ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 3 = 0 \end{array}$　　$c)\ \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ x + 3y + 4 = 0 \end{array}$

$d)\ \begin{array}{l} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{array}$　　$e)\ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x + 4y + 3 = 0 \end{array}$　　$f)\ \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 3x - 4 = 0 \end{array}$

TG – 180 Să se afle punctul de pe elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ care este cel mai apropiat de dreapta $x + ay = 3a$.

a) $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}\right)$;　　b) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$;　　c) $\left(\frac{a}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$;

d) $\left(-\frac{a}{2},\frac{3}{2}\right)$; e) $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\sqrt{2}\right)$; f) $(a,0)$

TG – 181 Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a>b$ şi unul din focare situat în punctul F. Prin F se duce o secantă oarecare, care taie elipsa în punctele M şi N. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$

a) $E=\frac{2a}{b^2}$ b) $E=\frac{a}{b^2}$ c) $E=\frac{a}{2b^2}$

d) $E=\frac{2b}{a^2}$ e) $E=\frac{b}{a^2}$ f) $E=\frac{b}{2a^2}$

TG - 182 Să se calculeze aria unui pătrat având două vârfuri ce coincid cu focarele elipsei E: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0$.

a) 36 b) 18 c) 36 sau 18 d) 9 sau 18 e) 36 sau 9 f) 20

TG - 183 În elipsa $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ se înscrie un dreptunghi astfel încât două laturi opuse ale sale să treacă prin focare. Să se calculeze aria acestui dreptunghi.

a) $27\sqrt{3}$ b) $\frac{480}{7}$ c) $27\sqrt{3}+1$ d) $27+\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) 25

TG - 184 Un romb cu latura de lungime 5 şi înălţimea de lungime 4,8 are diagonalele situate pe axele de coordonate (Ox) şi (Oy).

Să se determine elipsele, având axa mare pe (Ox), care trec prin două vârfuri opuse ale rombului, iar focarele sunt situate în celelalte două vârfuri.

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{8}-1=0,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}-1=0$

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-1=0$ d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

e) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-1=0,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1=0$ f) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$

TG - 185 Să se determine focarele elipsei $x^2+3y^2-9=0$.

a) $F_1(-3,0),\ F_2(3,0)$ b) $F_1(0,-3),\ F_2(0,3)$ c) $F_1\left(-\frac{1}{3},0\right),\ F_2\left(\frac{1}{3},0\right)$

d) $F_1(0,-\sqrt{6}),\ F_2(0,\sqrt{6})$ e) $F_1(-\sqrt{6},0),\ F_2(\sqrt{6},0)$ f) $F_1(-\sqrt{3},0),\ F_2(\sqrt{3},0)$

TG - 186 Se dă hiperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Să se calculeze coordonatele focarelor F şi F'.

a) $\begin{matrix}F(5,0)\\F'(-5,0)\end{matrix}$ b) $\begin{matrix}F(0,5)\\F'(0,-5)\end{matrix}$ c) $\begin{matrix}F(3,0)\\F'(-3,0)\end{matrix}$

d) $\begin{matrix}F(0,3)\\F'(0,-3)\end{matrix}$ e) $\begin{matrix}F(3,4)\\F'(-3,4)\end{matrix}$ f) $\begin{matrix}F(0,4)\\F'(0,-4)\end{matrix}$

TG - 187 Se dă hiperbola H: $2x^2-5y^2-10=0$. Să se determine vârfurile şi asimptotele hiperbolei H.

a) (-5,0),(5,0); $y=\sqrt{\frac{2}{5}}x,\ y=-\sqrt{\frac{2}{5}}x$ b) (-$\sqrt{5}$,0), ($\sqrt{5}$,0); $y=\frac{2}{5}x,\ y=-\frac{2}{5}x$

c) (-$\sqrt{5}$,0),($\sqrt{5}$,0); $y=\sqrt{\frac{2}{5}}x,\ y=-\sqrt{\frac{2}{5}}x$ d) ($\sqrt{2}$,0), (-$\sqrt{2}$,0); $y=\frac{5}{2}x,\ y=-\frac{5}{2}x$

e) (-2,0),(2,0); $y=\sqrt{\frac{5}{2}}x$, $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}x$ f) (-$\sqrt{2}$,0), ($\sqrt{2}$,0); $y=\sqrt{\frac{5}{2}}x$, $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}x$

TG - 188 Să se scrie ecuația hiperbolei care trece prin focarele elipsei $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ şi are focarele în vârfurile acestei elipse.

a) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{144}=1$ b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$

d) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{25}=1$ e) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{144}=1$ f) $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{16}=1$

TG – 189 Să se scrie ecuația hiperbolei ce are asimptotele $y=\pm\frac{2}{3}x$ şi care trece prin punctul P(5,-2).

a) $64x^2-144y^2-1=0$ b) $4x^2-9y^2-64=0$

c) $9x^2-64y^2-1=0$ d) $144x^2-64y^2-1=0$

e) $9x^2-4y^2-64=0$ f) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{1}{36}=0$

TG – 190 Pentru hiperbola $(H):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, să se calculeze aria triunghiului format de asimptotele hiperbolei (H) şi dreapta $(d): 9x+2y=24$.

a) 24 b) 16 c) 18 d) 12 e) 14 f) 15

TG – 191 Să se calculeze produsul distanțelor unui punct oarecare al hiperbolei : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ la cele două asimptote.

a) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; b) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; c) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$;

d) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; e) $\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$; f) 1.

TG - 192 Se consideră hiperbola de vârfuri $A(a,0)$, $A'(-a,0)$ şi focare $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$. Perpendiculara în A pe axa (AA') taie o asimptotă în G. Să se determine mărimea unghiului $\widehat{FGF'}$.

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ f) $\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$

TG - 193 Să se determine unghiul ascuțit dintre asimptotele hiperbolei $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, având raportul $\frac{c}{a}=2$, c - fiind abscisa unui focar al hiperbolei.

a) 30° b) 45° c) 90° d) 15° e) 75° f) 60°

TG - 194 Un cerc de centru $C(0,2)$ este tangent ramurilor hiperbolei $x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$. Să se determine coordonatele punctelor de contact.

a) $\left(-\sqrt{41},8\right)$ şi $\left(\sqrt{41},8\right)$ b) $\left(-\frac{1}{5},\frac{8}{5}\right)$ şi $\left(\frac{1}{5},\frac{8}{5}\right)$ c) $\left(-\frac{\sqrt{41}}{5},\frac{8}{5}\right)$ şi $\left(\frac{\sqrt{41}}{5},\frac{8}{5}\right)$

d) $\left(\frac{8}{5},-\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$ şi $\left(\frac{8}{5},\frac{\sqrt{41}}{5}\right)$ e) (1,0) şi (-1,0) f) $\left(\sqrt{2},2\right)$ şi $\left(-\sqrt{2},2\right)$

TG - 195 Se dă hiperbola $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. Prin punctul A(+3, -1) să se ducă o coardă la hiperbolă astfel încât acest punct s-o împartă în două părți egale.

a) $-x + y + 4 = 0$ b) $x + y - 2 = 0$ c) $3x + 4y - 5 = 0$

d) $-2x + y + 7 = 0$ e) $2x + y - 5 = 0$ f) $-3x + y + 10 = 0$

TG - 196 Să se determine coordonatele focarului F al parabolei $y^2 = 2x$

a) $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ b) $F(1,0)$ c) $F(2,0)$ d) $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e) $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$ f) $F(0,1)$

TG - 197 Prin focarul parabolei $y^2 = 8x$ se duce o coardă $\overline{AB}$ care face unghiul α cu axa (Ox). Dacă prin focar se mai duce şi corda $\overline{CD}$ care este perpen-diculară pe $\overline{AB}$, să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 8 e) 4 f) 2

TG - 198 Să se determine ecuația unei parabole raportată la axa de simetrie şi tangenta în vârf, ştiind că trece prin punctul A(3,3).

a) $y^2 = 3x$ b) $y^2 = 3x$ c) $y^2 = 9x$ d) $y^2 = 6x$ e) $y^2 = 3x$ f) $y^2 = 6x$

TG – 199 La ce distanță de vârf trebuie plasată o sursă luminoasă pe axa unui reflector parabolic de înălțime 20 cm şi diametrul bazei 20 cm, pentru a produce prin reflexie un fascicol de raze paralele.

a) 10 cm; b) 2 cm; c) 2,5 cm; d) 3 cm; e) 1,25 cm; f) 1,5 cm.

TG - 200 Să se determine un punct M situat pe parabola $y^2 = 64x$, cât mai aproape posibil de dreapta $4x + 3y + 37 = 0$ şi să se calculeze distanța de la punctul M la această dreaptă.

a) M(9, -24), d = 5 b) M(9, -24), $d = \frac{1}{5}$ c) M(1,8), d = 5

d) M(9,24), d = 5 e) M(1, -8), $d = \frac{1}{5}$ f) M(1,1), d = 1

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(simbol AM)

AM - 001 Să se calculeze: $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

a) $L = 1$ b) L nu există c) $L = 0$

d) $L = \dfrac{1}{3}$ e) $L = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{3}, & n = 2k \end{cases}$ f) $L = \dfrac{2}{3}$

AM - 002 Precizați toate valorile parametrului $a \in (0, +\infty)$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n + a^n}{3^n + 4^n} = 0 .$$

a) $a \in (0,1)$ b) $a \in (2,3)$ c) $a \in (0,4)$ d) $a \in (0,2)$ e) $a \in \{5,6,7\}$ f) $a \in (0,+\infty)$

AM - 003 Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$, $n \geq 1$.

a) 1 b) 0 c) 3 d) $\dfrac{1}{3}$ e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$

AM - 004 Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) e e) 3 f) $\dfrac{1}{3}$

AM - 005 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\geq 2 .$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{3}$

AM - 006 Să se determine limita şirului cu termenul general

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right),\quad n\in\mathbf{N}^* .$$

a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) 3

AM - 007 Care este limita şirului cu termenul general

$$a_n = \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[9]{5}\cdot\sqrt[27]{5}\cdot\ldots\cdot\sqrt[3^n]{5}, n\in\mathbf{N}^* \ ?$$

a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $2\sqrt[3]{5}$ f) $2\sqrt{5}$

AM - 008 Calculați limita şirului cu termenul general $a_n = 2n\sin\frac{\pi}{n},\quad n\geq 1$

a) 1 b) 0 c) π d) $\frac{\pi}{2}$ e) 2π f) ∞

AM - 009 Să se precizeze valoarea limitei $L=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$,

unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

a) $L = x\sin x$ b) $L=\frac{\sin x}{x}$ c) $L=\sin x$

d) $L=\frac{\sin x}{2}$ e) $L=2\sin x$ f) $L=\frac{\sin 2x}{2x}$

AM - 010 Fie $x \in \mathbf{R}$. Să se calculeze: $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}$.

a) $f(x) = 1,\ x \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = x,\ x \in \mathbf{R}$ c) $f(x) = x^2,\ x \in \mathbf{R}$

d) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \geq 0 \\ x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ 1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

AM - 011 Care este limita şirului cu termenul general $a_n = n^2\left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2}\right),\ n \geq 2$?

a) $\dfrac{1}{2}\ln 2$ b) $\ln 2$ c) $\dfrac{1}{3}\ln 3$ d) $e \ln 2$ e) $\dfrac{1}{4}\ln 5$ f) $\dfrac{1}{3}\ln 2$

AM - 012 Să se calculeze, pentru $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, limita

$$L = \lim_{n\to\infty} n^k\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right).$$

a) $L = \begin{cases} 0, & k < 3 \\ -\ln a, & k = 3 \\ +\infty, & k > 3 \end{cases}$ b) $L = \begin{cases} 0, & k < 3 \\ -\infty, & k > 3 \\ -\ln a, & k = 3 \end{cases}$ c) $L = \begin{cases} 0, & k < 3 \\ -\ln a, & k = 3 \\ -\infty, & k > 3 \text{ şi } a > 1 \\ +\infty, & k > 3 \text{ şi } a < 1 \end{cases}$

d) $L = \begin{cases} +\infty, & k \geq 3,\ a > 1 \\ 0, & k \leq 3 \end{cases}$ e) $L = \begin{cases} 0, & k \leq 3 \\ +\infty, & k > 3 \end{cases}$ f) $L = \begin{cases} -\infty, & k < 3 \text{ şi } a < 1 \\ +\infty, & k > 3 \text{ şi } a > 1 \\ -\ln a, & k = 0 \end{cases}$

AM - 013 Care este valoarea limitei şirului cu termenul general

$$a_n = \left(\frac{2n + \sqrt{n} + 3}{2n + 1}\right)^{\sqrt{n}} \ ?$$

a) e b) $\sqrt[3]{e}$ c) $\sqrt{e}$ d) $\dfrac{1}{e}$ e) e^2 f) 0

AM - 014 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{\alpha n^2}{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

a) α b) e^{α} c) 0 d) $e^{-\alpha}$ e) $e^{2\alpha}$ f) $-\alpha$

AM - 015 Să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$a_n = \frac{\left[\left(n^2+1\right)\left(n^2-n+1\right)\left(n^2-2n+1\right)\right]^n}{\left(n^2+n\right)^{3n}},\ n \geq 1.$$

a) e^2 b) e^{-6} c) e^{-4} d) e^3 e) e^{-3} f) 1

AM - 016 Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\dfrac{\pi}{2^n} + \mathrm{tg}^{\mathrm{n}}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2^n}\right)\right]$.

a) $L=0$ b) $L=2$ c) $L=\dfrac{1}{2}$ d) $L=1$ e) $L=-1$ f) $L=3$

AM - 017 Să se determine mulțimea valorilor $a \in \mathbf{R}$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2 \cdot n^2 + 2}}{n} = 3 .$$

a) $(0,1)$ b) $\{-2,2\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{0,1,2\}$ e) $(-2,2)$ f) $(-1,1)$

AM - 018 Să se determine constanta $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încât

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ să fie finită.

a) $\alpha \leq 1$ b) $\alpha \leq 0$ c) $0 < \alpha < 1$ d) $\alpha > 1$ e) $\alpha = -1$ f) $\alpha = \dfrac{1}{2}$

AM - 019 Să se determine numerele reale a, b, c astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} n\left(an+\sqrt{cn^2+bn+2}\right)=1.$$

a) $a=-1, b=0, c=1$ b) $a=-1, b=0, c=-1$ c) $a=b=c=-1$

d) $a=b=c=0$ e) $a=1, b=0, c=-1$ f) $a=0, b=c=-1$

AM - 020 Ce relație trebuie să existe între parametrii reali a și b astfel încât să aibă loc relația: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)=0$?

a) $a+b=0$ b) $a+b+1=0$ c) $a+b=1$

d) $a=b=1$ e) $a=1, b=0$ f) $a^2=b^2$

AM - 021 Fie $a_0, a_1, \ldots, a_k$ numere reale astfel încât $a_0+a_1+\ldots+a_k=0$. Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt[3]{n}+a_1\sqrt[3]{n+1}+\ldots+a_k\sqrt[3]{n+k}\right)$.

a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=\dfrac{k}{3}$ d) $L=\dfrac{1}{2}$ e) $L=0$ f) $L=\dfrac{2k}{3}$

AM - 022 Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0$.

a) $a=1, b=0$ b) $a=-1, b=1$ c) $a=-1, b=0$

d) $a=b=0$ e) $a=b=1$ f) $a=1, b=2$

AM - 023 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+3n+4}\right)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) 1 f) 0

AM - 024 Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$, dacă $a,b\in(-1,1)$.

a) $\dfrac{1-a}{1-b}$ b) $\dfrac{1-b}{1-a}$ c) $\dfrac{1+a}{1-b}$ d) $\dfrac{1-a}{1+b}$ e) $\dfrac{a}{b+1}$ f) $\dfrac{1+b}{1+a}$

AM - 025 Într-o progresie aritmetică $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ suma primilor *n* termeni este $S_n=\dfrac{3n^2+9n}{2}$, oricare ar fi $n\geq 1$. Să se determine a_n şi să se calculeze:
$L=\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{na_n}$.

a) $a_n=3n,\ L=1$ b) $a_n=3n+3,\ L=\dfrac{1}{2}$ c) $a_n=3n+3,\ L=2$

d) $a_n=n+2,\ L=\dfrac{3}{2}$ e) $a_n=3n+3,\ L=\dfrac{3}{2}$ f) $a_n=4n,\ L=\dfrac{2}{3}$

AM - 026 Să se calculeze limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde
$x_n=ac+(a+ab)c^2+(a+ab+ab^2)c^3+\ldots+(a+ab+\ldots+ab^n)c^{n+1}$, *a*, *b*, *c* fiind numere reale astfel încât $|c|<1,\ b\neq 1$ şi $|bc|<1$.

a) 0 b) $\dfrac{ac}{(1-c)(1-bc)}$ c) 1

d) $\dfrac{2ac}{(1-c)(1-bc)}$ e) ac f) $\dfrac{abc}{(1-c)(1-bc)}$

AM - 027 Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-nk+n^2\right)$.

a) 1 b) $\dfrac{5}{6}$ c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{4}{3}$ f) 2

AM - 028 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$, care este valoarea limitei

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right] ?$$

a) $\frac{\pi^2}{2}$ b) $\frac{\pi^2}{3}$ c) $\frac{\pi^2}{4}$ d) $\frac{\pi^2}{8}$ e) $\frac{\pi^2}{12}$ f) $\frac{2\pi^2}{3}$

AM - 029 Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}\right)$.

a) 1 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$ f) 3

AM - 030 Să se determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

a) 1 b) 0 c) e d) $\frac{1}{e}$ e) $1-e$ f) 2

AM – 031 Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}$

a) L = 1 b) L = e; c) L = e^2; d) L = 0; e) L = 2 f) L = $\frac{1}{e}$

AM - 032 Se consideră şirul cu termenul general

$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}, n\in\mathbf{N}^*$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\left(S_n-\frac{1}{4}\right)^n$.

a) 1 b) $\frac{1}{e^2}$ c) e d) $\frac{1}{e}$ e) $2e$ f) $4e$

AM - 033 Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}\right]^{n}$.

a) $L=1$ b) $L=e^{\frac{3}{2}}$ c) $L=e$ d) $L=e^{-\frac{4}{3}}$ e) $L=e^{-\frac{1}{2}}$ f) $L=2$

AM - 034 Fie $a_n=\frac{n}{(n+1)!}$ şi $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

a) 0 b) e c) 1 d) $+\infty$ e) 2 f) $\frac{1}{2}$

AM - 035 Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, unde $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$ şi $x>0$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$ d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ e) 1 f) 0

AM - 036 Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},\quad n\geq 1.$$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 4 f) 3

AM - 037 Să se calculeze limita şirului cu termenul general $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+k}{n^4+k}, n\geq 1$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $+\infty$ f) 0

AM - 038 Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{4}$ e) 4 f) 3

AM - 039 Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2n+k}$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) 1 f) 2

AM - 040 Notând $L=\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{n+k}\right)$, precizați care din următoarele afirmații este adevărată.

a) $L=0$ b) $L=1$ c) $L=+\infty$ d) $L=e$ e) L nu există f) $L=2$

AM - 041 Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0=1$ şi $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt[3]{1+x_n^3}}$, $n\geq 0$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM - 042 Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0=3$ şi $x_n=\frac{1}{3}x_{n-1}-4$, $n\geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

a) 0 b) 1 c) -2 d) -3 e) –6 f) nu există

AM - 043 Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{10} \cdot a_n$, $n \geq 0$. Să se determine $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ în funcție de $a_0 \in \mathbf{R}$.

a) $L = a_0$ b) $L = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a_0 \geq 0 \\ 0, \text{ dacă } a_0 < 0 \end{cases}$ c) $L = +\infty, \ \forall a_0 \in \mathbf{R}$

d) $L = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } a_0 \geq 0 \\ 1, \text{ dacă } a_0 < 0 \end{cases}$ e) $L = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } a_0 > 0 \\ 0, \text{ dacă } a_0 = 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a_0 < 0 \end{cases}$ f) $L = \begin{cases} \frac{1}{a_0}, \text{ dacă } a_0 \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } a_0 = 0 \end{cases}$

AM - 044 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, unde $x_0 = a$ cu $a > 0$. Să se determine toate valorile parametrului *a* pentru care şirul este convergent şi apoi să se calculeze limita şirului.

a) $a \in (1,2]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ b) $a \in [1,2]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

c) $a \in (0,2]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a \in (0,2) \\ 2, \text{ dacă } a = 2 \end{cases}$ d) $a \in [1,2]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a \in (1,2) \\ 2, \text{ dacă } a = 2 \end{cases}$

e) $a \in (0,1]$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ f) $a \in (0,2)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

AM - 045 Să se calculeze: $\lim_{x\to 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.

a) $-\frac{1}{56}$ b) $\frac{1}{56}$ c) $\frac{1}{48}$ d) $-\frac{1}{48}$ e) 0 f) 1

AM - 046 Determinați numerele reale a şi b astfel încât:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2}=\frac{5}{18}.$$

a) $a=-3, b=-5$ b) $a=3, b=-5$ c) $a=5, b=3$

d) $a=-5, b=-3$ e) $a=2, b=1$ f) $a=-2, b=-1$

AM - 047 Să se determine parametrii a şi b reali, aşa încât:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2}-bx+2\right)=1.$$

a) $a=12, b=2$ b) $a=10, b=2$ c) $a=12, b=4$

d) $a=-10, b=2$ e) $a=8, b=6$ f) $a=6, b=10$

AM - 048 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{1/x}$.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) 4 d) 1 e) $\sqrt{2}$ f) $\sqrt{e}$

AM - 049 Fie $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$. Care din următoarele afirmații este adevărată ?

a) limita nu există b) limita este -1 c) limita este $-\infty$

d) limita este 0 e) limita este $+\infty$ f) limita este 1

AM - 050 Să se calculeze limita: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

a) -1 b) $-\dfrac{e}{2}$ c) 0 d) $+\infty$ e) 1 f) $\dfrac{e}{2}$

AM - 051 Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbf{R}$, definită prin: $f(x)=\dfrac{1}{e^{1/x}-e}$.
Să se cerceteze existența limitelor laterale ale lui f în punctele $x=0$ și $x=1$.

a) $f(0-0)=-\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=0$
$f(1-0)=+\infty,\ f(1+0)=-\infty$

b) $f(0-0)=\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=0$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=+\infty$

c) $f(0-0)=e,\ f(0+0)=+\infty$
$f(1-0)=\dfrac{1}{e},\ f(1+0)=-\infty$

d) $f(0-0)=-\infty,\ f(0+0)=+\infty$
$f(1-0)=+\infty,\ f(1+0)=-\infty$

e) $f(0-0)=-\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=\dfrac{1}{e}$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=\pm\infty$

f) $f(0-0)=\dfrac{1}{e},\ f(0+0)=-\dfrac{1}{e}$
$f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=\pm\infty$

AM - 052 Să se determine parametrul real a astfel încât funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$,
definită prin $f(x)=\begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x<1\\ \dfrac{2^x-2}{x-1}, & \text{dacă } x>1\end{cases}$ să aibă limită în punctul $x = 1$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) ln2 f) 2ln2

AM - 053 Să se determine: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, unde $m,n\in\mathbf{N}^*$.

a) $m-n$ b) $\dfrac{m-n}{2}$ c) $m+n$ d) $\dfrac{m+n}{2}$ e) 1 f) 0

AM - 054 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

a) –1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) $\dfrac{3}{2}$ f) 3

AM - 055 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$.

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) e f) $2e$

AM - 056 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{4}$ f) 1

AM - 057 Să se determine: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) nu există

AM - 058 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ c) n d) $\frac{n^2}{4}$ e) 0 f) 1

AM - 059 Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xe^{-1/x}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

a) 1 b) 0 c) –1 d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) 2

AM - 060 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 2

AM - 061 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, unde $m,n\in\mathbf{N}^*$.

a) $\dfrac{m}{n}$ b) $(-1)^m\cdot\dfrac{m}{n}$ c) $(-1)^{m-n}\cdot\dfrac{m}{n}$ d) $(-1)^{mn}\cdot\dfrac{m}{n}$ e) $\dfrac{n}{m}$ f) $(-1)^{n-m}\cdot\dfrac{n}{m}$

AM - 062 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$.

a) 0 b) 1 c) 3π d) 2π e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) π

AM - 063 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(ax)-\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)-\sin(bx)}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

a) $\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{a^2}{b^2}$ c) $a\cdot b$ d) $\dfrac{a^3}{b^3}$ e) $\dfrac{a^4}{b^4}$ f) $a^3\cdot b^3$

AM - 064 Să se calculeze: $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}}$.

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 1 e) –1 f) 2

AM - 065 Să se calculeze: $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(n\arcsin x)}{x^2}$, unde $n\in\mathbf{N}^*$.

a) 0 b) 1 c) n d) n^2 e) $\dfrac{n^2}{2}$ f) $\dfrac{n^2}{4}$

AM - 066 Să se calculeze: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{\sin^3 x}$.

a) –1 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) e e) e^2 f) $+\infty$

AM - 067 Să se calculeze: $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$.

a) –1 b) 0 c) 1 d) sin1 e) e f) 2

AM - 068 Să se calculeze: $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) $\dfrac{1}{e}$ f) $2e$

AM - 069 Să se calculeze: $\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

a) 0 b) 1 c) e d) $e^{\pi/3}$ e) $e^{4/\pi}$ f) $e^{12/\pi}$

AM - 070 Să se calculeze: $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2\pi x}{x+1}\right)^{x^2}$.

a) 0 b) 1 c) e d) $e^{-\pi}$ e) $e^{-2\pi^2}$ f) $e^{-\pi^2}$

AM - 071 Se consideră şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

unde $a_n = \lim_{x\to 0}(1 - x\sin nx)^{1/x^2}$. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} b_n$.

a) $1-e$ b) $\dfrac{1}{1-e}$ c) e d) $e-1$ e) $\dfrac{1}{e-1}$ f) 0

AM - 072 Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin relația

$$f(x)=\left[1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx)\right]^{1/x} \text{ pentru orice } x>0.$$

Să se determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

a) 1 b) 0 c) e^n d) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e) $e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ f) e^{-n^2}

AM - 073 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}}$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{e}$ c) 0 d) e e) $2e$ f) e^2

AM - 074 Să se calculeze limita: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{2}\left(a^{1/x}+b^{1/x}\right)\right]^{x}$.

a) ab b) $\dfrac{a}{b}$ c) $\sqrt{ab}$ d) a^2b^2 e) a^3b^3 f) $\dfrac{1}{2}ab$

AM – 075 Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel ca funcția

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{-x},\ x\in(-1,0)\\ \dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{ax^2},\ x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

să aibă limită pentru $x\to 0$.

a) –2 b) –1 c) $-\dfrac{1}{2}$

d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$

AM - 076 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

a) 1 b) 0 c) e d) $\dfrac{1}{e}$ e) e^2 f) $\dfrac{1}{e^2}$

AM - 077 Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\dfrac{1+x}{x}\right)$.

a) 1 b) 2 c) $-\dfrac{1}{2}$ d) 3 e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM - 078 Se consideră funcția $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x$. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $-\dfrac{2}{3}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM - 079 Pentru ce valori ale numărului natural n există limita:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^n}\ ?$$

a) $n\in\mathbf{N}$ b) $n\in\mathbf{N}\setminus\{2k \mid k\in\mathbf{N}\}$ c) $n\in\mathbf{N}\setminus\{2k+1 \mid k\in\mathbf{N}\}$

d) $n\in\mathbf{N}\setminus\{2k \mid k\geq 2,\ k\in\mathbf{N}\}$ e) $n\in\mathbf{N}\setminus\{1,2,3\}$ f) $n\in\varnothing$

AM - 080 Să se calculeze pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, limita $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}}$.

a) $L = \dfrac{n}{2}$ b) $L = \dfrac{n^2}{3}$ c) $L = n-1$ d) $L = \dfrac{n}{6}$ e) $L = \dfrac{n}{3}$ f) $L = \dfrac{n^2}{6}$

AM - 081 Se consideră funcția

$$f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, \ f(x) = \frac{x^2 + px - 1}{x+1}, \text{ unde } p \in \mathbf{R}.$$

Să se determine *p* astfel încât graficul funcției să admită asimptotă dreapta $y = x + 1$ la ramura $+\infty$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1 e) –2 f) –3

AM - 082 Se consideră funcția $f : (-k, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3ax + 2a^2}{x+k}$,

unde $a, k \in \mathbf{R}$. Să se precizeze relația dintre *a* şi *k* astfel încât graficul funcției f să admită ca asimptotă dreapta $y = x + 1$.

a) $3a + k = 0$ b) $3a + k = -1$ c) $3a + k = 1$

d) $3a + 2k = 1$ e) $3a + 2k = 0$ f) $3a + 2k = -1$

AM - 083 Fie $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție şi $a > 0$. Să se determine *a* astfel încât graficul lui f să admită o singură asimptotă verticală.

a) $a = 4$ b) $a \in \{0,4\}$ c) $a \in (0,4)$ d) $a = 2$ e) $a = 1$ f) $a \in (4, +\infty)$

AM - 084 Fie $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$, unde *D* este domeniul maxim de definiție. Să se determine asimptotele lui f.

a) $x = 2,\ x = 3,\ y = 5$ b) $x = 3,\ x = 1,\ y = 6$ c) $x = 2,\ x = -1,\ y = 2$

d) $x = -2,\ x = 1,\ y = 1$ e) $x = 3,\ x = 4,\ y = 5$ f) $x = \dfrac{1}{2},\ x = 2,\ y = -1$

AM - 085 Să se determine toate valorile parametrilor reali *a*, *b*, *c* astfel încât graficul funcției $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^4}{(b+cx)^3}$ să admită ca asimptotă dreapta $y=x-3$.

a) $a=8, b=-1, c=2$ b) $a=18, b=-1, c=1$ c) $a\in\mathbf{R}, b=-c$

d) $b=c, a=c^3, c\neq 0$ e) $b=2c, a=1$ f) $b=-2c, a\in\mathbf{R}$

AM - 086 Se dă funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{|ax^2+bx+c|}{x-2}$, unde $a>0$, $c<0$, $b\in\mathbf{R}$. Să se determine coeficienții *a*, *b*, *c* astfel ca graficul funcției să admită asimptotă dreapta $y=x+3$, iar $f(0)=-1$.

a) $a=2, b=1, c=-3$ b) $a=1, b=2, c=3$ c) $a=1, b=2, c=-3$

d) $a=1, b=1, c=2$ e) $a=1, b=1, c=-2$ f) $a=1, b=-1, c=2$

AM - 087 Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$.
Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul lui f.

a) $y=x$ b) $y=x-2$ c) $y=-x+2$ d) $y=-x$ e) $y=-x+1$ f) nu există

AM - 088 Să se determine asimptotele la graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,
$$f(x)=x-\sqrt{|x^2+x|}.$$

a) nu are b) $y=-1$ c) $x=0$ d) $y=1$ asimptotă orizontală la $+\infty$

e) $y=-\dfrac{1}{2}$ asimptotă orizontală la $+\infty$ și $y=2x+\dfrac{1}{2}$ asimptotă oblică la $-\infty$

f) $y=\dfrac{1}{2}$ asimptotă orizontală la $-\infty$

AM - 089 Să se determine valorile parametrilor *p* şi *q* astfel ca graficul funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=px-q\sqrt{|x^2-1|}$ să admită ca asimptote dreptele $y=2x$ şi $y=0$.

a) $(p,q)\in\{(-1,-1),(1,0)\}$ b) $(p,q)\in\{(1,-1),(1,1)\}$ c) $(p,q)\in\{(0,1),(2,1)\}$
d) $(p,q)\in\{(-1,1),(-1,-2)\}$ e) $(p,q)\in\{(-1,2),(2,1)\}$ f) $(p,q)\in\{(2,-1),(-1,2)\}$

AM - 090 Se dă funcţia $f(x)=\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}+\chi x$ cu $\alpha,\beta,\chi\in\mathbf{R}$. Să se determine α, β, χ astfel încât f să fie definită pe $\mathbf{R}$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

a) $\alpha=6, \beta\geq 9, \chi=-1$ b) $\alpha=-6, \beta\geq 9, \chi=3$ c) $\alpha=1, \beta=10, \chi=6$

d) $\alpha\geq 3, \beta\geq 2, \chi\geq 1$ e) $\alpha=6, \beta=10, \chi=1$ f) $\alpha=1, \beta=10, \chi=-1$

AM - 091 Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+\sqrt{bx^2+cx+1}$,unde $a>0$, $b>0$, $c\in\mathbf{R}$. Să se determine *a*, *b*, *c* astfel încât graficul funcţiei să admită la $+\infty$ o asimptotă paralelă cu dreapta $y=4x-2$, iar la $-\infty$ asimptota orizontală $y=-1$.

a) $a=1, b=1, c=2$ b) $a=2, b=1, c=2$ c) $a=1, b=4, c=4$

d) $a=2, b=4, c=4$ e) $a=1, b=4, c=-4$ f) $a=-1, b=-1, c=-2$

AM - 092 Să se determine asimptotele oblice ale funcţiei $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{|x-1|}}.$$

a) $y=x$ şi $y=-x$ b) $y=2x$ şi $y=-2x$ c) $y=x+1$ şi $y=x-1$

d) $y=2x+3$ şi $y=-x+1$ e) $y=x+\frac{1}{2}$ şi $y=-x$ f) $y=-\frac{1}{2}x$ şi $y=x$

AM - 093 Fie funcția $f:\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$. Să se determine asimptotele la graficul acestei funcții.

a) $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ b) $x=\frac{3}{2},\ y=x$ c) $x=\frac{3}{2},\ y=x+\frac{1}{2}$

d) $x=\frac{3}{2},\ y=0$ e) $x=-\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$ f) $x=1,\ y=x+1$

AM - 094 Să se determine asimptotele la graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$.

a) $x=0,\ x=1$ b) $y=0$ c) $y=x,\ y=-x$

d) nu are asimptote e) $y=\pi x,\ y=-\pi x$ f) $y=x+\pi,\ y=x-\pi$

AM - 095 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x)=\begin{cases}2x-\sqrt{a^2x^2+ax+1}\,, & x\le 1\\ \sqrt{x-1}+|a|\sqrt{x}\,, & x>1\end{cases}$.

Să se determine valorile parametrului real *a* pentru care f este continuă pe **R**.

a) $a=-1$ b) $a=-\frac{3}{5}$ c) $a=0$

d) $a\in\left\{-1,\frac{3}{5}\right\}$ e) $a\in\left\{-1,\frac{5}{3}\right\}$ f) $a\in\varnothing$

AM - 096 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{|x|}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Să se determine valoarea constantei $c\in\mathbf{R}$ pentru care *f* este continuă pe **R**

a) $c=0$ b) $c=1$ c) $c=-1$ d) $c=\frac{\pi}{2}$ e) $c=-\frac{\pi}{2}$ f) $c=\pi$

AM - 097 Se consideră $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x}, \text{ pentru } x\in[0,1] \\ a\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, \text{ pentru } x\in(1,\pi] \end{cases}.$$

Determinați valorile lui a astfel încât funcția f să fie continuă pe $[0,\pi]$.

a) $2e^3$ b) e c) $-3e^3$ d) $3e^3$ e) $3e^2$ f) $2e$

AM - 098 Să se determine $\beta\in[0,1]$ astfel ca funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}, \text{ dacă } |x|<1 \\ 1+\sqrt{x^2-\beta}\cdot e^{-x}, \text{ dacă } |x|\geq 1 \end{cases}$$ să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $\beta=e$ b) $\beta=1$ c) $\beta=-1$ d) $\beta=e^{-1}$ e) $\beta=0$ f) $\beta=e^2$

AM - 099 Să se studieze continuitatea funcției definită prin:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}, & x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ -2, & x=0 \end{cases}.$$

a) f continuă pe $\mathbf{R}$ b) f continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) f continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$

d) f discontinuă în $x = 0$ e) f discontinuă pe $\mathbf{R}$ f) f continuă pe $\mathbf{R}\setminus\{1,0\}$

AM - 100 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} 2-x, x\in\mathbf{Q} \\ 2x, x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$.

Să se determine mulțimea punctelor în care f este continuă.

a) $\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ b) $\mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q}$ d) $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ e) $\varnothing$ f) $\{0\}$

AM - 101 Să se determine mulţimea punctelor în care funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\left|x^2-1\right|, & x\in\mathbf{Q}\\ 1, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$ este continuă.

a) $\{0\}$ b) $\{0,2\}$ c) $\{-2,2\}$

d) $\{-\sqrt{2},2\}$ e) $\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

AM - 102 Fiind dată funcţia $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^n\left(x^2+4\right)}{x\left(x^n+1\right)}$, să se precizeze care este domeniul maxim de definiţie *A* şi mulţimea punctelor sale de discontinuitate *D*.

a) $A=(0,+\infty)$, $D=\{1,2\}$ b) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{1\}$

c) $A=(-1,+\infty)\setminus\{0\}$, $D=\{1\}$ d) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{-1\}$

e) $A=\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$, $D=\{0,1\}$ f) $A=(-\infty,-1)$, $D=\{0,-1\}$

AM – 103 Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiei

$f:\left[1,e^2\right]\to\mathbf{R},\quad f(x)=[\ln x]$.

a) $\{1\}$; b) $\{2\}$; c) $\{e,e^2\}$;

d) $\varnothing$ e) $\{1,e,e^2\}$ f) $\{1,2,e\}$

AM – 104 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcția definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & x\neq 0\\ a\quad, & x=0\end{cases}$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x\in\mathbf{R}$. Să se determine valoarea lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care funcția este continuă în punctul x = 0.

a) a = 0; b) $a = -\dfrac{2}{3}$; c) $a = \dfrac{2}{3}$; d) a = 2; e) $a = \dfrac{1}{3}$; f) $a\in\varnothing$

AM – 105 Se cere mulțimea de continuitate a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\left|x^2-3x+2\right|}, & x\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=1\\ \pi, & x=2\end{cases}$$

a) $\mathbf{R}$ b) $\mathbf{R}^*$ c) $\mathbf{R}_+$

d) $\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$ e) $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ f) $\mathbf{R}\setminus\{2\}$.

AM - XI. 106 Funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2+a}{2}, & x<-2\\ x-b, & x\in[-2,2]\\ \dfrac{x^2+a}{2}, & x>2\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}$ dacă:

a) a=b=0 b) a=2, b=0 c) a=0, b=1

d) a=2, b=1 e) a=b=1 f) a=b=2

AM - 107 Se consideră funcția $f:[0,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.
Fie S suma absciselor punctelor de discontinuitate ale graficului funcției f; atunci:

a) $S=\dfrac{1}{2}$ b) S=1 c) S=2 d) S=3 e) $S=\dfrac{3}{2}$ f) S=0

AM - 108 Fie funcția $f:D\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{1}{|x|}+(1-x)\ln\dfrac{1}{1-x} & x\neq 0,\ x\neq 1 \\ 0 & x=0,\ x=1 \end{cases}$$

unde D este domeniul maxim de definiție. Să se determine D și mulțimea de continuitate C.

a) $D=[0,1]$; C=(0,1)
b) $D=(-\infty,1]$; $C=(-\infty,1)\setminus\{0\}$
c) $D=(-\infty,1]$; $C=(-\infty,1]$
d) $D=(-\infty,1]$; $C=(-\infty,1)$
e) $D=(-\infty,1]$; $C=(-\infty,0)\cup(0,1]$
f) D = **R**; C = **R**

AM – 109 Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$;

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \text{ sau } x=1 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x<\dfrac{1}{\pi} \\ 0, & \dfrac{1}{\pi}\le x\le 1-\dfrac{1}{\pi} \\ (1-x)\sin\dfrac{1}{1-x}, & 1-\dfrac{1}{\pi}<x<1 \end{cases}$$

Să se determine mulțimea punctelor din $[0,1]$ în care f este continuă

a) f este discontinuă în x = 0
b) f nu este continuă în $x=\dfrac{1}{\pi}$
c) f este continuă pe $[0,1]$
d) f este continuă pe $[0,1]\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$
e) f este continuă pe $(0,1]\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$
f) f este continuă pe $(0,1)\setminus\left\{\dfrac{1}{\pi},1-\dfrac{1}{\pi}\right\}$

AM – XI. 110 Să se determine valoarea constantei $a \in \mathbf{R}$, astfel încât funcția $f:[0,3] \to \mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{7\sin a(x-2)}{x-2}, & x \in [0,2) \\ 6x+a, & x \in [2,3] \end{cases}$ să fie continuă pe domeniul ei de definiție.

a) $a = 2$; b) $a = 1$; c) $a = 3$; d) $a = 4$; e) $a = 5$; f) $a = 0{,}5$.

AM – XI. 111 Să se determine valoarea constantei $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{\sin x}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & \text{dacă } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ a, & \text{dacă } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbf{R}$.

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) 1 c) 0 d) –1 e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM – 112 Să se determine funcția continuă $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(0)=\dfrac{1}{e}$ şi $f(x)-f\left(\dfrac{x}{e}\right)=x, \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

a) $f(x)=\dfrac{e^2x+e-1}{e(e-1)}$ b) $f(x)=\dfrac{e^2x+1-e}{e(1-e)}$ c) $f(x)=\dfrac{ex+1-e}{e(1-e)}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{e}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+e}{e^2}$ f) $f(x)=\dfrac{e^2x+1}{e}$

AM – 113 Fie ecuația $\dfrac{ax^5}{x-1}+\dfrac{b\left(x^3-25\right)}{x-3}=0, \quad a>0, b>0.$

Care este mulțimea tuturor valorilor lui a şi b pentru care ecuația dată are cel puțin o rădăcină în intervalul (1,3) ?

a) $a\in(0,1), b\in(0,1)$; b) $a\in(2,3), b\in(0,\infty)$; c) $a\in(0,\infty), b\in(0,\infty)$;
d) $a\in\{1,2\}, b=3$; e) $a\in(1,3), b\in(1,3)$; f) $a\in(2,3), b\in(1,3)$.

AM - 114 Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $g(x)=[x]f(x)$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Dacă f şi g sunt continue în punctul $n\in\mathbf{N}^*$, să se calculeze $f(n)$.

a) $f(n)=\dfrac{g(n)+1}{n}$ b) $f(n)=g(n)-1$ c) $f(n)=1$

d) $f(n)=-1$ e) $f(n)=\dfrac{1}{2}$ f) $f(n)=0$

AM – 115 Fie funcțiile $f_1, f_2, f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite astfel :

$$f_1(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases}; \qquad f_2(x)=\begin{cases}-\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}; \qquad f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

Care dintre următoarele funcții au proprietatea lui Darboux pe **R** ?

a) f_1 şi f_3 ; b) f_3 ; c) f_1 şi f_2 ; d) f_2 şi f_3 ; e) f_1,f_2 şi f_3 ; f) nici una .

AM - 116 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x-1)\le 3x+1\le 3f\left(\frac{x+1}{3}\right)-14, \quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

Decide :

a) $f(0)=3$ b) f este injectivă, dar nu este surjectivă c) f este bijectivă
d) f nu are proprietatea lui Darboux e) f nu e continuă f) nu există f cu această proprietate

AM - 117 Fie $f:[-3,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3; & x\in[-1,3]\\ x+m; & x\in[-3,-1)\end{cases}$

Să se determine toate valorile $m\in\mathbf{R}$ pentru care funcția f are proprietatea lui Darboux pe $[-3,3]$

a) $m\in\{1\}$ b) $m\in[1,3)$ c) $m\in[3,7]$

d) $m\in[1,7]$ e) $m\in\mathbf{R}$ f) $m\geq 1$

AM - 118 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât ecuația $2mx^3-5x-12m=0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală în intervalul (1,2).

a) $m\in(1,2)$ b) $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ c) $m\in\left\{-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$

d) $m\in\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ e) $m\in\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]$ f) $m\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

AM - 119 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\cos^2\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0\\ -1, & \text{dacă x} = 0\end{cases}$$

Să se precizeze care dintre afirmațiile de mai jos este corectă:

a) *f* nu este mărginită; b) *f* are limită în punctul *x*=0;

c) *f* este continuă în punctul *x*=0; d) *f* are proprietatea lui Darboux pe **R**;

e) *f* nu are proprietatea lui Darboux pe **R** f) restricția funcției *f* la intervalul $[-1,1]$ are proprietatea lui Darboux.

AM - 120 Ecuația $x2^x = 1$ are pe segmentul [0,1]:

a) cel puțin o soluție b) nu are soluție c) x=0 este singura soluție

d) x=1 este singura soluție e) $x = \frac{1}{2}$ este singura soluție

AM - 121 Fie $f : [0,1] \to [0,1] \cup [2,3]$, f continuă și $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Decide:

a) f surjectivă b) f injectivă c) f nu are proprietatea lui Darboux

d) f strict crescătoare e) f strict descrescătoare f) a), b), c), d), e) false

AM - 122 Să se rezolve inecuația: $(x^2 - 5x + 6)\ln(x-1) > 0$

a) $x \in (2,3)$ b) $x \in (1,2)$ c) $x \in (1,2) \cup (2,3)$

d) $x \in (3,\infty)$ e) $x \in (1,\infty)$ f) $x \in (0,\infty)$

AM - 123 Să se afle mulțimea soluțiilor inecuației

$$(x^3 + 2x)\ln(x+1) < 0$$

a) (-1, 0) b) $(0,\infty)$ c) $\{-1\}$

d) $\varnothing$ e) $(-1,0) \cup (0,\infty)$ f) $\{-1,0\}$

AM - 124 Fie funcțiile $f_1 : D_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$ și funcțiile $f_2 : D_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = |x|\sqrt{x-1}$. Știind că D_1 și D_2 sunt domeniile maxime de definiție ale celor două funcții, să se precizeze aceste domenii.

a) $D_1 = [1,+\infty) \cup \{0\}$; $D_2 [1,+\infty)$ b) $D_1 = [1,+\infty) \cup \{0\}$; $D_2 = [1,2)$

c) $D_1 = (1,+\infty)$; $D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$ d) $D_1 = D_2 = [1,+\infty)$

e) $D_1 = [1,+\infty)$; $D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$ f) $D_1 = D_2 = [1,+\infty) \cup \{0\}$

AM - 125 Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ştiind că $g(x) = x + \frac{1}{4}$, iar $(f \circ g)(x) = x^4 + \frac{1}{4}$, să se determine $f(x)$.

a) $f(x) = x^4 - \frac{1}{4}$ b) $f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{4}$ c) $f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)^4 - \frac{1}{4}$

d) $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{4}$ e) $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 - \frac{1}{4}$ f) $f(x) = (x - 1)^4 + \frac{1}{4}$

AM - 126 Cum se poate exprima faptul că graficul unei funcții $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de punctul $C(a, b)$, $a, b \in \mathbf{R}$?

a) $f(a - x) = f(a + x), \forall x \in \mathbf{R}$ b) $f(a + b - x) = f(2a - x), \forall x \in \mathbf{R}$

c) $2b - f(x) = f(2a - x), \forall x \in \mathbf{R}$ d) $2b + f(a - x) = f(2a - x), \forall x \in \mathbf{R}$

e) $2b + f(x) = f(2a + x), \forall x \in \mathbf{R}$ f) $2b - f(x) = f(a - x), \forall x \in \mathbf{R}$

AM - 127 Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x+1)\ln x$
Să se calculeze $f'(1)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) –1 f) –2

AM - 128 Să se calculeze derivata de ordinul unu a funcției

$$f: \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

a) $f'(x) = \frac{x^2 + 4}{2x^2}$ b) $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$ c) $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

d) $f'(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$ e) $f'(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ f) $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x}$

AM - 129 Să se calculeze derivata de ordinul doi a funcției

$$f(x)=\mathrm{tg}^2(2\,arcsin\,x)$$

a) $\dfrac{-16x^2+64x+8}{(1-2x^2)^3}$ b) $\dfrac{80x^2+8}{(1-2x^2)^4}$ c) $\dfrac{-16x^2+8}{1-2x^2}$

d) $\dfrac{-16x^2-64x+8}{(1-2x^2)^3}$ e) $\dfrac{-16x^2+64x-8}{(1-2x^2)^3}$ f) $\dfrac{16x^2+64x+8}{(1-2x^2)^3}$

AM - 130 Care este cea mai mică pantă posibilă a unei tangente la curba $y=x^3-3x^2+5x$?

a) $-\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5}{3}$ c) 1 d) 0 e) 2 f) -3

AM - 131 Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, & x=\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}^* \\ 0, & \text{în toate celelalte puncte}\end{cases}$.

Să se calculeze $f'(0)$.

a) nu există $f'(0)$ b) $f'(0)=0$ c) $f'(0)=1$

d) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ e) $f'(0)=+\infty$ f) $f'(0)=2$

AM - 132 Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right), \text{dac }, & x=\dfrac{1}{n} \quad n\in\mathbf{N}^* \\ x & \text{, în toate celelalte puncte.}\end{cases}$

Să se calculeze $f'(0)$

a) nu există $f'(0)$; b) $f'(0)=0$; c) $f'(0)=1$

d) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ e) $f'(0)=\infty$; f) $f'(0)=2$

AM - 133 Fie funcția $f: D \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f. Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$ şi în caz afirmativ să se calculeze valoarea derivatei în acest punct.

a) $f'(0) = 1$ b) $f'(0) = -1$ c) $f'(0)$ nu există

d) $f'(0) = 0$ e) $f'(0) = 2$ f) $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM - 134 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Determinați punctele în care f nu este derivabilă.

a) $\{-1,0,1\}$ b) $\{-1,0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\varnothing$ e) $\{-1,1\}$ f) $\{0\}$

AM - 135 Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Care este mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției f ?

a) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ b) $\mathbf{R}$ c) $[0,+\infty)$

d) $(-\infty,0]$ e) $[1,+\infty) \cup \{0\}$ f) $(-\infty,1]$

AM - 136 Fie şirul $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, cu termenul general $u_n = \frac{1 + x^n}{1 + x + \ldots + x^{n+p-1}}$,

unde $x \geq 0$ şi $p \in \mathbf{N}$. Dacă $f(x) = \lim_{n\to\infty} u_n$, atunci să se determine domeniile de continuitate C şi de derivabilitate D pentru f.

a) $C = [0,+\infty)$; $D = [0,+\infty)$ b) $C = [0,+\infty)$; $D = [0,+\infty) \setminus \{1\}$ c) $C = (0,+\infty)$; $D = (0,+\infty)$

d) $C = \mathbf{R}$; $D = \mathbf{R}$ e) $C = \mathbf{R}$; $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ f) $C = [1,+\infty)$; $D = [1,+\infty)$

AM - 137 Fie $f:\left[\frac{1}{e},e\right]\to \mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\arcsin|\ln x|$. Să se determine mulțimea punctelor în care funcția este derivabilă.

a) $\left[\frac{1}{e},e\right]$ b) $\left[\frac{1}{e},1\right)$ c) $(1,e]$ d) $[1,e]$ e) $\left(\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e)$ f) $\left[\frac{1}{e},1\right)\cup(1,e]$

AM - 138 Se dă funcția $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arccos\left(3x-4x^3\right)$.
Să se determine domeniul maxim de definiție E şi domeniul său de derivabilitate D.

a) $E=[-1,1]$; $D=(-1,1)$ b) $E=\mathbf{R}$; $D=\mathbf{R}$

c) $E=[-1,1]$; $D=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ d) $E=[-1,1]$; $D=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$

e) $E=[-2,2]$; $D=[-2,0)\cup(0,2]$ f) $E=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; $D=\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right]$

AM – 139 Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}[x], & \text{dacă } x\in\mathbf{Q}\\ x, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$
să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată :

a) f are limită, $(\forall)x\in\mathbf{R}$; b) f are limită într-un număr finit de puncte din $\mathbf{R}$

c) f nu are limită în nici un punct din $\mathbf{R}$; d) f e continuă pe $\mathbf{R}$

e) f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbf{R}$; f) f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

AM – 140 Fie funcțiile $f:(0,1)\to(2,3)$; $g:(2,3)\to(3,4)$ *si* $h:(0,1)\to(3,4)$ unde $h=g\circ f$; $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2; & 2<x\le\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}; & \frac{5}{2}<x<3\end{cases}$ şi $h(x)=\sin x+3$. Să se determine mulțimea punctelor de derivabilitate ale funcției *f*.

a) $(0,1)$; b) $(0,1)\setminus\frac{1}{2}$ c) $(0,1)\setminus\arcsin\frac{1}{3}$

d) $(0,1)\setminus\arcsin\frac{1}{4}$ e) $(0,1)\setminus\frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $(0,1)\setminus\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM – 141 Să se determine derivatele la stînga şi la dreapta punctelor $x = 0$ şi $x=1$ ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2|1-x|}$.

a) $f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=-\infty$ $f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=-\infty$ b) $f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=+\infty$ $f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=-\infty$ c) $f_s'(0)=\infty;\ f_d'(0)=-\infty$ $f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=-\infty$

d) $f_s'(0)=-\infty;\ f_d'(0)=\infty$ $f_s'(1)=-\infty;\ f_d'(1)=\infty$ e) $f_s'(0)=\infty;\ f_d'(0)=\infty$ $f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=\infty$ f) $f_s'(0)=-\infty;\ f_s'(0)=\infty$ $f_s'(1)=\infty;\ f_d'(1)=\infty$

AM – 142 Să se găsească punctele în care funcția $f:[0,3]\to\mathbf{R}$;
$f(x)=\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ nu este derivabilă.

a) $x=0$ şi $x=3$ b) $x=0$ şi $x=1$ c) $x=1-\frac{1}{\pi}$

d) *f* nu este continuă pe $[0,3]$ e) (0,3) f) $(0,3)\setminus\{1\}$

AM – 143 Se dă funcţia $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}}$; să se determine domeniul maxim de definiţie D şi mulţimea M a punctelor în care f nu este derivabilă .

a) $D = [1, \infty)$, $M = \phi$

b) $D = [1,10]$, $M = \{1,10\}$

c) $D = [10, \infty)$, $M = \{10\}$

d) $D = [1, \infty)$, $M = \{1,10\}$

e) $D = [1, \infty) \setminus \{10\}$, $M = \{1\}$

f) $D = [1, \infty)$, $M = \{10\}$

AM – 144 Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + bx^2 + cx + d, & x < 1 \\ arctg(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$

Ştiind că f este derivabilă de două ori pe **R** să se calculeze *f*(-2) .

a) 30 b) –30 c) –2 d) 25 e) –15 f) 6.

AM - 145 Se dă funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + mx - m}$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui *m* pentru care domeniul maxim de definiţie al funcţiei coincide cu domeniul maxim de derivabilitate al acestei funcţii.

a) $(-4,0)$ b) $[-4,0]$ c) $(-5,-3)$ d) $(-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$ e) $[-4,4]$ f) $(4,+\infty)$

AM - 146 Să se determine parametrii reali *a* şi *b* astfel încât funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$, să fie derivabilă pe **R** .

a) $a = 4, b = 0$

b) $a = 3, b = 0$

c) $a \in \mathbf{R}, b = 5$

d) $a = 3, b \in \mathbf{R}$

e) $a = 4, b = -1$

f) $a = -1, b = 4$

AM - 147 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}2\alpha\sqrt{4-x}+\beta, & x<2\\ \sqrt{x^2+\alpha}, & x\geq 2\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbf{Q}$ şi $\beta\in\mathbf{R}$. Precizaţi care sunt valorile lui α şi β pentru care f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $\alpha=1, \beta=0$ b) $\alpha=1, \beta=-1$ c) $\alpha=2, \beta=5\sqrt{2}$

d) $\alpha=-2, \beta=5\sqrt{2}$ e) $\alpha=2, \beta=-5\sqrt{2}$ f) $\alpha=0, \beta=1$

AM - 148 Să se determine parametrii reali *a* şi *b* astfel încât funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

definită prin $f(x)=\begin{cases}xe^x, & x\leq 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$, să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=1, b=1$ b) $a=2e, b=e$ c) $a=-2e, b=e$

d) $a=2e, b=-e$ e) $a=e, b=0$ f) $a=2, b=\frac{1}{e}$

AM - 149 Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ae^{2x}, & x\leq 0\\ \sin 2x+b\cos 3x, & x>0\end{cases}$.

Să se determine constantele reale *a* şi *b* astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$.

a) $a=b=1$ b) $a=1, b=2$ c) $a=b=2$

d) $a=3, b=1$ e) $a=b=3$ f) $a=1, b=-1$

AM - 150 Pentru ce valori ale tripletului de numere reale (α,β,χ) funcţia

$$f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{dacă } x\in(0,1]\\ \alpha x^2+\beta x+\chi, & \text{dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

este de două ori derivabilă pe $(0,+\infty)$?

a) $(1,-1,2)$ b) $\left(-1,2,-\frac{3}{2}\right)$ c) $\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{2},2,-\frac{3}{2}\right)$ e) $\left(\frac{1}{2},2,-\frac{3}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2},-2,\frac{3}{2}\right)$

AM - 151 Să se calculeze derivata funcției $f: E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}.$$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$ b) $f'(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$ c) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ f) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

AM - XI. 152 Să se calculeze derivata funcției $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$,

definită prin $$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$ b) $f'(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$ e) $f'(x) = \cos \dfrac{1}{x}$ f) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

AM - 153 Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constante reale nenule cu proprietatea că $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \in \mathbf{R}^*$.
Să se determine funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile pe $\mathbf{R}$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} f(x + a_i y) = n f(x) + by$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi $y \in \mathbf{R}^*$, unde b este o constantă reală.

a) $f(x) = \dfrac{bx}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} + c,\ c \in \mathbf{R}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)} + cx + d,\ c, d \in \mathbf{R}$

c) $f(x) = bx + x^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) + c,\ c \in \mathbf{R}$ d) $f(x) = cx - b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) x + d,\ c, d \in \mathbf{R}$

e) $f(x) = b\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) x$ f) $f(x) = bx + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

AM – 154 Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ dacă } & x \neq 0 \\ 0, \quad\quad \text{ dacă } & x = 0 \end{cases}$

şi g este derivabilă în $x = 0$. Să se calculeze derivata funcţiei $g \circ f$ în $x = 0$.

a) nu există b) 1 c) 2

d) 0 e) $\frac{1}{2}$ f) –1

AM – 155 Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabilă , cu proprietăţile :

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$ şi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$. Determinaţi $f(0)$ şi $f'(x)$.

a) $f(0) = 1, \quad f'(x) = 3x$; b) $f(0) = 0, \quad f'(x) = 3x$; c) $f(0) = 3, \quad f'(x) = 5x$;
d) $f(0) = 1, f'(x) = 5x + 1$; e) $f(0) = 0, f'(x) = 5x + 3$; f) $f(0) = 3, f'(x) = 3x + 5$

AM – 156 Fie f şi g funcţii derivabile pe intervalul (-1,1) cu proprietăţile:
$f(0) = \sqrt{2} - 1, \ f'(0) = \sqrt{2} + 1, \ \ f'(x) = g(x)$ şi $g'(x) = -f(x)$.
Determinaţi funcţia $h : (-1,1) \to \mathbf{R}$, definită prin $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$.

a) $h(x) = x^2 + x + 6$; b) $h(x) = x^2 + 6$; c) $h(x) = 6$;

d) $h(x) = 2$ e) $h(x) = 6 - x$; f) $h(x) = 6 - 2x$

AM – 157 Fiind dată funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pară şi derivabilă, să se calculeze $g'(0)$ unde funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este definită prin relaţia :

$$g(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right) f(x) + x.$$

a) $g'(0) = 1$; b) $g'(0) = -1$; c) $g'(0) = 0$ d) $g'(0) = \frac{1}{2}$ e) $g'(0) = -\frac{1}{2}$; f) $g'(0) = 2$

AM - 158 Fie $f:(a,b)\to\mathbf{R}$, $f(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,b)$ şi $c\in(a,b)$.

Ştiind că f este derivabilă în $x=c$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)^{\frac{1}{x-c}}$.

a) $e^{f'(c)}$ b) $e^{2f'(c)\cdot f(c)}$ c) $e^{\frac{f'(c)}{f(c)}}$ d) $e^{-f'(c)}$ e) $e^{\frac{f(c)}{f'(c)}}$ f) $e^{-f(c)\cdot f'(c)}$

AM - 159 Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, derivabilă astfel încât $f(-x)=f(x)$ pentru orice $x\in[-1,1]$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) $f'(0)=1$ b) $f'(0)=-1$ c) $f'(0)=\frac{1}{2}$ d) $f'(0)=-\frac{1}{2}$ e) $f'(0)=0$ f) $f'(0)=2$

AM - 160 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea $f(0)=0$ şi pentru care există $f'(0)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]$, unde $k\in\mathbf{N}^*$.

a) 0 b) $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)f'(0)$ c) $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)$

d) $1+2+\ldots+k$ e) k f) 1

AM - 161 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, real şi există $\lim\limits_{x\to\infty}xf'(x)$. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to\infty}xf'(x)$.

a) 1 b) 0 c) –1 d) a e) a^2 f) $\frac{a}{2}$

AM - 162 Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $k\in\mathbf{R}$, astfel încât funcția $g:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{x^2 f''(x)+kx f'(x)}{f(x)}$ să fie constantă.

a) $k=2$ b) $k=\dfrac{1}{2}$ c) $k=0$ d) $k=4$ e) $k=1$ f) $k=-1$

AM - 163 Fie α un număr real şi $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ funcția dată de:

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Să se determine $\alpha\in\mathbf{R}$ pentru care f este de două ori derivabilă în $x=0$.

a) $\alpha=2$ b) $\alpha=1$ c) $\alpha>1$ d) $\alpha>2$ e) $\alpha>3$ f) $\alpha\leq 3$

AM - 164 Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, prin $f(x)=\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{5^x}$. Să se calculeze derivata inversei funcției f în punctul $y=2$.

a) $\dfrac{1}{\ln 5}$ b) $\ln 5$ c) $\dfrac{1}{\ln 10}$ d) $\ln 10$ e) $-\dfrac{1}{\ln 10}$ f) $\ln 2$

AM - 165 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to(1,+\infty)$, $f(x)=4^x+2^x+1$. Să se arate că f este inversabilă, să se determine $g=f^{-1}$ şi să se calculeze $g'(3)$.

a) $g(y)=\ln\left(\sqrt{4y-3}-1\right)$; $g'(3)=\dfrac{1}{3}$

b) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left[\ln\left(\sqrt{4y-3}-1\right)-\ln 2\right]$; $g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

c) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\ln\dfrac{\sqrt{4y-3}-1}{2}$; $g'(3)=\dfrac{1}{3}$

d) $g(y)=\ln\sqrt{4y-3}+1$; $g'(3)=\dfrac{1}{3}$

e) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln\sqrt{4y-3}\right)$; $g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

f) $g(y)=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln\sqrt{4y-3}+2\right)$; $g'(3)=\dfrac{1}{3\ln 2}$

AM - 166 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^5+x$. Să se arate că f este bijectivă.Dacă g este inversa lui f, să se calculeze $g'(2)$ şi $g''(2)$.

a) $g'(2)=6,\ g''(2)=-20$ b) $g'(2)=\frac{1}{6},\ g''(2)=-\frac{20}{6^3}$ c) $g'(2)=\frac{1}{6}, g''(2)=-\frac{1}{25}$

d) $g'(2)=0,\ g''(2)=1$ e) $g'(2)=\frac{1}{6}, g''(2)=0$ f) $g'(2)=\frac{1}{36},\ g''(2)=-\frac{5}{6^3}$

AM - 167 Fie $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x$. Să se arate că funcţia $f:I\to f(I)$ este inversabilă pe intervalul $I=(1,+\infty)$ şi fie g inversa lui f. Să se calculeze $g'(2)$ şi $g''(2)$.

a) $g'(2)=\frac{1}{9},\ g''(2)=243$ b) $g'(2)=\frac{1}{9},\ g''(2)=-\frac{4}{243}$ c) $g'(2)=2,\ g''(2)=15$

d) $g'(2)=9,\ g''(2)=-\frac{243}{4}$ e) $g'(2)=-\frac{4}{243},\ g''(2)=\frac{1}{9}$ f) $g'(2)=\frac{2}{9},\ g''(2)=-\frac{4}{243}$

AM - 168 Fiind dată funcţia $f:[-1,1]\to[-2,2]$, $f(x)=\begin{cases}-3x-2, & x\in[-1,0]\\ x^2+1, & x\in(0,1]\end{cases}$,

să se precizeze dacă este inversabilă şi în caz afirmativ să se determine inversa.

a) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,2]\end{cases}$ b) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt{y+2}, & y\in[-2,0]\\ \sqrt{y+1}, & y\in(0,2]\end{cases}$

c) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2.1]\\ -\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$ d) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{3}(y+2), & y\in[-2,1]\\ -\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$

e) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y-1}, & y\in[-2,1]\\ \frac{1}{3}\sqrt{y+1}, & y\in(1,2]\end{cases}$ f) f nu admite inversă

AM - 169 Fiind dată funcția $f:[-2,2]\to[-1,5]$, $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x\in[-2,0]\\ x^2+1, & x\in(0,2]\end{cases}$,

să se determine inversa ei în cazul în care există.

a) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,3]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(3,5]\end{cases}$

b) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,5]\end{cases}$

c) nu este inversabilă

d) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,0]\\ \sqrt{y+1}, & y\in(0,5]\end{cases}$

e) $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(y-1), & y\in[-1,1]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(1,5]\end{cases}$

f) $f^{-1}(y)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(y+1), & y\in[-1,2]\\ \sqrt{y-1}, & y\in(2,5]\end{cases}$

AM - 170 Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul (e,e^2) la graficul funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x+x^2-1$.

a) $e-1$ b) $\frac{1-2e^2}{2}$ c) $1+2e^2$ d) $\frac{2e^2+1}{e}$ e) $\frac{2e^2-1}{2}$ f) $2e$

AM - 171 Pentru ce valoare a parametrului real t, funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{tx^3}{1+x^2}$ are în punctul $x=1$ graficul tangent unei drepte paralelă cu prima bisectoare ?

a) $t=1$ b) $t=-1$ c) $t=2$ d) $t=-2$ e) $t=-3$ f) $t=0$

AM - 172 Fie $f:[-1,+\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa x_0 a unui punct situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic să fie paralelă
cu coarda ce uneşte punctele de pe grafic de abscisă $x=0$, $x=3$.

a) $x_0=\frac{1}{3}$ b) $x_0=\frac{1}{4}$ c) $x_0=-\frac{1}{3}$ d) $x_0=\frac{5}{4}$ e) $x_0=-\frac{2}{3}$ f) $x_0=\frac{4}{3}$

AM - 173 Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-3\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ şi $x_0=-3+\frac{\sqrt{14}}{2}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul lui f în punctul de abscisă x_0.

a) $y=2x+4-2\sqrt{14}$ b) $y=2x+8+2\sqrt{14}$ c) $y=4x+8+2\sqrt{14}$

d) $y=4x+8-2\sqrt{14}$ e) $y=2x+8-2\sqrt{14}$ f) $y=x-4+2\sqrt{14}$

AM - 174 Fie funcția $f(x)=2\arcsin\frac{x-2}{2}-\sqrt{4x-x^2}$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x=1$.

a) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ c) $y=3+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$

d) $y=(x-1)-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}$ e) $y=-(x-1)-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ f) $y=x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}$

AM - 175 Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x}$, unde $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine a şi b ştiind că graficul lui f este tangent dreptei $y=-2$ în punctul $x=1$.

a) $a=4, b=-1$ b) $a=-1, b=2$ c) $a=2, b=3$

d) $a=-4, b=-1$ e) $a=-4, b=1$ f) $a=4, b=1$

AM - 176 Se consideră funcțiile $f(x)=x^2$ şi $g(x)=-x^2+4x+c$, unde $c\in\mathbf{R}$. Să se afle *c* astfel încât graficele lui f şi *g* să aibă o tangentă comună într-un punct de intersecție a curbelor.

a) $c=1$ b) $c=2$ c) $c=\frac{1}{2}$ d) $c=-2$ e) $c=3$ f) $c=-1$

AM - 177 Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definite prin $f(x)=\sqrt{|x|}$ şi $g(x)=x^3+ax+b$, unde $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine *a* şi *b* pentru care graficele celor două funcții sunt tangente în $x=1$.

a) $a=b=1$ b) $a=7, b=-7$ c) $a=b=3$

d) $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{5}{2}$ e) $a=-\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}$ f) $a=2, b=-3$

AM - 178 Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=xe^x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă x=-1.

a) -1 b) 0 c) 1

d) e e) -e f) 2e

AM - 179 Se consideră funcția $f(x)=\frac{x^2+px+q}{x^2+2}$. Să se determine parametrii p,q$\in\mathbf{R}$ astfel ca dreapta y=x-3 să fie tangentă graficului funcției în punctul A(1,-2).

a) p=1, q= -8 b) p=-2, q=-5 c) p=-3, q= -4

d) p=-4, q=-3 e) p=-5, q=-2 f) p=-6, q=-1

AM - 180 Determinați punctele A, B $\in G_f$, unde G_f este graficul funcției

$$f : E \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{-16x}{4x^2 + 12x + 1},$$

în care tangentele la grafic sunt paralele cu (Ox).

a) $A\left(-\frac{1}{2},-2\right), B\left(\frac{1}{2},-1\right)$

b) $A\left(\frac{1}{2},0\right), B\left(-\frac{1}{2},1\right)$

c) $A\left(\frac{1}{2},1\right), B\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2},1\right), B\left(\frac{1}{2},2\right)$

e) $A\left(\frac{3}{2},0\right), B\left(-\frac{3}{2},1\right)$

f) $A\left(-\frac{3}{2},1\right), B\left(\frac{3}{2},-1\right)$

AM - 181 Tangenta la graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, face cu axa Ox un unghi de 45^0 în punctele de abscise:

a) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+1}$ b) $\pm\sqrt{\sqrt{3}-1}$ c) $\pm\sqrt{\sqrt{3}+2}$

d) $\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$ e) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+2}$ f) $\pm\sqrt{\sqrt{5}+4}$

AM - 182 Să se determine punctul P de pe graficul funcției $f(x) = e^x + x$, în care tangenta la grafic trece prin origine.

a) P(0,1) b) $P(-1, e^{-1} - 1)$ c) P(1, 1+e)

d) $P(2, e^2 + 2)$ e) $P(-2, e^{-2} - 2)$ f) $P \in \varnothing$

AM - 183 Inegalitatea $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$ este adevărată pentru

a) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ b) $x \in [0,1]$ c) $x \in (0,+\infty)$

d) $x \in (-1,+\infty)$ e) $x \in [-1,1]$ f) $x \in (-1,+\infty)$

AM - 184 Fiind dată funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

să se precizeze care dintre afirmațiile următoare este adevărată

a) *f* este continuă pe **R**
b) *f* este discontinuă pe **R**
c) *f* este derivabilă în 0
d) *f* nu este derivabilă în 0 dar are derivata $f'(0) = \infty$
e) *f* nu este derivabilă în 0 dar are derivata $f'(0) = -\infty$
f) *f* nu este derivabilă şi nici nu are derivată în *x* = 0

AM - 185 Folosind intervalele de monotonie ale funcției $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, să se precizeze care din următoarele inegalități este adevărată.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5 > 5^{\sqrt{3}}$
b) $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$
c) $2^{\sqrt{3}} > 3^{\sqrt{2}}$
d) $8^{\sqrt{10}} < 10^{\sqrt{8}}$
e) $10^{\sqrt{11}} < 11^{\sqrt{10}}$
f) $2^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{2}}$

AM - 186 Să se afle soluția inecuației $\ln\left(x^2 + 1\right) > x$.

a) $x \in (0, +\infty)$
b) $x \in (-\infty, 1)$
c) $x \in (-\infty, 0)$
d) $x \in (1, +\infty)$
e) $x \in (-1, +\infty)$
f) $x \in (-\infty, 2)$

AM - 187 Pentru ce valori ale lui *x* are loc inegalitatea

$$\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}?$$

a) $x > -1$
b) $x > 0$
c) $x \geq 0$
d) $x < -1$
e) $x \in (-1, 0)$
f) $x \in \mathbf{R}$

AM - 188 Precizați soluția inecuației $\arcsin\frac{1}{x} - \arccos\frac{1}{x} \geq 0$.

a) $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ b) $\left[1, \sqrt{2}\right]$ c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ d) $[0,1]$ e) $[-1,0]$ f) $[-1,1]$

AM - 189 Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - mx$ este monoton crescătoare pe $\mathbf{R}$.

a) $(-\infty, 1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
d) $(-\infty, -1]$ e) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$ f) $[-1, 1]$

AM - 190 Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3\sin x}$. Să se afle mulțimea $f(\mathbf{R}) = \left\{ f(x) \mid x \in \mathbf{R} \right\}$.

a) $\mathbf{R}$ b) $[0, +\infty)$ c) $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right]$ d) $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ e) $(1,5)$ f) $\left[\frac{1}{2}, 8\right]$

AM - 191 Să se determine toate soluțiile $x \in (0, +\infty)$ ale inecuației: $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

a) $(0, +\infty)$ b) $(1, e]$ c) $[e, +\infty)$ d) e e) $\left[e, e^2\right]$ f) $\left[e^2, +\infty\right)$

AM - 192 Fie $f : [-1, +\infty) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}} - \operatorname{arctg} x$.
Să se determine parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) = ax + b$, $\forall\, x \in [-1, +\infty)$.

a) $a = 0, b = -\frac{\pi}{4}$ b) $a = 0, b = \frac{\pi}{4}$ c) $a = \frac{\pi}{4}, b = 0$
d) $a = -\frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{4}$ e) $a = 1, b = -1$ f) $a = \frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{4}$

AM - 193 Fiind date funcţiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$,
$g(x) = -2\operatorname{arctg} x$, să se arate că f şi g diferă printr-o constantă pe anumite intervale şi să se precizeze intervalele şi constantele corespunzătoare.

a) $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$

b) $f(x) - g(x) = \pi$, $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

c) $f(x) - g(x) = \begin{cases} -\pi, & x \in (-\infty,-1] \\ \pi, & x \in [1,+\infty) \end{cases}$

d) $f(x) - g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty,-1] \\ \frac{\pi}{4}, & x \in [1,+\infty) \end{cases}$

e) $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$

f) $f(x) - g(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x \in (-\infty,-1] \\ \frac{\pi}{2}, & x \in [1,+\infty) \end{cases}$

AM - 194 Să se afle punctele de extrem local ale funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^4 - 10x^2$, precizând natura lor.

a) $-\sqrt{5} = \min,\ 0 = \max,\ \sqrt{5} = \min$

b) $0 = \max,\ 5 = \min$

c) $-\sqrt{5} = \min, \sqrt{5} = \max$

d) $0 = \max, \sqrt{5} = \max$

e) $-\sqrt{5} = \max,\ 0 = \min, \sqrt{5} = \min$

f) $-\sqrt{5} = \max, 0 = \min,\ \sqrt{5} = \max$

AM - 195 Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 6x - x^3$ pe segmentul $[-2,3]$.

a) $f_{\min} = 2,\ f_{\max} = 4$

b) $f_{\min} = -5,\ f_{\max} = 6$

c) $f_{\min} = -8,\ f_{\max} = 4\sqrt{2}$

d) $f_{\min} = -2,\ f_{\max} = 7$

e) $f_{\min} = -9,\ f_{\max} = 4\sqrt{2}$

f) $f_{\min} = -7,\ f_{\max} = 4$

AM - 196 Care sunt valorile parametrului real *m* pentru care funcția

$$f:\mathbf{R}\setminus\{1,4\}\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{m-x}{x^2-5x+4}$$ nu are puncte de extrem ?

a) $m\in(-1,0)$ b) $m\in(5,8)$ c) $m\in(-3,0)$ d) $m\in(2,7)$ e) $m\in(-3,2)$ f) $m\in[1,4]$

AM - 197 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=e^x(x^2-x-1)$. Dacă notăm cu *m* valoarea minimă , iar cu *M* valoarea maximă a funcției f pe intervalul $[-3,0]$, să se determine *m* şi *M* .

a) $m=-1,\ M=5e^{-2}$ b) $m=0,\ M=e^{-1}$ c) $m=5e^{-2},\ M=6e^{-2}$
d) $m=e^{-1},\ M=5e^{-2}$ e) $m=e^{-1},\ M=11e^{-3}$ f) $m=1,\ M=e$

AM - 198 Care este mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$, unde *E* este domeniul maxim de definiție ?

a) $\{2\}$ b) $\{0,4\}$ c) $\varnothing$ d) $\{1\}$ e) $\{1,2\}$ f) $\{-1,5\}$

AM - 199 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+a}}$, unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine parametrul *a* astfel încât funcția să admită un extrem cu valoarea $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

a) $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $a=0$ şi $a=1$ c) $a=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d) $a=1$ e) $a=5$ f) $a=-2$

AM - 200 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}$ unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine *a* pentru care funcția f admite un punct de extrem situat la distanța 2 de axa Oy.

a) $a=-11,\ a=12$ b) $a=-12,\ a=11$ c) $a=-12,\ a=12$

d) $a=-4,\ a=3$ e) $a=1,\ a=-2$ f) $a=4,\ a=7$

AM - 201 Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax+a-2}{x^2+1}$ unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x=1$.

a) $a=1$ b) $a=2$ c) $a=-2$ d) $a=-1$ e) $a=3$ f) $a=-3$

AM - 202 Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+a}{x^2+2bx+1}$, $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile parametrilor a şi b pentru care graficul funcţiei f are un extrem în punctul $A(0,-1)$.

a) $a=1, b=0$ b) $a=-1, b=-\dfrac{1}{2}$ c) $a=0, b=\dfrac{1}{2}$

d) $a=-1, b=\dfrac{1}{2}$ e) $a=2, b=-\dfrac{1}{2}$ f) $a=-2, b=0$

AM - 203 Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+5$.

a) $\{0,3\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,2\}$ d) $\varnothing$ e) $\{1\}$ f) $\{0,1\}$

AM - 204 Fie $f:\mathbf{R}\setminus\{a\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2px+q}{x-a}$ unde $a,p,q\in\mathbf{R}$. Ştiind că graficul funcţiei f nu taie axa Ox, precizaţi câte puncte de extrem local are funcţia.

a) nici unul b) unu c) două d) trei e) cel puţin trei f) patru

AM - 205 Se dă funcţia $f:E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+3x+k^2}$ unde $a,k\in\mathbf{R}^*$. Să se determine a şi k pentru care valorile extreme ale funcţiei f sunt -1 şi -2.

a) $a=2, k=3$ b) $a=5, k=\pm\dfrac{1}{2}$ c) $a=2, k=5$

d) $a=-4, k=\pm\dfrac{1}{2}$ e) $a=-1, k=\dfrac{3}{2}$ f) $a=-2, k=\pm\dfrac{3}{2}$

AM - 206 Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}.$$

a) $x=-1$ maxim, $x=1$ minim
b) $x=-1$ maxim, $x=-2$ minim
c) $x=-1$ şi $x=-2$ maxime, $x=1$ minim
d) $x=-1$ şi $x=2$ maxime
e) $x=1$ şi $x=-2$ minime
f) $x=-1$ şi $x=-3$ maxime

AM - 207 Fie funcţia $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{ax^2+b}$, D fiind domeniul maxim de definiţie , iar $a,b\in\mathbf{R}$. Să se determine a şi b cunoscând că D este un interval de lungime 2 şi că funcţia admite un extrem egal cu 1.

a) $a=1, b=1$
b) $a=-4, b=-2$
c) $a=1, b=-1$
d) $a=0, b=2$
e) $a=-1, b=1$
f) $a=-2, b=0$

AM - 208 Fie funcţia $f:D\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ unde D este domeniul ei maxim de definiţie. Să se determine coordonatele şi natura punctelor sale de extrem.

a) f nu are puncte de extrem local
b) $A\left(-1,-\dfrac{\pi}{4}\right)$ - minim
c) $B\left(0,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ - minim
d) $C\left(0,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ - maxim şi D(1,0) - minim
e) $E\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ - minim
f) $F\left(0,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ - minim şi G(1,0) - maxim

AM - 209 Fie funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x-1|\cdot e^{\frac{1}{x}}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ?

a) f nu este definită în $x=1$
b) f este strict monotonă
c) f este derivabilă pe domeniul de definiţie
d) f are un punct unghiular în $x=1$
e) f este convexă pe tot domeniul de definiţie
f) f are un punct de întoarcere în $x=1$

AM - 210 Să se determine punctele unghiulare şi punctele de întoarcere ale funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{|x-1|}{|x|+1}$.

a) $x=0$, $x=1$ puncte de întoarcere
b) $x=1$ punct unghiular şi $x=0$ punct de întoarcere
c) $x=0$ şi $x=1$ puncte unghiulare
d) f nu are puncte unghiulare şi nici puncte de întoarcere
e) $x=-1$ punct unghiular
f) $x=1$ punct de întoarcere şi $x=0$ punct unghiular

AM - 211 Fie $f:(0,1)\to\mathbf{R}$ şi $x_0\in(0,1)$. Considerăm proprietățile:

P_1 : x_0 este punct de extrem local al funcției f
P_2 : x_0 este punct de inflexiune
P_3 : x_0 este punct de întoarcere al graficului funcției f
P_4 : $f'(x_0)=0$

Care din următoarele implicații este adevărată ?

a) $P_1\Rightarrow P_4$
b) $P_4\Rightarrow P_1$
c) $P_3\Rightarrow P_1$
d) $P_3\Rightarrow P_2$
e) $P_2\Rightarrow P_4$
f) $P_4\Rightarrow P_2$

AM - 212 Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2\left(x^2+2x+2\right)}}$.

Să se precizeze natura punctului $A\left(-2,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) punct de inflexiune, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$
b) punct de maxim, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$
c) punct de discontinuitate
d) punct de minim, $(\exists)f'(-2)\in\mathbf{R}$
e) punct de întoarcere
f) punct unghiular

AM - 213 Se dă $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{\left|x^2+ax+b\right|}$ cu $a,b\in\mathbf{R}$.

Să se determine parametrii *a* şi *b* astfel ca f să admită pe $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=5$ ca puncte de extrem local.

a) $a=4, b=5$
b) $a=-4, b=5$
c) $a=4, b=-5$
d) $a=-4, b=-5$
e) $a=1, b=3$
f) $a=-2, b=4$

AM - 214 Fie m şi M valorile extreme ale funcţiei

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=x^3+ax+b\ \ (a,b\in\mathbf{R},\ a<0).$$

Să se calculeze produsul $m\cdot M$ în funcţie de a şi b.

a) $\dfrac{a^3}{3}+b^2$ b) $\dfrac{27a^3}{4}+b^2$ c) $b^2+\dfrac{4}{27}a^3$ d) a^2+b^2 e) 1 f) $\dfrac{4b^2}{27}+a^3$

AM - 215 Să se precizeze valorile parametrului real a, pentru care funcţia

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$ are trei puncte de extrem diferite.

a) $a\in(-3,3)$ b) $a\in(-2,2)$ c) $a\in\{-2,2\}$

d) $a\in[-2,2]$ e) $a\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ f) $a\in\left(-\dfrac{1}{2},7\right)$

AM - 216 Se consideră ecuaţia $x^5+5x^3+5x-2m=0$, unde $m\in\mathbf{R}$. Să se determine toate valorile lui m astfel încât ecuaţia să aibă o singură rădăcină reală.

a) $m\in\mathbf{R}$ b) $m\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ c) $m=0$ d) $m\in(-\infty,0]$ e) $m\in[0,+\infty)$ f) $m\in\varnothing$

AM - 217 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m astfel ca ecuaţia $2\ln x+x^2-4x+m^2-m+1=0$ să aibă o rădăcină reală supraunitară.

a) $m\in(10,11)$ b) $m\in(-2,-1]$ c) $m\in(-1,2)$

d) $m\in(2,+\infty)$ e) $m\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ f) $m\in(-\infty,-1)$

AM - 218 Să se determine toate valorile parametrului real m pentru care ecuaţia

$e^x=mx^2$ are trei rădăcini reale.

a) $m\in(-\infty,0]$ b) $m\in\left(0,\dfrac{e^2}{8}\right)$ c) $m=1$

d) $m\in\left(\dfrac{e^2}{8},\dfrac{e^2}{4}\right)$ e) $m\in\left(\dfrac{e^2}{4},+\infty\right)$ f) $m=\dfrac{e^2}{4}$

AM - 219 Se dă ecuația $2x^3 + x^2 - 4x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$. Să se determine parametrul real m astfel ca ecuația să aibă toate rădăcinile reale.

a) $m \in (-\infty, -3)$ b) $m \in \left[\frac{-44}{27}, 3\right]$ c) $m \in (-\infty, -3] \cup \left(0, \frac{44}{27}\right]$

d) $m \in (-3, +\infty)$ e) $m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{44}{27}, +\infty\right)$ f) $m \in \left[-5, \frac{44}{27}\right]$

AM - 220 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real p pentru care ecuația: $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + p = 0$ are toate rădăcinile reale.

a) $\mathbf{R}$ b) $[0,4]$ c) $\{0,4\}$ d) $[16,23]$ e) $[-23,-16]$ f) $[-23,16]$

AM - 221 Să se determine toate valorile reale ale lui a pentru care ecuația $x^3 - 3x^2 + a = 0$ are toate rădăcinile reale şi distincte.

a) $[0,4]$ b) $(0,4)$ c) $(0,4]$ d) $[1,+\infty)$ e) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ f) $(0,1)$

AM - 222 Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbf{R}$, ecuația $2^x - x\ln 2 = m$ are două rădăcini reale distincte ?

a) $m < 1$ b) $m = 1$ c) $m > 1$ d) $m = \ln 2$ e) $m > \ln 2$ f) $m < \ln 2$

AM - 223 Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Dacă x_1 este rădăcina reală a ecuației , să se calculeze: $\lim_{n\to\infty}\left(x_2^n + x_3^n\right)$.

a) nu există b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) 0 e) 1 f) -1

AM - 224 Se consideră ecuația: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4. Dacă toate rădăcinile ecuației sunt reale , să se precizeze aceste rădăcini.

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$

b) $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3,\ x_4 = -4$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

d) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

e) $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 5$

f) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = 5$

AM - 225 Să se afle mulțimea valorilor lui $p \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația

$3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + p = 0$ are rădăcină dublă negativă.

a) $\{-23, -16\}$ b) $\varnothing$ c) $\{-23, 16\}$ d) $\{23, -16\}$ e) $\{23\}$ f) $\{16\}$

AM - 226 Care sunt valorile parametrului real λ pentru care ecuația:

$x^3 - 3x^2 - 3x + 5 + \lambda^2\sqrt{2} = 0$ admite rădăcini duble ?

a) $(-1,1) \subset \mathbf{R}$ b) nu admite rădăcini duble c) $\{-2,2\}$

d) $\{3,4\}$ e) $\{1,3\}$ f) $[0,1) \subset \mathbf{R}$

AM - 227 Fie $a_1 > 0,\ a_2 > 0$ și $a_1^x + a_2^x \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se calculeze produsul $a_1 \cdot a_2$.

a) 0 b) 2 c) $+\infty$ d) 1 e) $\frac{1}{2}$ f) 4

AM - 228 Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$, $(\forall)\, x \in \mathbf{R}$.

a) 3 b) 6 c) 2 d) 5 e) -5 f) 8

AM - 229 Fie $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\in[-1,0) \\ cx^2+4x+4, & x\in[0,1] \end{cases}$,
unde $a,b,c\in\mathbf{R}$. Care sunt valorile parametrilor *a*, *b*, *c* pentru care f verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1,1]$?

a) $a=1, b=2, c=\frac{1}{3}$ b) $a=-1, b=-1, c=2$ c) $a=-2, b=-2, c=8$

d) $a=4, b=4, c=-7$ e) $a=2, b=3, c=5$ f) $a=-1, b=-2, c=7$

AM – 230 Fie funcția $f:[-1,a]\to\mathbf{R}$, $f(x)=|3x-2|-5$, unde $a>-1$. Să se determine valoarea lui a astfel încât f să îndeplinească condițiile din teorema lui Rolle.

a) 0 b) $\frac{7}{3}$ c) nu există d) 1 e) 2 f) $\frac{2}{3}$

AM – 231 Se consideră ecuația $4x^3+x^2-4x+a=0$, unde a este un parametru real. Pentru ca ecuația să aibe trei rădăcini reale, parametrul a aparține următorului interval :

a) $a\in\left[-\frac{52}{27},\frac{5}{4}\right]$; b) $a\in\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{4}\right)$; c) $a\in\left(-\frac{2}{7},\frac{5}{4}\right)$

d) $a\in\left(-\frac{5}{7},\frac{4}{5}\right)$; e) $a\in(1,5)$ f) $a\in(2,5)$

AM – 232 Să se determine pentru care valori ale parametrului real a ecuației $x^5-5a^4x+4a^3=0$ admite o singură rădăcină reală (fără a fi multiplă).

a) $a\in(-\infty,-1)$ b) $a=-1$ c) $a\in(-1,0)\cup(0,1)$ d) $a=1$ e) $a\in(0,\infty)$ f) $a=0$

AM – 233 Ecuația $f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$ admite:

a) numai rădăcini complexe dacă *n* impar

b) numai rădăcini reale dacă *n* par

c) o singură rădăcină reală dacă *n* este impar şi nici o rădăcină dacă *n* este par

d) admite toate rădăcinile reale dacă *n* este impar

e) admite două rădăcini complexe dacă *n* este impar şi restul reale

f) admite două rădăcini reale şi restul complexe dacă *n* este par

AM – 234 Care sunt intervalele de variație ale parametrului real a pentru care ecuația

$$x^4-15x^2+ax-12=0$$

are două rădăcini reale.

a) $(-\infty,-26)$ b) $(-28,28)$ c) $(26,+\infty)$ d) $(-\infty,-26)\cup(26,+\infty)$
e) $(-\infty,-28)\cup(-26,26)\cup(28,+\infty)$ f) $(-28,-26)\cup(26,28)$

AM – 235 Pentru ce valori ale parametrului $m\in\mathbf{R}$, funcția polinomială $f(x)=x^3-3x^2-m+7$, admite trei rădăcini reale distincte, una negativă şi două pozitive.

a) $m\in[3,7]$ b) $m\in[3,7)$ c) $m\in(3,7]$ d) $m\in(3,7)$ e) $m\in(0,7)$ f) $m\in(0,3)$.

AM – 236 Ştiind că ecuația $3x^3-3x^2+1=0$ are o rădăcină reală x_1, iar celelalte două rădăcini complexe conjugate $x_{2,3}=a\pm ib$, să se determine tripletul de mulțimi I , J_1 şi J_2 pentru care $x_1\in I,\ a\in J_1$ şi $|x_2|=|x_3|\in J_2$.

a) $I=(-\infty,0);J_1=\left(\frac{1}{2},\infty\right);J_2=\mathbf{R}_+^*$; b) $I=(-\infty,0);J_1=(1,\infty);J_2=(-\infty,0)$

c) $I=(-\infty,0);J_1=(-\infty,0);J_2=(1,\infty)$; d) $I=(-\infty,-1);J_1=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right);J_2=(0,\infty)$

e) $I=(1,\infty);J_1=\left(\frac{1}{2},\infty\right);J_2=\mathbf{R}^*$; f) $I=R;J_1=\left(\frac{1}{2},\infty\right);J_2=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

AM – 237 Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației :

$$x^3 - 2x - \ln|x| = 0 .$$

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4; f) 5.

AM – 238 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real *m* astfel ca ecuația $x^4 - 4x^3 + m = 0$ să aibă toate rădăcinile complexe.

a) $m \in (-\infty, 27)$ b) $m \in (27, \infty)$ c) $m \in (0, 27)$

d) $m \in (-8, 0) \cup (27, \infty)$ e) $m \in (-27, 0)$ f) $m \in (-\infty, -27)$

AM – 239 Care este condiția ca ecuația $na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} = 0 \quad n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ să aibe cel puțin o rădăcină în intervalul (0,1)

a) $na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} = 0$; b) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \neq 0$

c) $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1} = 0$; d) $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 0$

e) $na_0 + (n-1)a_1 + \ldots + 2a_{n-2} \neq 0$;

f) $n(n-1)a_0 + (n-1)(n-2)a_1 + \ldots + 6a_{n-3} + 2a_{n-2} = a_{n-1}$

AM- 240 Fie polinomul $f = x^{3n-1} + ax + b; \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad a, b \in \mathbf{R}.$ Care din următoarele afirmații sunt adevărate pentru valorile lui *a* şi *b* pentru care f se divide cu $x^2 + x + 1, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$

a) *f* nu are rădăcini reale b) *f* are cel puțin o rădăcină reală

c) *f* are cel mult o rădăcină reală d) *f* are cel puțin două rădăcini reale

e) *f* are două rădăcini reale f) *f* are trei rădăcini reale.

AM – 241 Să se precizeze care dintre următoarele condiţii este suficientă pentru ca ecuaţia :

$$x^{p+q} - A\left(x^p - 1\right) = 0, \quad \left(p, q \in \mathbf{N}, \text{impare}, A > 0\right)$$

să aibă două rădăcini reale şi pozitive.

a) $p^p q^q A^p < \left(p+q\right)^{p+q}$; b) $p^p q^q A^p > \left(p+q\right)^{p+q}$; c) $p^p A^p > \left(p+q\right)^{p+q}$

d) $q^q p^p A^p < \left(p+q\right)^{p \cdot q}$; e) $p^q \cdot q^p A^p > \left(p+q\right)^{p \cdot q}$; f) $p^p \cdot q^q > A^p$.

AM – 242 Dacă x_2 şi x_3 sunt rădăcinile imaginare ale ecuaţiei $x^3 - x - 1 = 0$, precizaţi cărui interval aparţine partea lor reală :

a) $\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$; b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;

d) $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; e) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$.

AM – 243 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care ecuaţia: $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + m = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

a) $m \in (-8, -13)$; b) $m \in (-13, -8)$; c) $m \in (-8, 19)$;

d) $m \in (19, \infty)$; e) $m = -8$; f) $m = 19$.

AM – 244 Fiind dată ecuaţia $x^3 - 2x + 1 - \ln|x| = 0$, iar S fiind suma rădăcinilor acesteia, să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $S \in \left(-e^2, -e\right)$ b) $S \in (-e, -2)$ c) $S \in (-2, -1)$

d) $S \in (-1, 0)$ e) $S \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ f) $S \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

AM – 245 Fiind dată funcția $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\dfrac{1}{x}, x \in \mathbf{R}\setminus\{0\} \\ 0, \quad\quad x=0 \end{cases}$ şi c_n punctele rezultate aplicând teorema lui Lagrange funcției *f* pe intervalul

$\left[\dfrac{1}{\frac{3\pi}{4}+2n\pi}, \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}\right]$, $n \in \mathbf{N}$, să se calculeze : $L=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(c_n)+nf'(c_n)\right)$.

a) $L = 0$ b) $L = 1$ c) $\dfrac{1}{\pi}$ d) $L=\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi}$ e) $L=\sqrt{2}\pi$ f) $L=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM – 246 Fie $f: D_m \to \mathbf{R}$, $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{mx}{5}\right)$, $m>0$, m parametru şi D_m domeniul maxim de definiție. Să se determine toate valorile lui m pentru care f verifică ipotezele teoremei lui Lagrage pe intervalul $[-4,4]$

a) $m\in[0,5]$; b) $m\in\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$; c) $m\in\left(0,\dfrac{5}{4}\right)$;

d) $m\in\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{4}\right)$; e) $m\in\left(\dfrac{5}{4},2\right)$; f) $m\in\phi$

AM – 247 Se consideră funcțiile $f,g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$, $g(x)=e^{x+1}$ şi $h(x)=(g\circ f)(x)$.

Să se determine constanta *c* din teorema lui Lagrange aplicată funcției *h* pe $[1,2]$.

a) $c=1-\ln(e-1)$; b) $c=\ln(e^2-1)$; c) $c=1+\ln(e-1)$;

d) $c=\ln(e-1)-1$; e) $c=\dfrac{3}{2}$; f) $c=1$.

AM - 248 Să se determine constanta c care intervine în teorema lui Lagrange pentru funcția $f:[-2,5]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3}, & x\in[-2,1)\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{4}, & x\in[1,5]\end{cases}$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $-\frac{1}{16}$ f) $\frac{1}{14}$

AM - 249 Să se determine constanta c care intervine în teorema lui Lagrange pentru funcția $f:[0,3]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}-x^2+1, & x\in(1,3]\\ -x+\dfrac{4}{3}, & x\in[0,1]\end{cases}$

a) $c=\frac{2\sqrt{2}}{3}-1$ b) $c=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $c_1=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $c_2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $c=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $c=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ f) $c=\frac{-2\sqrt{3}}{2}+1$

AM - 250 Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[0,x]$, se obține punctul $c\in(0,x)$, unde $c=\theta\cdot x$, $0<\theta<1$ şi $\theta=\theta(x)$. Să se calculeze: $L=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\theta(x)$.

a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=\frac{1}{3}$ e) $L=0$ f) $L=3$

AM - 251 Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ k, & x=0\end{cases}$, să se determine valorile parametrului real k pentru care f admite primitive pe **R**.

a) $k=0$ b) $k=1$ c) $k=0$ sau $k=1$ d) $k=2$ e) $k\in\mathbf{R}$ f) nu există k

AM - 252 Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(-\infty,0) \\ x^2, & x\in[0,2) \\ 2x, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$.

Care din următoarele funcții F este o primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$?

a) $F(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-\infty,0) \\ 2x, & x\in[0,2) \\ 2, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+1, & x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,2) \\ x^2-\dfrac{4}{3}, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases} 1, & x\in(-\infty,0) \\ 2x-2, & x\in[0,2) \\ 2, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x\in(-1,0) \\ \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,2) \\ x^2-\dfrac{4}{3}, & x\in[2,3) \end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+1, & x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x^3}{3}+1, & x\in[0,2) \\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$

f) Nici una dintre funcțiile precedente nu este primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$

AM - 253 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\le 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$. Precizați care din următoarele funcții reprezintă o primitivă a funcției f:

$F_1(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$

$F_2(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+c, & x\le 0 \\ e^x+c, & x>0 \end{cases}$

$$F_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}\qquad F_4(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x, & x\le 0\\ e^x+1, & x>0\end{cases}$$

a) toate b) nici una c) F_1

d) F_2 e) F_3 f) F_4

AM - 254 Se dă funcția $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,0)\\ x^2+2, & x\in[0,1]\end{cases}$.

Care din următoarele afirmații este adevărată ?

a) $F(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0)\\ 2x, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui f

b) $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\in[-1,0)\\ 2x+1, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui f

c) $F(x)=\begin{cases}e^x+1, x\in[-1,0)\\ \dfrac{x^3}{3}+2, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui f

d) $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,0)\\ \dfrac{x^3}{3}+1, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui f

e) f nu are primitive pe $[-1,1]$

f) $F(x)=\begin{cases}e^x, & x\in[-1,0)\\ \dfrac{x^2}{2}+3, x\in[0,1]\end{cases}$ este primitivă a lui f

AM - 255 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbf{Q}\\ 2^x & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$

Care din următoarele afirmații este corectă ?

a) $f(x)$ admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3} & ,x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2} & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$

b) $f(x)$ admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+c_1 & ,x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+c_2 & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ $c_1\neq c_2$

c) $f(x)$ nu admite primitive

d) $f(x)$ admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+c & ,x\in\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+c & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$

e) $f(x)$ admite primitiva $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+1 & ,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\\ \dfrac{2^x}{\ln 2}+1 & ,x\in\mathbf{Q}\end{cases}$

AM - 256 Să se stabilească dacă există primitivele $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ale funcției

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$, iar în caz afirmativ să se

calculeze.

a) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+1, x<0\\ x+1, \quad x\geq 0\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

d) nu admite primitive pe **R**

e) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C, x<0\\ x+C, \quad x\geq 0\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_1, x<0\\ x+C_2, \quad x\geq 0\end{cases}$

AM - 257 Să se precizeze dacă funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\inf\limits_{t\le x}\left(t^2-t+1\right), & \text{dacă } x\le\frac{1}{2}\\ \sup\limits_{t\ge x}\left(-t^2+t+1\right), & \text{dacă } x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

admite primitive pe **R** şi în caz afirmativ să se determine primitivele.

a) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+\frac{5}{24}+C, x\le\frac{1}{2}\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1, \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C, \quad x\le\frac{1}{2}\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{6}+C, x>\frac{1}{2}\end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+1+C, x\le\frac{1}{2}\\ -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x, \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$

d) Nu admite primitive

e) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{24}+C, x\le\frac{1}{2}\\ -5x+C, \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$

f) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C_1, x\le\frac{1}{2}\\ 5x+C_2, \quad x>\frac{1}{2}\end{cases}$

AM - 258 Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel ca funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2+\ln(1-x), x\langle 0\\ a, \quad x=0\\ 1+e^{-2x}, \quad x>0\end{cases}$$ să admită primitive pe **R** .

a) a = 1 b) a = -1 c) a = -2 d) a = 2 e) a = 3 f) $a=\frac{1}{3}$

AM - 259 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2-e^{-x}, x<0\\ m, \quad x=0\\ 1-3\sin x, x>0\end{cases}$.

Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care funcția f admite primitive şi apoi să se determine primitivele corespunzătoare.

a) $m=2,\ F(x)=\begin{cases}2x+e^{-x}+2+C, x<0\\ 2x,\ x=0\\ x+3\cos x+C, x>0\end{cases}$ b) $m=1,\ F(x)=\begin{cases}2x+e^{-x}+2+C, x\le 0\\ x+3\cos x+C, \quad x>0\end{cases}$

c) $m=1,\ F(x)=\begin{cases}2x+e^{-x}+2+C, x<0\\ C,\ \ x=0\\ x+3\cos x+C, \quad x>0\end{cases}$ d) $m=1,\ F(x)=\begin{cases}x, \quad x\le 0\\ x+3\cos x+C, x>0\end{cases}$

e) $m=0,\ F(x)=\begin{cases}2x+e^{-x}+2+C, x\le 0\\ x+3\cos x+C, \quad x>0\end{cases}$ f) $m=3,\ F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}+C, x\le 0\\ x+3\sin x+C, x>0\end{cases}$

AM - 260 Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F(x)=x|x-a|+|x-b|+|x-c|$ unde $a, b, c\in\mathbf{R}$. Care sunt valorile parametrilor a, b, c pentru care F este o primitivă a unei funcții $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$?

a) $a=b=c=-1$ b) $a=b=3,\ c=4$ c) $a=b=c=-3$

d) $a=-1,\ b=c=1$ e) $a=b=c=-2$ f) $a=-b=c=3$

AM - 261 Să se determine primitivele funcției $f:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$, unde
$$f(x)=\sqrt{1+\cos x}.$$

a) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C$ b) $\begin{cases}2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1, x\in[0,\pi]\\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_2, x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1, x\in[0,\pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C_1+4\sqrt{2}, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}, x\in[0,\pi] \\ -2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}+C, x\in(\pi,2\pi] \end{cases}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{x}{2}+C$

f) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{x}{2}+C$

AM - 262 Să se stabilească dacă există , şi în caz afirmativ să se afle primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-2+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

a) nu admite primitive

b) $F(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x+C_1, x\in(-\infty,1] \\ -\dfrac{x^2}{2}+C_2, \quad x\in(1,3] \\ 3\dfrac{x^2}{2}+6x+C_3, x\in(3,+\infty) \end{cases}$

c) $F(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{x^2}{2}+1+C, x\in(1,3] \\ 3\dfrac{x^2}{2}-6x+10+C, x\in(3,+\infty) \end{cases}$

d) $F(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,3] \\ 3\dfrac{x^2}{2}+6x+C, x\in(3,+\infty) \end{cases}$

e) $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+2x+C, x\in(-\infty,1] \\ 2x+3+C, x\in(1,3] \\ 3\dfrac{x^2}{2}+6x+C, x\in(3,+\infty) \end{cases}$

f) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-6x+9}}+C$

AM - 263 Se consideră funcţia $f:(0,1)\rightarrow\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x^2-2x+1}$.

Să se găsească numerele reale *m*, *n* şi *p* astfel încât funcţia

$F:(0,1)\rightarrow\mathbf{R}$, $F(x)=\dfrac{mx^3+nx^2+px}{x-1}$ să fie primitivă pentru f.

a) $m=1, n=\frac{9}{2}, \ p=27$ b) $m=\frac{1}{2}, n=-\frac{9}{2}, \ p=27$ c) $m=\frac{1}{2}, n=\frac{9}{2}, \ p=27$

d) $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{9}{2}, \ p=27$ e) $m=1, n=27, \ p=9$ f) $m=2, n=3, \ p=\frac{1}{2}$

AM - 264 Să se determine parametrii reali *a, b, c* astfel încât funcţia

$f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}, \quad f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{axe^{nx}+bx^2+c}{e^{nx}+1}$ să admită primitive pe $\mathbf{R}$.

a) $a, b, c\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ b) $a,b\in\mathbf{R}$, $c=0$ c) $a=1$, $b=1$, $c=-3$

d) $a=1$, $b, c\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ e) $a=1$, $b,c\in\mathbf{R}$ f) $a, c\in\mathbf{R}$, $b=0$

AM - 265 Să se determine relaţiile dintre *a, b, c, A, B, C,* astfel încât primitivele $\displaystyle\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)^2 dx$ să fie funcţii raţionale.

a) $A\cdot B=B\cdot C=C\cdot A$, $a\cdot b=b\cdot c=c\cdot a$ b) $A=B\cdot C$, $a=b\cdot c$ c) $A=B=C$, $a=1, b=2, c=3$

d) $A+B+C=0$, $a+b+c=0$ e) $A(b-c)=B(c-a)=C(a-b)$ f) $A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c=0$

AM – 266 Calculați integrala nedefinită

$$\int \frac{x+1}{x} dx \text{ pentru orice } x \in (a,b), \text{ unde } 0 \notin (a,b).$$

a) $1 + \ln x + C$ b) $x - \frac{1}{x^2} + C$ c) $x + \frac{1}{x^2} + C$

d) $x + \ln|x| + C$ e) $\ln|x+1| + C$ e) $\frac{x+1}{x} + C$

AM – 267 Calculați integrala:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}.$$

a) $e^{-1} - e^{-\sqrt{2}}$ b) $e^{-\sqrt{2}} - e^{-1}$ c) $2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{2}}\right)$

d) $2\left(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1}\right)$ e) $\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{2}}\right)$ f) $\left(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1}\right)$

AM – 268 Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+2} dx$$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}$

d) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ e) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg 2 \ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} 2$

AM – 269 Să se calculeze $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$.

a) $\arcsin e - \arcsin e^2$ b) $\arcsin e^{-1} - \arcsin e^{-2}$ c) $\arcsin e^2 - \arcsin e$

d) $\arcsin e^{-2} - \arcsin e^{-1}$ e) $\frac{1}{2}\left(\arcsin e^{-2} - \arcsin e^{-1}\right)$ f) $\frac{1}{2}\left(\arcsin e - \arcsin e^2\right)$

AM – 270 Să se calculeze $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2 x dx}$.

a) $ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$ b) $ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ c) $ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

d) $ln\left(\sqrt{2}-1\right)$ e) $ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ f) $ln\left(2+\sqrt{2}\right)$

AM – 271 Să se calculeze: $\int_1^2 f(x)dx$, unde

$f(x)=x^n \cdot \ln x,\ x>0$, n – număr natural $(n \geq 1)$.

a) $\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2$ b) $\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2-\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ c) $\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2-\dfrac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2}$

d) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\ln 2$ e) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}(\ln 2-1)$ f) $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}(\ln 2+1)$

AM – 272 Să se calculeze: $\int_0^1 \left(x^2-2x-1\right)e^x dx$.

a) $e-1$ b) -3 c) $3(e-1)$ d) $3(1-e)$ e) $3e$ f) $-3e$

AM – 273 Să se calculeze

$$I=\int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot ln\, a^{x^5+4x^3+3x} dx ,$$

unde $a>0, a \neq 1$.

a) $\dfrac{1}{3} ln\, a\left(a^3 ln\, a-1\right)$ b) $\dfrac{1}{a\, ln\, a}\left(3a^4 ln\, a-a^4\right)$ c) $\dfrac{1}{3}a^4 ln\, a$

d) $\dfrac{4a^4 ln\, a-a^4+1}{3 ln\, a}$ e) $a^4\left(a^3+3a-ln\, a\right)$ f) $\dfrac{1}{3}\left(a^4 ln\, a+1\right)$

AM – 274 Să se calculeze

$$I=\int_0^1\left[1+xf'(x)\right]e^{f(x)}dx .$$

a) $I=e^{f(1)}$; b) $I=e^{f(1)}-e^{f(0)}$; c) $I=e^{f(0)}-e^{f(1)}$
d) $I=0$; e) $I=1$; f) $I=f(0)e^{f(1)}-f(1)e^{f(0)}$;

AM – 275 Să se calculeze primitivele funcţiei

$$f:(1,2)\cup(2,\infty)\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

a) $2\ln\left(x^2-3x+2\right)+C$ b) $\ln\dfrac{x-2}{x-1}+C$ c) $\ln\dfrac{x-1}{x-2}+C$

d) $\begin{cases} x+3\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C_1 \\ x+3\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C_2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2\ln\dfrac{x-2}{x-1}+C_1 \\ x+2\ln\dfrac{x-2}{x-1}+C_2 \end{cases}$ f) $x+\ln\dfrac{(x-2)^2}{x-1}+C$

AM - 276 Să se calculeze : $\int\dfrac{x^4}{x^3-1}dx$ pentru orice $x\in(a,b)$, unde $1\notin(a,b)$.

a) $\dfrac{1}{3}\ln|x-1|-\dfrac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

b) $\dfrac{1}{6}\ln|x+1|-\dfrac{1}{3}\ln\left(x^2+x+1\right)+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}+C$

c) $\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{3}\ln\left(x^2-x+1\right)+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{3}+C$

d) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{3}\ln|x+1|+\operatorname{arctg}x+C$ e) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+C$

f) $\ln\left(x^2+x+1\right)+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C$

AM – 277 Să se determine mulțimea primitivelor următoarei funcții trigonometrice $f:(0,\pi)\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$

a) $\ln|\text{ctg } x|+C$ b) $\dfrac{1}{\cos x}+C$ c) $\ln|\text{tg}x|+C$

d) $\ln\left|\text{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$ e) $\ln\left|\text{ctg}\dfrac{x}{2}\right|+C$ f) $\dfrac{1}{\ln(\cos x)}+C$

AM - 278 Să se calculeze $I=\int\dfrac{sinx}{sinx+cosx}dx$, unde $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

a) $I=\ln\ \text{tg}\dfrac{x}{2}+C$ b) $I=\dfrac{1}{2}\left(x^2-\ln|\sin x-\cos x|\right)+C$

c) $I=\dfrac{1}{2}\text{arctg}\ x+C$ d) $I=\dfrac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

e) $I=\dfrac{1}{2}\left(\ln|\sin x-\cos x|\right)+\text{arctg}\ x+C$ f) $I=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$

AM - 279 Să se determine toate polinoamele $P\in\mathbf{R}[X]$ astfel încât pentru

orice x real să avem: $\int_1^x P(t)\,dt=P(x)\cdot P(2-x)$.

a) $P(x)=k(x-1),\ k\in\left\{-\dfrac{1}{2},0\right\}$ b) $P(x)=k(x+1),\ k\in\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $P(x)=k(x+1),\ k\in\left\{-\dfrac{1}{2},0\right\}$ d) $P(x)=2x-1$

e) $P(x)=1$ f) $P(x)=k(x-1),\ k\in\{-1,1\}$

AM - 280 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x+\sin x-\cos x-1}{x+e^x+\sin x}dx,\ x\in \mathbf{R}$.

a) $e\sin 1+\cos 1$ b) $1-e\sin 1+\ln\sin 1$

c) $1+\ln\sin 1+e$ d) $1-\ln(e+1+\sin 1)$

e) $\ln\sin 1+\ln\cos 1+e-1$ f) $e-1+\ln\cos 1$

AM - 281 Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{2x^2e^{x^2}-x^2e^{2x^2}-2xe^{x^2}+e^{x^2}-1}{xe^{x^2}+1}dx$

a) $ln(e+1)-e-1$ b) $ln(e+1)-\frac{e+1}{2}$ c) $\frac{1}{2}ln(e+1)-e-1$

d) $\frac{1}{2}[ln(e+1)-e-1]$ e) $ln(e+1)-1$ f) $e+1-ln(e+1)$

AM- 282 Să se determine primitivele funcției

$$f(x)=\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}},\quad x\in[3,8].$$

a) $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$ b) $F(x)=x+C$ c) $F(x)=\sqrt{x+1}+C$

d) $F(x)=2\sqrt{x+1}+C$ e) $F(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[3,5] \\ \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}+5-8\sqrt{6}+C, & x\in[5,8] \end{cases}$

f) $F(x)=-5x+C$

AM – 283 Să se calculeze

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\cdot dx$$

a) $\frac{1}{2}\left(ln\left(2+\sqrt{3}\right)-1\right)$ b) $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{21}-\sqrt{3}\right)$ c) $\frac{\sqrt{17}}{2}-\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{2}ln\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ e) 1 f) $2ln2\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

AM – 284 Să se determine constantele reale a,b,m astfel încât

$$\int f(x)dx=(ax+m)\sqrt{1+x^2}+b\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

unde $f(x)=\frac{x^2+mx+5}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) $a=b=m=1$ b) $a=\frac{1}{2};\ b=\frac{9}{2};\ m\in\mathbf{R}$ c) $a=\frac{1}{2};\ b=\frac{1}{2};\ m\in\mathbf{R}$

d) $a=1;\ b=\frac{9}{2};\ m=\frac{9}{2}$ e) $a\in\mathbf{R};\ b=\frac{9}{2};\ m=\frac{1}{2}$ f) $a=\frac{9}{2};\ b=\frac{1}{2};\ m\in\mathbf{R}$.

AM – 285 Să se calculeze integrala :

$$I=\int_1^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx.$$

a) $I=\sqrt{5-\sqrt{2}}$; b) $I=\sqrt{5}-\sqrt{2}+ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}$; c) $I=\sqrt{5}-\sqrt{2}+ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}+1}$;

d) $I=\frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}+1}$ e) $I=ln\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}+2}$; f) $I=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}+1}$

AM - 286 Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele:

$$I_n,\ \ n\in\mathbf{N},\ \ n\geq 2,\ I_n=\int_0^{1/2}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

a) $I_n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$ b) $I_n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}+(n-1)(I_n-I_{n-2})$

c) $I_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}-(n+1)(I_n-I_{n-1})$ d) $I_n=(n-1)I_{n-1}+I_{n-2}$

e) $I_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2^n}+n(I_{n-1}-I_{n-2})$ f) $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

AM – 287 Să se stabilească o relație de recurență pentru integralele I_n, $n\in\mathbf{N}$,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$$

a) $I_n=\dfrac{n+1}{n}I_{n-2},\ n\geq 2;$ b) $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-1},\ n\geq 2$

c) $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2},\ n\geq 2;$ d) $I_n=\dfrac{n-1}{2}I_{n-2},\ n\geq 2$

e) $I_n=\dfrac{n-1}{2}I_{n-1},\ n\geq 2;$ f) $I_n=\dfrac{n+1}{2}I_{n-2},\ n\geq 2$

AM - 288 Să se calculeze: $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, unde $p\in\mathbf{N}^*$.

a) $L=1$ b) $L=0$ c) $L=\dfrac{1}{p+1}$ d) $L=e$ e) $L=+\infty$ f) $L=\dfrac{1}{p}$

AM - 289 Să se calculeze $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}$.

a) $L = 0$ b) $L=\frac{\pi}{4}$ c) $L = 1$ d) $L = e$ e) $L=\frac{\pi}{2}$ f) $L = 2$

AM - 290 Să se calculeze: $L=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

a) $L = 1$ b) $L = 0$ c) $L=\frac{1}{2}$ d) $L=-\frac{1}{2}$ e) $L = \mathrm{e}$ f) $L=\frac{1}{4}$

AM - 291 Care este limita şirului cu termen general: $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k)^3+n^3}$?

a) $\frac{1}{12}\ln 3$ b) $\frac{1}{2}\ln 7$ c) $\frac{1}{6}\ln 3$ d) $\frac{1}{12}\ln 13$ e) $\frac{1}{3}\ln 4$ f) $\frac{1}{4}\ln 2$

AM - 292 Care este limita şirului cu termenul general: $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^2-k^2}$?

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ b) $1+\ln 2$ c) $-1+\ln 3$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $-1+\ln 2$

AM - 293 Să se calculeze limita şirului cu termenul general:

$$a_n=\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right].$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) e e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM - 294 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(k^2+n^2\right)+\ln n^2-2n\ln n+\ln 2\right].$$

a) $\ln 2+\frac{\pi}{2}-2$ b) $\ln 3+\frac{\pi}{2}-3$ c) $\ln 2+\frac{\pi}{4}$

d) $3\ln 2+\frac{\pi}{4}$ e) $2\ln 2-\frac{\pi}{2}$ f) $\ln 2-\frac{\pi}{2}+2$

AM - 295 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\sqrt{1-\frac{k^4}{n^4}}$.

a) 1 b) 2 c) π e) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$ f) 0

AM - XII. 296 Care din următoarele funcții nu este integrabilă pe intervalul specificat ?

a) $f(x)=\begin{cases} x\ , & x<1 \\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$ pe $[-1,1]$ b) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$ pe $[-1,1]$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x<1\\ 0 & , x\ge 1\end{cases}$ pe $[0,1]$ d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ pe $[1,2]$

e) $f(x)=e^{-x^2}$ pe $[-1,1]$ f) $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$ pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

AM – 297 Să se calculeze $\int_{-1}^{2} x^3 dx.$

a) 4 b) $\frac{15}{4}$ c) 3 d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{17}{4}$ f) 2

AM – 298 Să se calculeze: $\int_0^3 (x+2)dx$.

a) 3 b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{21}{2}$ e) $\frac{9}{2}$ f) 6

AM – 299 Să se calculeze $I = \int_0^2 \left(x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx$

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 5 d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{5}{7}$

AM - 300 Presupunând că funcțiile implicate mai jos sunt toate integrabile pe $[a,b]$, care din următoarele egalități este adevărată ?

a) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ b) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

c) $\int_a^b [f(x)]^n dx = \left[\int_a^b f(x)dx \right]^n$ d) $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n C_k f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \left[C_k \int_a^b f_k(x)dx \right]$

($C_1, C_2, \ldots, C_n$ constante)

e) $\int_a^b \sqrt{f(x)} dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$ f) $\int_a^b \ln|f(x) \cdot g(x)| dx = \ln \int_a^b |f(x)| dx + \ln \int_a^b |g(x)| dx$

AM - 301 Fie funcția $f : [1,3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Să se determine $c \in (1,3)$ astfel încât $\int_1^3 f(x)dx = 2f(c)$.

a) $c = \frac{1}{3}$ b) $c = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$ c) $c = \sqrt{\frac{13}{3}}$ d) $c = \sqrt{\frac{28}{3}}$ e) $c = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$ f) $c = 2$

AM - 302 Ştiind că $\int_1^5 P(x)dx = -1$ şi $\int_3^5 P(x)dx = 3$, să se calculeze

$$\int_3^1 \left[2P(t) + P(2t-1)\right]dt .$$

a) 4 b) 9 c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{19}{2}$ e) $\frac{17}{2}$ f) Nu are sens o astfel de integrală

AM - 303 Să se calculeze integrala $I = \int_0^2 f(x)dx$ ştiind că $f(0) = 1$, iar

$$f'(x) = \begin{cases} 1-x \text{ pentru } x \in [0,1] \\ x-1 \text{ pentru } x \in (1,2] \end{cases}.$$

a) $I = 1$ b) $I = 2$ c) $I = 3$ d) $I = \frac{3}{2}$ e) $I = \frac{2}{3}$ f) $I = 0$

AM - 304 Să se calculeze $\int_{-1}^1 \frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}dx$

a) e b) 1 c) $\frac{1}{4}$ d) 4 e) ln(e+1) f) $\ln\frac{e+1}{e}$

AM - 305 Să se calculeze $\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x+1\right)}dx$

a) 1 b) $\frac{\pi}{4}$ c) e-1 d) $\ln\sqrt{2}$ e) ln2 f) $\frac{\pi}{2}$

AM - 306 Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{7\pi}{6}\right) \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln(1+2\sin x)$.

Să se calculeze integrala definită $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)dx.$

a) –2 b) –3 c) –1 d) 2 e) 3 f) 1.

AM - 307 Să se calculeze $F(a)=\int_0^1 \left|x^2+a\right| dx,\ a\in \mathbf{R}$.

a) $F(a)=\begin{cases} a+\frac{1}{3},\ a\le 0 \\ a-\frac{1}{3},\ a>0 \end{cases}$

b) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3},\ a\le -1 \\ -\frac{4}{3}a\sqrt{-a}+a+\frac{1}{3},\ -1<a\le 1 \\ a-\frac{1}{3},\ 1<a \end{cases}$

c) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3},\ a\le -1 \\ -\frac{4}{3}a\sqrt{-a}+a+\frac{1}{3},\ -1<a\le 0 \\ a+\frac{1}{3},\ 0<a \end{cases}$

d) $F(a)=\begin{cases} -a-\frac{1}{3},\ a\le -1 \\ -\frac{4}{3}a\sqrt{a}+\frac{1}{3},\ -1<a<1 \\ a+\frac{1}{3},\ 1\le a \end{cases}$

e) $F(a)=\begin{cases} a+\frac{1}{3},\ a<0 \\ a\sqrt{a}+a+\frac{1}{3},\ a\ge 0 \end{cases}$

f) $F(a)=\begin{cases} a-\frac{1}{3},\ a\le -1 \\ \frac{4}{3}a\sqrt{a}+a,\ -1<a<1 \\ a-\frac{1}{3},\ 1\le a \end{cases}$

AM - 308 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=\begin{cases} x, \text{ pentru } x\le 1 \\ \frac{x^2+1}{2}, \text{ pentru } x>1 \end{cases}$ şi $I=\int_0^1 \frac{f(e^{-x})}{f(e^x)}\,dx$.

Precizați care din răspunsurile de mai jos este corect:

a) I nu există b) $I=2-\frac{2}{e}-2\operatorname{arctg} e+\frac{\pi}{2}$ c) $I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}$

d) $I=1$ e) $I=e$ f) $I=\ln 2+\operatorname{arctg} e+\frac{1}{e}$

AM - 309 Calculați valoarea integralei: $I = \int_{-2}^{2} \left(|x-1| + |x+1|\right) dx$.

a) 8 b) 5 c) 10 d) 9 e) 7 f) 18

AM - 310 Să se calculeze valoarea integralei: $I = \int_{1}^{3} \frac{|x-2|}{\left(x^2 - 4x\right)^2} dx$.

a) $I = \frac{5}{12}$ b) $I = \frac{1}{2}$ c) $I = \frac{1}{3}$ d) $I = \frac{1}{12}$ e) $I = \frac{1}{4}$ f) $I = \frac{1}{10}$

AM - 311 Fie $I = \int_{0}^{1} \frac{x^n + x^4 + 1}{x^2 + x + 1} dx$. Precizați pentru ce valori naturale ale lui n, I este un număr rațional.

a) pentru orice $n \in \mathbf{N}$ b) nu există $n \in \mathbf{N}$ astfel ca $I \in \mathbf{Q}$ c) $n = 3k$, unde $k \in \mathbf{N}$

d) $n = 3k + 1$, unde $k \in \mathbf{N}$ e) $n = 3k + 2$, unde $k \in \mathbf{N}$ f) $n = 2k$, unde $k \in \mathbf{N}$

AM - 312 Fie P o funcție polinomială de gradul n cu rădăcinile $1, 2, \ldots, n$. Să se calculeze $I = \int_{n+1}^{n+2} \frac{P'(x)}{P(x)} dx$.

a) $I = 2n + 3$ b) $I = n$ c) $I = n - 1$ d) $I = 1$ e) $I = \ln(n + 1)$ f) $I = \frac{1}{n}$

AM - 313 Să se calculeze integrala: $I = \int_{2}^{3} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} dx$.

a) $I = \frac{3}{2} - 4\ln 2$ b) $I = -\frac{1}{2} - 4\ln 2$ c) $I = -\frac{3}{2} + 4\ln 2$

d) $I = \frac{3}{2} + 4\ln 2$ e) $I = -\frac{1}{2} + 4\ln 2$ f) $I = 1 + 3\ln 2$

AM - 314 Să se calculeze $\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}\,dx$.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $2+\sqrt{5}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 0 e) $\sqrt{5}$ f) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

AM – 315 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

a) 0; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{3\pi}{2}$;

AM - 316 Să se calculeze : $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+x+1}$.

a) $\ln\sqrt{2}+\mathrm{arctg}2$ b) $\ln\sqrt[4]{2}+\frac{\pi}{8}$ c) $\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}$

d) $\ln 2$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\ln\sqrt[3]{2}+\pi$

AM - 317 Să se calculeze : $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$.

a) $\ln\frac{3}{2}$ b) $\ln\frac{4032}{3107}$ c) $\ln\frac{2100}{103}$ d) $\ln\frac{e}{2}$ e) $\frac{1}{10}\ln\frac{2048}{1025}$ f) $\ln\frac{140}{343}$

AM - 318 Să se calculeze : $I=\int_0^1 \frac{2x^3+3x^2+x}{(x^2+x+1)^{1993}}dx$.

a) $I=\frac{1}{1991\cdot1992}\left(1-\frac{3985}{3^{1992}}\right)$ b) $I=\frac{1}{1991\cdot1992}$ c) $I=\frac{1}{1991\cdot1992}\left(1-\frac{1}{3^{1992}}\right)$

d) $I=\frac{1}{1991\cdot1992}-\frac{1}{3^{1992}}$ e) $I=\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}$ f) $I=3^{\frac{1}{1992}}\left(\frac{1}{1991}+\frac{1}{1992}\right)$

AM - 319 Care este valoarea integralei : $\int_{-9}^{9} \frac{x^5}{x^8+1} dx$?

a) $2\ln(9^8+1)$ b) arctg 2 c) 1 d) 0 e) –1 f) $\frac{1}{8}$

AM - 320 Să se calculeze valoarea integralei: $I = \int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$.

a) $I = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ b) $I = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$ c) $I = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

d) $I = 2\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ e) $I = 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ f) $I = 2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}-2\right)$

AM - 321 Care este valoarea integralei: $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2-15}}$?

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) π e) $\frac{5}{3}$ f) 1

AM - 322 Să se calculeze integrala : $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

a) $2(\pi+1)$ b) $2(\pi-1)$ c) 2π d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) 3π

AM - 323 Să se calculeze : $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} dx$.

a) 5 b) 2 c) $\frac{3}{2}$ d) 3 e) $\frac{5}{2}$ f) 1

AM - 324 Valoarea integralei $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ este :

a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) –1 e) $\frac{\pi}{6}$ f) $\frac{\pi}{2}$

AM - 325 Valoarea integralei $I=\int_0^3 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$ este:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $2\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{6}-\arcsin\frac{1}{4}$ f) $\operatorname{arctg}2+\frac{\pi}{2}$

AM - 326 Să se calculeze: $I=\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\left|\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right|}$.

a) $I = 1$ b) $I = \frac{2}{3}$ c) $I = 0$ d) $I = -1$ e) $I = \frac{\pi}{2}$ f) $I = -\frac{\pi}{2}$

AM - 327 Să se calculeze integrala definită $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$

a) $\frac{1}{3}\ln 2$ b) $\frac{1}{2}\ln 3$ c) ln 4 d) 3ln2 e) 2ln3 f) ln 8

AM - 328 Să se calculeze : $\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^3 x dx$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}-\ln 2$ e) $\ln\sqrt{\frac{e}{2}}$ f) $\ln(\sqrt{2}-1)$

AM - 329 Determinați valoarea integralei: $I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}dx$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ln 2 d) $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$

AM – 330 Calculați $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^5 x}{sin^5 x+cos^5 x}dx$ şi $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^5 x}{sin^5 x+cos^5 x}dx$

a) $I=\frac{\pi}{8};\ J=\frac{3\pi}{8}$ b) $I=\frac{\pi}{6};\ J=\frac{\pi}{3}$ c) $I=\frac{\pi}{5};\ J=\frac{3\pi}{10}$

d) $I=J=\frac{\pi}{2};$ e) $I=J=\frac{\pi}{4};$ f) $I=J=\pi$

AM – 331 Ştiind că m este un număr natural impar, să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(m-1)x\ sin\,mx\ sin(m+1)x\ dx$$

a) 0 b) $\frac{2(m^2-1)}{3m(m^2-4)}$ c) $\frac{m^2-1}{12m(m^2-4)}$

d) $\frac{4m^2-1}{3m(m^2-4)}$ e) $\frac{1}{3m}$ f) $\frac{m^2-1}{3m}$

AM - 332 Să se calculeze $\int_0^1 (x-\operatorname{tg} x\cdot \sec x)dx$.

a) $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$ b) $1-\pi$ c) $\frac{3}{2}-\cos 1$ d) $\frac{3}{2}-\sec 1$ e) 0 f) tg 1

AM - 333 Să se calculeze integrala: $I=\int_0^1 \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

a) $I=1$ b) $I=3$ c) $I=\frac{\pi}{4}+1$

d) $I=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$ e) $I=\frac{\pi}{4}+\ln 2$ f) $I=\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

AM - 334 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = x \arcsin \dfrac{m}{\sqrt{m^2+x^2}}$, $m>0$. Să se calculeze

$$\int_m^{m\sqrt{3}} f(x)\,dx\ .$$

a) $\dfrac{m^2\pi}{24}$ b) $\dfrac{m^2}{2}\left(\sqrt{3}-1+\dfrac{\pi}{6}\right)$ c) $m^2\left(\sqrt{3}-1-\dfrac{\pi}{12}\right)$

d) $\dfrac{m^2}{4}(\pi-1)$ e) 1 f) $\dfrac{m^2}{2}\left(\sqrt{2}-1+\dfrac{\pi}{6}\right)$

AM - 335 Să se calculeze $I=\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

a) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3-1}\right)$ b) $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ c) $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

d) $\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3-1}\right)$ e) $\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ f) $\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

AM – 336 Să se calculeze :

$$I=\int_1^2\left(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}3x+\arccos\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}}+\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$$

a) π b) 0 c) 1 d) 2π e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM - 337 Să se calculeze $I=\int_0^{\pi/2^{n+1}} \sin x\cos x\cos 2x\ldots\cos 2^{n-1}x\,dx$.

a) $I=\dfrac{1}{2^n}$ b) $I = 1$ c) $I=\dfrac{1}{4^n}$ d) $I = 0$ e) $I=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ f) $I=\dfrac{1}{4^{n+1}}$

AM - XII. 338 Fie funcția $f:[1,+\infty)\to[-1,\infty)$, $f(x)=x^3-3x+1$. Să se calculeze $\int_{-1}^{3} x f^{-1}(x)\,dx$.

a) $\frac{140}{1089}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{108}{13}$ e) $\frac{1089}{140}$ f) $\frac{1098}{143}$

AM - 339 Să se calculeze $I=\lim\limits_{b\to\infty}\int_2^b |x-3|\,e^{-x}dx$.

a) $I=e^{-3}(1-e)$ b) $I=2e^{-3}(2+e)$ c) $I=2e^{-3}(1-e)$

d) $I=2e^{-3}(2-e)$ e) $I=e^{-3}(2-e)$ f) $I=2e^{-3}$

AM - 340 Valoarea integralei $I=\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ este:

a) $4-\pi$ b) $3-\pi$ c) $2-\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{2}-1$ e) $\pi-5$ f) $4+\pi$

AM - 341 Să se calculeze $I=\int_0^1\frac{x^2+x+1}{x^2+1}e^{\operatorname{arctg} x}dx$.

a) $e^{\frac{\pi}{6}}$ b) $e^{\frac{\pi}{3}}$ c) $e^{\frac{\pi}{2}}$ d) $e^{\frac{\pi}{4}}$ e) e f) 2e ^{2}

AM - XII. 342 Să se calculeze $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin 3x dx$.

a) $I=\frac{1}{13}\left(3-2e^{\pi}\right)$ b) $I=\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}e^{\pi}-3\right)$ c) $I=\frac{1}{5}\left(3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

d) $I=\frac{1}{5}\left(3-\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ e) $I=\frac{1}{5}\left(-3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ f) $I=\frac{1}{13}\left(3+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

AM – 343 Fie $f_i : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$ şi $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Să se calculeze integrala definită:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right)^2 dx.$$

a) $I = 1 - \sqrt{e}$; b) $I = e^2 - 1$; c) $I = e - 1$;

d) $I = \frac{1}{2}(e-1)$; e) $I = \frac{1}{2}(1-e)$; f) $I = e+1$.

AM - 344 Calculați $I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$.

a) $2e^{\frac{\pi}{2}}$ b) $2\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ c) 0 d) $e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}$ e) $e^{-\frac{\pi}{2}}$ f) $2e^{-\frac{\pi}{2}}$

AM - 345 Indicați care din valorile de mai jos reprezintă valoarea integralei

$$I = \int_0^{\pi/3} \ln\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x\right) dx.$$

a) $I = \frac{\pi}{3}\ln 3$ b) $I = \frac{\pi}{3}\ln 2$ c) $I = \frac{\pi}{2}\ln 3$

d) $I = \frac{\pi}{2}\ln 2$ e) $I = \pi \ln 3$ f) $I = \pi \ln 2$

AM – 346 Să se calculeze integrala $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$

a) 1; b) $\frac{\pi}{2}\ln 2$; c) $\frac{\pi}{3}\ln 2$; d) $\frac{\pi}{4}\ln 2$; e) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; f) $\ln 2$.

AM - 347 Să se stabilească în care din intervalele următoare se află valoarea integralei

$$I=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,arctgx\,dx\,.$$

a) $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2},1\right]$ b) $\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

d) $\left[0,\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{4},1\right]$ f) $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2},2\right]$

AM - 348 Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \min\left\{1, x, x^2\right\}dx.$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{6}$ c) 1 d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{4}$

AM - 349 Calculați $I=\int_{-2}^{3} \min_{t\le x}\left\{t^2\right\}dx$.

a) $I=\frac{35}{3}$ b) $I=\frac{8}{3}$ c) $I=-\frac{8}{3}$ d) $I=-\frac{35}{3}$ e) $I=\frac{10}{3}$ f) $I=\frac{5}{3}$

AM - 350 Să se calculeze $I=\int_{-2}^{2} \min\left\{x^2-1, x+1\right\}dx.$

a) –1 b) 1 c) $-\frac{1}{2}$ d) 2 e) 3 f) -3

AM - 351 Dacă $t_1(x)$ și $t_2(x)$ sunt rădăcinile ecuației $t^2+2(x-1)t+4=0$, iar $f(x)=max\left\{\left|t_1(x)\right|,\left|t_2(x)\right|\right\}$, să se calculeze $\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

a) $13-3\sqrt{5}-2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ b) $13-3\sqrt{5}+2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

c) $13+3\sqrt{5}-2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ d) $13+3\sqrt{5}+2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

e) $13+3\sqrt{5}+2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ f) $13+5\sqrt{3}-2\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

AM - 352 Să se calculaze $\int_0^2 \min\left\{x, \frac{2}{1+x^2}\right\} dx.$

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$ d) $\frac{1}{2} + 2\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$ e) -1 f) $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2}$

AM - 353 Care este valoarea integralei $I = \int_0^4 \max\left\{x^2, 2^x\right\} dx$?

a) $I = \frac{3}{\ln 2}$ b) $I = \frac{56}{3}$ c) $I = \frac{256}{3}$

d) $I = 1$ e) $I = \frac{3}{\ln 2} + \frac{56}{3}$ f) $I = \frac{3}{\ln 2} - \frac{53}{3}$

AM - 354 Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, unde $f(x) = \max\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x, 3^x\right\}$, $x \in [-1,1]$.

a) 0 b) $\frac{4}{\ln 3}$ c) $\frac{2}{\ln 4}$ d) $\frac{5}{\ln 3}$ e) 1 f) ln3

AM - 355 Care este valoarea integralei:

$$I = \int_0^{\pi/4} \max\{\sin x, \cos x\} \cdot \ln\left(1 + \sqrt{2} \sin x\right) dx \text{ ?}$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 3 - \ln 2)$ c) $\ln 2 - \ln 3$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 4 - 1)$ e) $\sqrt{2} \ln 2 - 2$ f) $\sqrt{2} \ln 2 + 2$

AM - 356 Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \max\{\sin x, \cos x\} dx$.

a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) -1

AM - 357 Dacă $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a lui $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci să se calculeze $\int_0^{1990} [x]dx.$

a) $1989 \cdot 995$ b) $1992 \cdot 995$ c) $1990 \cdot 995$

d) $1988 \cdot 995$ e) $1991 \cdot 995$ f) $1993 \cdot 995$

AM - 358 Să se calculeze $I = \int_0^1 [2^5 x]dx$.

a) $I = 32$ b) $I = \dfrac{31}{2}$ c) $I = 16$ d) $I = 1$ e) $I = 2$ f) $I = \dfrac{1}{2}$

AM - 359 Se consideră funcția $f:[0,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1-[x]}{2x-[x]+1}$.

Să se calculeze integrala $I = \int\limits_0^2 f(x)dx$

a) $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$ b) $I = 1 - \ln 6$ c) $I = 1 - \dfrac{1}{4}\ln 12$

d) $I = \dfrac{1}{2} - \ln 12$ e) $I = \dfrac{1}{4}\ln 12 - 1$ f) $I = \dfrac{1}{4}\ln 12$

AM - 360 Care este limita şirului: $a_n = \dfrac{1}{n!}\int_1^{n+1} \ln[x]dx$?

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) e e) e^{-1} f) e^2

AM - 361 Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\int_0^1 e^x [nx]dx$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) e^{-1} c) 1 d) 0 e) $e - 1$ f) $e + 1$

AM - 362 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, dacă $a_n=\int_1^n \frac{x-1}{x+1}dx$ pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

a) 2 b) 3 c) 1 d) –1 e) 5 f) 4

AM - 363 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n (x-1)e^{-x}dx$.

a) 0 b) e^2 c) e - 1 d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{e}-1$ f) 1

AM - 364 Să se calculeze $l=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

a) $l = 1$ b) $l = 0$ c) $l= +\infty$ d) $l = -\infty$ e) nu există f) $l=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

AM - 365 Fiind dată funcția continuă $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in N}$ dat de: $a_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) e e) $\sqrt{2}$ f) $f(1)$

AM - 366 Fie G_g graficul funcției $g:[0,\pi]\to[0,1]$, $g(x)=\sin x$. Familia de drepte $y = t$, $t\in[0,1]$ taie graficul G_g în două puncte A_1 şi A_2 . Fie $\gamma:[0,1]\to\mathbf{R}$ **,** astfel încât $\gamma(t)$ este egală cu distanța dintre A_1 şi A_2 pentru orice $t\in[0,1]$.
Să se calculeze integrala $I=\int_0^1 \gamma(t)dt$.

a) $I = 2$ b) $I=\frac{2}{3}$ c) $I=\frac{3}{2}$ d) $I = 3$ e) $I = 1$ f) $I = 4$

AM - 367 Dacă $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ este o funcție de două ori derivabilă şi cu deriva-ta a doua continuă pe $[a,b]$, atunci calculați $I=\int_a^b x f''(x)dx$, în funcție de *a* şi *b*.

a) $I=bf'(b)-af'(a)+f(b)-f(a)$ b) $I=bf'(b)-af'(a)+f(a)-f(b)$

c) $I=bf'(a)-af'(b)+f(b)-f(a)$ d) $I=af'(a)-bf'(b)+f(b)-f(a)$

e) $I=af'(a)-bf'(b)+2f(b)-f(a)$ f) $I=(b-a)(f'(b)-f'(a))$

AM - 368 Fie $a<b$ şi $f:[0,b-a]\to(0,+\infty)$ continuă pe $[0,b-a]$. Să se calculeze $\int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx$ în funcție de *a* şi *b*.

a) $\frac{b-a}{2}$ b) $b-a$ c) $a-b$ d) $\frac{a-b}{4}$ e) $\frac{b-a}{3}$ f) $\frac{a-b}{3}$

AM - 369 Să se calculeze $I=\int_0^1 \frac{2x+1}{x^4+2x^3-x^2-2x+2}dx$.

a) π b) $\frac{\pi}{4}$ c) 0 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{4}$ f) $\frac{3\pi}{2}$

AM - 370 Să se calculeze $I=\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x\,dx$.

a) 10 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{1}{10}$ f) 4

AM - 371 Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $k\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$\int_0^x f(t)dt=\frac{x}{2}(f(x)+k)$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Care este valoarea lui $f(0)$?

a) 1 b) k c) $\frac{k}{2}$ d) 0 e) $\frac{k^2}{3}$ f) $\frac{k}{4}$

AM - 372 Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă şi $F:[a,b]\to\mathbf{R}$, definită prin

$$F(x)=(b-a)\cdot\int_a^x f(t)dt-(x-a)\cdot\int_a^b f(t)dt.$$ Să se calculeze $F'(x)$.

a) $F'(x)=(b-a)\,f(x)-(x-a)\int_a^b f'(t)dt$ b) $F'(x)=(b-a)-(x-a)\int_a^b f(t)dt$

c) $F'(x)=(b-a)-\int_a^b f(t)dt$ d) $F'(x)=-\int_a^b f(t)dt$

e) $F'(x)=(b-a)\,f(x)-\int_a^b f(t)dt$ f) $F'(x)=0$

AM - 373 Fie $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$. Să se calculeze $f'(x)$ pentru orice $x\in[0,1]$.

a) $f'(x)=e^{x^2}$ b) $f'(x)=3x^2e^{x^2}$ c) $f'(x)=3x^2e^{x^{6x}}$

d) $f'(x)=3x^2e^{3x^2}$ e) $f'(x)=3x^2e^{x^6}$ f) $f'(x)=3x^2e^{2x}$

AM- 374 Să se determine toate funcțiile polinomiale $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât :

$$\int_x^{x+1} f(t)dt=x^2,\quad x\in\mathbf{R}.$$

a) $x^2+x-\frac{1}{6}$; b) $x^3-x^2+\frac{1}{6}x+2$; c) $x^2-x+\frac{1}{6}$

d) x^2+2x-1; e) $x^3+x^2+x-\frac{1}{6}$ f) $x^2+2x+\frac{1}{6}$

AM - 375 Se dau funcțiile $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 \, dt$ şi

$g(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$. Care este valoarea limitei $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)}$?

a) e b) $e - 1$ c) 1 d) $1 - e$ e) 0 f) $\frac{1}{2}$

AM - 376 Să se determine expresia analitică a funcției: $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, +\infty)$,

$f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t + \cos t)\sin t}{\cos^2 t}$ dt.

a) $f(x)$ = - ctg x - x - ln (cos x)
b) $f(x)$ = tg x - x + ln (cos x) + 1
c) $f(x)$ = ctg x - x - ln (cos x) – 1
d) $f(x)$ = tg x + x - ln (cos x)
e) $f(x)$ = tg x - x - ln (cos x)
f) $f(x)$ = tg x + 2x + ln (sin x)

AM - 377 Fie $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x e^t \ln(1 - t + t^2) dt$. Determinați punctele de extrem local ale funcției F.

a) $x_1 = -1$ b) $x_1 = e$ c) $x_1 = 0, x_2 = 1$

d) $x_1 = \frac{1}{e}$ e) nu are puncte de extrem local f) $x_1 = 2, x_2 = 5$

AM - 378 Determinați o funcție polinomială $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de grad minim, astfel încât să admită un maxim egal cu 6 în x = 1 şi un minim egal cu 2 în x = 3.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ b) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5$ c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

d) $f(x) = -x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ f) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

AM - 379 Fiind dată funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\int_x^{x+2\pi}\frac{t}{1+\sin^2 t}dt$, să se calculeze $f'(0)$.

a) $f'(0)=\pi$ b) $f'(0)=0$ c) $f'(0)=\frac{\pi}{2}$

d) $f'(0)=2\pi$ e) $f'(0)=1$ f) $f'(0)=\frac{\pi}{4}$

AM - 380 Să se calculeze derivata funcției $F:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$,

$$F(x)=\sin\left[\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt\right].$$

a) $F'(x)=\cos x$ b) $F'(x)=\cos\frac{1}{x}$ c) $F'(x)=0$

d) $F'(x)=\sin 2x$ e) $F'(x)=1$ f) $F'(x)=\cos 2x$

AM - 381 Fie $F:[0,3]\to\mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\int_0^x e^{t^2}\left(-t^3+4t^2-5t+2\right)dt$ pentru orice $x\in[0,3]$. Pentru ce valoare a lui $x\in[0,3]$, F are valoarea maximă ?

a) $x = 0$ b) $x\in\varnothing$ c) $x = 3$ d) $x = 2$ e) $x = 1$ f) $x=\frac{1}{2}$

AM – 382 Fie funcția $f(x)=\int_0^{\operatorname{arctg}x}e^{\operatorname{tg}^2 t}dt;$ $x\in\mathbf{R};$ Să se calculeze

$$I=\int_0^1\frac{xf(x)}{e^{x^2}}dx+\frac{1}{2e}\int_0^1\frac{e^{x^2}}{1+x^2}dx$$

a) $I=1;$ b) $I=\frac{\pi}{4};$ c) $I=\frac{\pi}{8};$ d) $I=0;$ e) $I=\frac{\pi}{2};$ f) $I=\frac{3\pi}{4}$

AM - 383 Să se calculeze aria domeniului marginit de graficul funcției $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ cu axa Ox şi dreptele x=0, x=1.

a) ln2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) π d) 1 e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{3}$

AM - 384 Să se calculeze aria subgraficului funcției

$$f:[0,2]\to\mathbf{R},\quad f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) $5\sqrt{2}-2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ b) $2\sqrt{5}+2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ c) $2\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$

d) $2\sqrt{5}-2+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$ e) $-2\sqrt{5}+2-\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$ f) $2\sqrt{5}+2$

AM - 385 Să se calculeze aria figurii plane cuprinsă între parabola $y = x^2$ şi dreapta $x + y = 2$.

a) $\dfrac{9}{2}$ b) 3 c) 2 d) $\dfrac{8}{3}$ e) 7 f) 8

AM - 386 Calculați aria domeniului mărginit de curbele : $y=2x-x^2$ şi $y=-x$.

a) 13,5 b) 4,5 c) 13,2 d) 6,5 e) $\dfrac{1}{2}$ f) 3,5

AM - 387 Fie f: (-1,+∞) $\to$**R**, definită prin $f(x) = x^2 \ln (1+x^3)$. Care este aria porțiunii plane cuprinsă între graficul funcției, dreptele $x = 0$, $x = 1$ şi axa Ox ?

a) 0 b) ln 2 c) $\ln\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{2}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}$ e) $3\ln 2-1$ f) $\dfrac{3}{2}\ln 2+\dfrac{1}{3}$

AM - 388 Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficul funcției $f:(-\infty,-1)\cup[1,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$.

a) $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$ b) $\ln 2+\sqrt{3}$ c) $\ln 2-\sqrt{3}$

d) $\ln 2$ e) $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}$ f) $\ln\left(3+\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}$

AM - 389 Să se determine abscisa $x=\lambda$, a punctului în care paralela dusă la axa Oy împarte porțiunea plană cuprinsă între curba $y=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=2\sqrt{3}-1$, în două părți de arii egale.

a) $\lambda=\sqrt{3}-1$ b) $\lambda=2\sqrt{3}-2$ c) $\lambda=2\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{24}-1$

d) $\lambda=\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$ e) $\lambda=2$ f) $\lambda=\dfrac{3}{2}$

AM - 390 Să se calculeze aria A a porțiunii plane mărginite de graficele funcțiilor $f,g:[-1,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

a) $A=\dfrac{\pi}{4}$ b) $A=\dfrac{\pi}{2}-1$ c) $A=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$

d) $A=\dfrac{\pi}{6}$ e) $A=\dfrac{\pi}{6}+5$ f) $A=\dfrac{\pi}{3}+1$

AM - 391 Care este aria suprafeței cuprinsă între parabolele de ecuații :

$y^2=x$ şi $x^2=8y$?

a) 8 b) $\dfrac{16}{3}$ c) $\dfrac{8}{3}$ d) 1 e) $\dfrac{1}{24}$ f) $\dfrac{1}{4}$

AM - 392 Care este aria figurii plane situată în cadranul doi, mărginită de axe şi graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$?

a) $A=\pi-\ln 3$ b) $A=\dfrac{1}{2}ln 2$ c) $A=\pi\ln 3$

d) $A=\dfrac{\pi}{2}$ e) $A=\pi+\ln 3$ f) $A=\pi-\ln 3$

AM - 393 Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f,g:[0,2\pi]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $4\sqrt{2}$ e) 4 f) $3\sqrt{2}$

AM – 394 Să se calculeze aria domeniului mărginit de graficul funcției $f:\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$, axa (Ox) şi dreptele de ecuații $x=0,\quad x=\dfrac{3\pi}{4}$.

a) $2+tg\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}$ b) $-2+tg\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}$ c) $-2-tg\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}$

d) $-tg\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{4}$ e) $2-tg\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}$ f) $-2-tg\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{4}$

AM - 395 Să se calculeze aria cuprinsă între graficul funcției $f(x)=\arccos\dfrac{x^3-3x}{2}$, axa Ox şi dreptele de ecuații x = -1 , x = 1.

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$ c) π d) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ e) $\dfrac{\pi}{3}$ f) $\dfrac{\pi}{6}$

AM - 396 Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficele funcțiilor $f(x)=\ln(1+x^2),\quad g(x)=x\mathrm{arctg}x$ şi dreptele x = -1, x = 0.

a) $-\frac{3}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3}{2}-\ln 2-\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{3}{2}+\ln 2-\frac{\pi}{4}$ e) $-\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{\pi}{4}$ f) $\frac{3}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{4}$

AM - 397 Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{8x},\ x\in[0,4]$.

a) 64 π b) 66 π c) 20 π d) 24 π e) 4 π f) 8π

AM - 398 Care este volumul corpului de rotație generat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x) = x+e^x,\ \ x\in[0,1]$?

a) $V=\frac{\pi}{2}(e+1)$ b) $V=\pi(e^2+9)$ c) $V=\frac{\pi}{8}(3e-1)$

d) $V=\frac{\pi}{3}(2e+3)$ e) $V=\frac{\pi}{6}(3e^2+11)$ f) $V=\pi e$

AM - 399 Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea în jurul axei Ox a subgraficului funcției $f(x)=\sqrt{x^2-16},\ x\in[4,10]$.

a) 216 π b) 200 π c) 400 π d) 20 π e) 10 π f) 60π

AM - 400 Calculați volumul corpului obținut orin rotirea subgraficului determinat de arcul de elipsă $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ situat deasupra axei Ox în jurul acestei axe.

a) 16π b) 9π c) 36π d) 6π e) $\frac{4}{3}\pi$ f) $\frac{4\pi}{9}$

AM - 401 Să se calculeze volumul corpului de rotație determinat prin rotirea subgraficului funcției $f:[1,2]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ în jurul axei Ox .

a) π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{11\pi}{4}$ d) $\frac{11\pi}{2}$ e) $\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{5\pi}{4}$

AM - 402 Să se calculeze aria porțiunii plane mărginită de graficul funcției $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, axa (Ox) şi dreptele de ecuații: $x\sqrt{3}=1$ şi $x=\sqrt{3}$.

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$ b) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln 3$ c) $\frac{\pi}{3}+\ln 3$

d) $\frac{\pi}{3\sqrt{6}}+\frac{1}{3}\ln 2$ e) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 3$ f) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln 3$

AM - 403 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea subgraficului funcției $f:\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x(1-x)}}$ în jurul axei Ox.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi^2}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{8}$ d) 1 e) $\frac{\pi^2}{6}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$

AM - 404 Să se calculeze aria domeniului plan cuprins între curba de ecuație $y=\sqrt{x}$, tangenta în $x=4$ la această curbă şi axa Oy.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 1 e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{2}{5}$

AM - 405 Calculaţi aria limitată de curba $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, asimptota sa şi paralelele la axa Oy duse prin punctele de inflexiune.

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) π d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\dfrac{\pi}{6}$ f) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

AM - 406 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea subgraficului funcţiei $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x(1-x)}$, în jurul axei Ox.

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\pi^2\sqrt{2}$

AM - 407 Pentru ce valoare $m > 0$, aria mulţimii

$$A = \left\{ (x, y) \,\middle|\, m \le x \le 2m,\ 0 \le y < x + \frac{6}{x^2} \right\}$$ este minimă ?

a) $m = 2$ b) $m = 10$ c) $m = \dfrac{5}{6}$ d) $m = \dfrac{3}{2}$ e) $m = 5$ f) $m = 1$

PROBLEME MODEL
CU REZOLVĂRI ŞI INDICAȚII

ELEMENTE DE ALGEBRĂ
(simbol AL)

AL - 009

$$a_1 = 2; \quad S_n = \frac{(2+a_n)n}{2} = n^2 + an + b, (\forall) n \geq 1$$

$$2n + na_n = 2n^2 + 2an + 2b, (\forall)\ n \geq 1$$

$$2n + n\left[a_1 + (n-1)r\right] = 2n^2 + 2an + 2b$$

$$n^2 r + (2 + a_1 - r)n = 2n^2 + 2an + 2b, (\forall)\ n \geq 1$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ a_1 = 2a \\ 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ b = 0 \\ a_1 = 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Răspuns corect c.

AL – 016

Fie $\frac{8}{7} = q^m$ şi $\frac{9}{8} = q^n$

Rezultă $\frac{8^n}{7^n} = q^{m+n}$ şi $\frac{9^m}{8^m} = q^{m+n}$

Avem: $\frac{8^n}{7^n} = \frac{9^m}{8^m} \Rightarrow 7^n \cdot 9^m = 8^{m+n}$

Cu m $8 = 7 + 1$ $\Rightarrow$ 8^{m+n} nu poate fi divizibil cu 7, deci nu pot forma termenii unei progresii geometrice.

Răspuns corect e.

AL – 019

$$S_1 = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1},\ S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1 q^{n-1}} = \frac{1}{a_1} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}},$$

$$P = a_1^n q^1 q^2 \ldots q^{n-1} = a_1^n q^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}}{\frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}} = a_1^2 q^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n = a_1^{2n} q^{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$$

Răspuns corect c.

AL - 025

Notăm $\frac{5a - 1}{3} = K$, deci $K \in \mathbb{Z}$. Avem $5a - 1 = 3K$, $a = \frac{3K+1}{5}$

Adică $\left[\frac{6K+7}{10}\right] = K$. Dar $K \le \frac{6K+7}{10} < K+1$ deci $a \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

Răspuns corect b.

AL - 028 Avem:

(1) $x - 1 < [x] \le x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

(2) $x^2 - 1 < \left[x^2\right] \le x^2,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Se înmulţeşte (1) cu -3 şi (2) cu 5 şi $\Rightarrow$

(3) $-3x \le -3[x] < -3x + 2$

(4) $5x^2 - 5 < 5\left[x^2\right] \le 5x^2$; adunând (3) și (4) $\Rightarrow$

(5) $5x^2 - 3x - 3 < 5\left[x^2\right] - 3\left[x\right] + 2 < 5x^2 - 3x + 5$. Deoarece

$5\left[x^2\right] - 3\left[x\right] + 2 = 0$, (5) devine

$$5x^2 - 3x - 3 < 0 < 5x^2 - 3x + 5 \;\;\Rightarrow\;\; x \in \left(\frac{3 - \sqrt{69}}{10}, \frac{3 + \sqrt{69}}{10}\right)$$

rezultă:

$\left[x\right] = -1$ sau $\left[x\right] = 0$ sau $\left[x\right] = 1$. Pentru primele 2 valori nu se verifică ecuația inițială.

Deci $\left[x\right] = 1 \;\Rightarrow\; x \in \left[1, 2\right) \;\Rightarrow\; x^2 \in \left[1, 4\right)$ Rezultă $\left[x^2\right] = 1$ sau $\left[x^2\right] = 2$ sau $\left[x^2\right] = 3$

Pentru nici una din aceste valori nu este verificată soluția.
Răspuns corect e.

AL - 039

Se pun condițiile: $m - 1 < 0,\ \Delta = \left(m + 1\right)^2 - 4\left(m^2 - 1\right) \Leftrightarrow m < 1$

și $\quad m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + 4 \le 0 \Leftrightarrow m < 1$ și $-3m^2 + 2m + 5 \le 0$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 15}}{-3} = \frac{-1 \pm 4}{-3}$$

Deci $m < 1$ și $m \in \left(-\infty, -1\right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

$\Rightarrow m \in \left(-\infty, -1\right]$.

Răspuns corect c.

AL - 048

Se scriu relațiile lui Vieta:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2m+1}{3m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m+1}{3m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3m} \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -\frac{1}{3}$$

Răspuns corect d.

AL - 056

$$f_m(x)=mx^2-(2m-1)x+m-1 \qquad (m\neq 0)$$

$$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow x_V=\frac{2m-1}{2m}$$

$$y_V=-\frac{\Delta}{4a}\Rightarrow y_V=-\frac{(2m-1)^2-4m(m-1)}{4m}$$

$$V\in I\ bis\Rightarrow x_V=y_V\Rightarrow\frac{2m-1}{2m}=-\frac{1}{4m}\Rightarrow \begin{array}{l}8m^2-4m+2m=0\\ 8m^2-2m=0\end{array}$$

$$\cancel{m=0} \qquad m=\frac{1}{4}$$

nu convine

Răspuns corect a.

AL - 069

Notând $x^2-4x+5=t$ obținem

$$t\in[-1,0)\cup\left[\frac{4}{5},+\infty\right), \text{ de unde}$$

$$-1\le x^2-4x+5<0 \quad \text{sau} \quad x^2-4x+5\ge\frac{4}{5} \quad \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

Răspuns corect d.

AL - 077

Se pun condițiile:

$$(1)\quad f(2)\cdot f(4)\le 0 \qquad \text{şi} \qquad (2)\quad \Delta\ge 0$$

(1) $$(4m-2+m-7)(16m-4+m-7)\le 0\Leftrightarrow$$

$$(5m-9)(17m-11)\le 0\Leftrightarrow m\in\left[\frac{11}{17},\frac{9}{5}\right]=I_1$$

(2) $\Delta=1-4m(m-7)\ge 0$ adică: $-4m^2+28m+1=0 \quad\Rightarrow m_{1,2}=\dfrac{7\pm5\sqrt{2}}{2}$

deci $\Delta \geq 0$ pentru $m \in \left[\dfrac{7-5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{7+5\sqrt{2}}{2}\right] = \mathrm{I}_2$

m trebuie să aparțină lui $I = I_1 \cap I_2$ adică $\Rightarrow m \in \left[\dfrac{11}{17}, \dfrac{9}{5}\right]$

Răspuns corect e.

AL - 107

Se pune condiția $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 2]$

Cazul I $\quad 1 - x \leq 0 \Rightarrow [1, \infty)$

Soluția (1) $\quad [-2, 2] \cap [1, \infty) = [1, 2]$

Cazul II $\quad 1 - x > 0 \quad x \in (-\infty, 1)$

În acest caz se ridică inegalitatea la pătrat

$$4 - x^2 > 1 - 2x + x^2 \quad \Rightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$$

Soluția 2 $\quad [-2, 2] \cap (-\infty, 1) \cap \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right) = \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, 1\right)$

Soluția finală = Sol (1) $\cup$Sol (2) = $[1, 2] \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, 1\right) = \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, 2\right]$

Răspuns corect f.

AL - 109

Adăugăm în ambii membrii $2x\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$$\left(x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 2x\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 + 2x\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2=1+\frac{2x^2}{x-1}\right)\Leftrightarrow\left(\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=1\right)$$

Notăm $\frac{x^2}{x-1}=y\ \Leftrightarrow\left(y^2-2y-1=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\\ y=1-\sqrt{2}\end{array}\right.$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-x\left(1+\sqrt{2}\right)+1+\sqrt{2}=0\right)\Rightarrow x\in\varnothing$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-x\left(1-\sqrt{2}\right)+1-\sqrt{2}=0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)\right\}$$

Răspuns corect f.

AL - 146

Se scrie $\left(x-m-1\right)^{|x-1|-1}\left(2x+m\right)-\left(2x+m\right)^{|x-1|}=0$

sau $\left(\frac{x-m-1}{2x+m}\right)^{|x-1|-1}=1$ pentru $2x+m\neq 0$

de unde rezultă $|x-1|-1=0$ deci $x_1=0$ $x_2=2$

şi $\frac{x-m-1}{2x+m}=1$, deci $x_3=-2m-1$. Condiția cu $x-m-1>0$ conduce la

$$-3m-2>0 \quad \text{deci } m<-\frac{2}{3}, \text{ iar } -2m-1\neq 0 \text{ şi } -2m-1\neq 2$$

$$\Rightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\},\quad x_1=0\Rightarrow m>0 \text{ rezultă } m\in\varnothing$$

Răspuns corect a.

AL - 168

Se pun condițiile $x > 0,\ x \neq 1 \quad y = \log_2 x \Rightarrow$

$$E = \sqrt{(y-1)^2} + \sqrt{(y+1)^2} = |y-1| + |y+1|,\ (\forall)\, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$E = \begin{cases} -2y, & y \in (-\infty, -1) \\ 2, & y \in [-1, 1] \\ 2y, & y \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = 2 \Leftrightarrow \quad y \in [-1, 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right] \setminus \{1\}$$

Răspuns corect d.

AL - 182

Not. $\lg x = u,\ \lg y = v,\ \lg z = t; \quad x, y, z > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} uv + ut + vt = 1 \\ uvt = 1 \\ u + v + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow w^3 - s_1 w^2 + s_2 w - s_3 = 0 \Leftrightarrow w^3 - w^2 + w - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (w-1)\left(w^2+1\right) = 0 \Rightarrow \text{ Sistemul nu are soluții în } \mathbb{R}$$

Răspuns corect e.

AL - 189

$$C_n^k;\ n, k \in \mathbb{N},\ n \geq k$$

$$x^2 + 10,\ 7x,\ 5x + 4,\ x^2 + 3x - 4 \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{cases} 7x \geq x^2 + 10 \\ 5x + 4 \geq x^2 + 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2, 5] \\ x \in [-2, 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2, 4] \cap \mathbb{N} = \{2, 3, 4\}$$

Răspuns corect b.

AL - 196

Pentru $n \geq k+1$ avem $C_{m+1}^{k+1} = C_m^{k+1} + C_m^k$

Dând lui m valorile $n, n-1, ..., k+1$ obținem:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{k+1} &= C_n^{k+1} + C_n^k \\ C_n^{k+1} &= C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{k+1}^{k+1} &= C_{k+1}^{k+1} + C_{k+1}^k \\ \hline C_{n+1}^{k+1} &= C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} \end{aligned}$$

Dar $C_{k+1}^{k+1} = C_k^k$, deci $C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{n+1}^{k+1}$

Răspuns corect b.

AL - 207

Se scrie termenul general

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{16-k} \left(x^{\frac{1}{4}} \right)^k = C_{16}^k x^{\frac{2(16-k)}{3} + \frac{k}{4}}$$

$$\frac{4(32-2k)+3k}{12} = \frac{128-5k}{12} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k \in [0,16],\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$k = 4;\ k = 16 \Rightarrow \text{ Doi termeni nu conțin radicali}$$

Răspuns corect b.

AL - 223

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(z_1 + z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})}{|z_1 - z_2|^2} = \frac{z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}}{|z_1 - z_2|^2} =$$

$$= \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1 - z_2|^2} + \frac{\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}}{|z_1 - z_2|^2}$$

$$Z = \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} \Rightarrow \overline{Z} = z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = -Z \Rightarrow X - Y_i = -X - Y_i \Rightarrow X = 0, Y \in \mathbb{R}$$

$$\| \quad X + Y_i \qquad \Rightarrow Z = Yi \Rightarrow -iZ = Y$$

Răspuns corect d.

AL - 232

$$|z-a|^2 = (z-a)\left(\overline{z-a}\right) = (z-a)\left(\overline{z}-a\right) = z\cdot\overline{z} - a\left(z+\overline{z}\right) + a^2 =$$

$$|z|^2 - 2a.\operatorname{Re} z + a^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \quad |z|^2 = 2a.\operatorname{Re} z - b^2$$

$$\left|\frac{b-z}{b+z}\right| = \left|\frac{(b-z)\left(b+\overline{z}\right)}{(b+z)\left(b+\overline{z}\right)}\right| = \left|\frac{b^2 - z\overline{z} - b\left(z-\overline{z}\right)}{b^2 + b\left(z-\overline{z}\right) + z\overline{z}}\right| =$$

$$= \frac{\left|b^2 - |z|^2 - 2ib\operatorname{Im} z\right|}{\left|2(a+b)\operatorname{Re} z\right|} = \frac{\left|b^2 - a\operatorname{Re} z - ib\operatorname{Im} z\right|}{|\operatorname{Re} z|\cdot|a+b|} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(b^2 - a\operatorname{Re} z\right)^2 + b^2(\operatorname{Im} z)^2}}{|\operatorname{Re} z|\cdot(a+b)} = \frac{\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2\left(a^2-b^2\right)}}{|\operatorname{Re} z|(a+b)} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Răspuns corect c.

AL - 250

Se folosesc formulele $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ şi $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Avem:

$$Z = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Răspuns corect a.

AL - 259

Avem $\omega^n = 1$ şi $1+\omega+\omega^2+...+\omega^{n-1}=0$

Înmulţim relaţia dată cu $1-\omega$. Avem

$$\begin{array}{l} (1-\omega)S = 1+2\omega+3\omega^2+...+(n-1)\omega^{n-2}+n\omega^{n-1} \\ \underline{\qquad -\omega-2\omega^2-...-(n-1)\omega^{n-1}-n\omega^n} \end{array}$$

Avem $$(1-\omega)S = 1+\omega+...+\omega^{n-1}-n\omega^n = -n$$

$$(1-\omega)S = -n$$

$$S = \frac{n}{\omega-1}$$

Răspuns corect c.

AL - 274

$$(i)^{2k} = \left(i^2\right)^k = (-1)^k;$$

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Avem:

$$(1+i)^n = C_n^0 + C_n^1 i + C_n^2(-1) + C_n^3(-i) + C_n^4 + C_n^5 i + C_n^6(-1)+...+C_n^{2k}(i)^{2k} =$$

$$= C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... + (-1)^k C_n^{2k} + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 + ...\right)$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}$$

Răspuns corect c.

AL - 286

Identificând matricele avem

$$\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ 2x-y+3z-3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x+(a-1)y+2z+at=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a=0$$

Răspuns corect b.

AL - 310

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2};\, b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},\, b_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{n}{2}; \quad b_n = \frac{1}{4}\left[1 + 2 + \ldots + (n-1)\right] + \frac{n}{3} = \frac{n(n-1)}{8} + \frac{n}{3}$$

$b_n = \dfrac{n(3n+5)}{24}$ Într-adevăr

$$\cancel{a_1}\ \text{şi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ll}
\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + \dfrac{1}{2} & \cancel{b_2} = b_1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \\
\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + \dfrac{1}{2} & \cancel{b_3} = \cancel{b_2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{3} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n = \cancel{a_{n-1}} + \dfrac{1}{2} & b_n = \cancel{b_{n-1}} + \dfrac{n-1}{4} + \dfrac{1}{3} \\
\hline
a_n = \dfrac{n}{2} & b_n = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2 + \ldots + (n-1) + \dfrac{n}{3}\right)
\end{array}$$

Răspuns corect d

AL - 317

Trebuie ca un determinant de ordinul doi format din A să fie diferit de zero şi toţi determinanţii de ordinul 3 din A să fie nuli

Fie $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(\beta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 1;\, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2\alpha & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2(2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Pentru aceste valori:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 4 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 1 & 2\alpha & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Răspuns corect b.

AL – 323

$$\text{Dacă } \begin{vmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} \beta & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \alpha & 2 & 3 \\ 2\alpha & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha - 2\alpha\beta = 0 \\ 2(\beta - 1) = 0 \\ 2(1 - 2\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Pentru } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \text{ matricea cu rangul 2}$$

Deci rangul este 3 dacă $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$ nu $\beta \neq 1$.

Răspuns corect d.

AL - 332

$$\Delta = \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} x^2y & xy & y \\ x & -xy & xy^2 \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{xy}\begin{vmatrix} x^2y & xy & y \\ x + x^2y & 0 & xy^2 + y \\ x^2y + y^2 & 0 & x^2 + y \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} x(1+xy) & y(1+xy) \\ x^2y + y^2 & x^2 + y \end{vmatrix} = -(1+xy)\begin{vmatrix} x & y \\ y\left(x^2 + y\right) & x^2 + y \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+xy)\left(x^2 + y\right)\left(x - y^2\right)$$

Răspuns corect e.

AL - 336

Fiindcă: $S=\dfrac{ah_a}{2}=\dfrac{bh_b}{2}=\dfrac{ch_c}{2}$ avem:

$$\Delta=4S^2\begin{vmatrix}1 & a & \dfrac{1}{bc}\\ 1 & b & \dfrac{1}{ac}\\ 1 & c & \dfrac{1}{ba}\end{vmatrix}=0$$

Răspuns corect b.

AL - 351

$$\begin{vmatrix}x & a & a & a\\ a & x & a & a\\ a & a & x & a\\ a & a & a & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3a & a & a & a\\ x+3a & x & a & a\\ x+3a & a & x & a\\ x+3a & a & a & x\end{vmatrix}=(x+3a)\begin{vmatrix}1 & a & a & a\\ 0 & x-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-a & 0\\ 0 & 0 & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

$$(x+3a)(x-a)^3=0\Rightarrow x_1=-3a,\ x_2=x_3=x_4=a$$

Răspuns corect e.

AL - 377

$$A=\begin{pmatrix}1 & -m\\ 2 & 1\\ 3 & m-1\end{pmatrix};\quad \begin{vmatrix}1 & -m\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1+2m\neq 0 \quad \text{pentru} \quad m\neq -\frac{1}{2}$$

$$\Delta_{car}=\begin{vmatrix}1 & -m & -1\\ 2 & 1 & m\\ 3 & m-1 & 1-m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -m & -1\\ 0 & 2m+1 & 2+m\\ 0 & 4m-1 & 4-m\end{vmatrix}=6\left(1-m^2\right)=0$$

$$\Rightarrow m=1,\quad m=-1$$

Pentru $m=-\dfrac{1}{2}$ $\qquad \Delta_{princ}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -\dfrac{3}{2} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad \Delta_{car}$ e acelaşi

$\Rightarrow \quad m\in\{-1,1\}$

Răspuns corect d.

AL - 385

Metoda 1. Sistem compatibil simplu nedeterminat $\Rightarrow$ necesar ca det A = 0

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha\beta & 1 \\ 1 & \beta & \alpha \end{vmatrix}=\beta(\alpha-1)^2(\alpha+2)=0$$

$$\beta=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\Rightarrow \text{ x sau z necunoscută secundară, exclus}$$

$$\alpha=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \text{ rang A = 1, exclus}$$

$$\alpha=-2\Rightarrow A=\begin{pmatrix} -2 & \beta & 1 \\ 1 & -2\beta & 1 \\ 1 & \beta & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow \text{ pentru } p\neq 0 \text{ posibil ca x sau z să fie cunoscute secundare}$$

dacă z= nec.sec. : $\quad \Delta_C=\begin{vmatrix} -2 & \beta & 1 \\ 1 & -2\beta & \beta \\ 1 & \beta & 1 \end{vmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow \beta^2+2\beta=0\Leftrightarrow \beta=-2\neq 0$$

dacă x= nec.sec. : $\quad \Delta_C=\begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ -2\beta & 1 & \beta \\ \beta & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$

pentru $\alpha = \beta = -2$: $x = z = \lambda,\ y = -\frac{1}{2}(1+\lambda)$ verifică ecuațiile principale

Metoda 2:

Înlocuim x,y,z în sistem şi identificăm $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Răspuns corect d.

AL - 409

Avem: $x_2 = x * x = 3x = \left(2^2 - 1\right)x$

Presupunem $x_k = \left(2^k - 1\right)x$ şi demonstrăm că:

$$x_{k+1} = \left(2^{k+1} - 1\right)x$$

$$x_k * x = \left[\left(2^k - 1\right)x\right] * x = 2\left(2^k - 1\right)x + x = \left(2^{k+1} - 1\right)x$$

deci

$$\left(2^{2n} - 1\right)x = 8\left[\left(2^n - 1\right)x - x\right] - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(2^{2n} - 1\right)x = \left(8 \cdot 2^n - 8 - 8 - 1\right)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^{2n} - 1 = 8 \cdot 2^n - 17 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2n} - 8 \cdot 2^n + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^n - 4\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = 4 \Leftrightarrow n = 2$$

Răspuns corect e.

AL - 416

$$E_1 = (a * b) * c = (ma + nb + p) * c = m(ma + nb + p) + nc + p$$

$$E_2 = a * (b * c) = a * (mb + nc + p) = ma + n(mb + nc + p) + p$$

din $E_1 \cong E_2 \Rightarrow \begin{cases} m(m-1) = 0 & (1) \\ n(1 - n = 0) & (2) \\ p(m - n) = 0 & (3) \end{cases}$ Ec (3) poate fi satis. în 2 cazuri a) m=n dar atunci op.* este comut şi nu ne intere deci a; b) p=0 iar (1) şi (2) ne conduc fiecare la 2 posibilități: m=0 şi n=0

m=1 şi n=1 | când * este comutat.

şi m=1 şi n=0
m=0 şi n=1   când * nu este comut./ceeace ne intere.

Deci soluțiile sunt: (1,0,0) şi (0,1,0)
Răspuns corect a.

AL – 425

Avem:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^4 = I_4$$

Dar 1997=4.499+1

$$X^{1997} = \left(X^4\right)^{499} \cdot X = X$$

$$\left(X^{1997}\right)^{-1} = X^3 \left(X^3 \cdot X = XX^3 = I_4\right)$$

Răspuns corect c.

AL - 430

$$f_n\left(f_m(x)\right) = \begin{cases} n\ m\,(fx), & f_m(x) > 0 \\ 0 & , f_m(x) \le 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \overset{m>0}{\Rightarrow} & x > 0 \\ \Downarrow & \\ & x \le 0 \end{matrix} \qquad : f_n \circ f_m = f_{nm}$$

$$\overset{A}{}$$

$$f_n \circ f_e = f_e \circ f_n = f_n \Leftrightarrow e = 1$$

$$f_{2001} \circ f_n = f_n \circ f_{2001} = f_1 \Leftrightarrow \ = \ 2001n \ \ 1 \Rightarrow \notin n \quad \mathrm{N}^*$$

Răspuns corect b.

AL - 431

Inversul lui x în M este elem. simetric al operației x', adică: $x \cdot x' = 1$ sau

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = 1, \quad aa' + 2bb' + \sqrt{2}\left(ab' + ba'\right) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \qquad \text{Nec.: } \Delta \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$$

sau $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (Condiție Nec)

Dar, mai trebuie ca

și

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a}{\Delta} \in \mathbb{Z} \\ b' &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b}{\Delta} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 - 2b^2 = \pm 1$$

Răspuns corect c.

AL - 432

Elementul neutru e funcția identică $1_E = f_0$

$$f_{-1} \circ f_t = f_t \circ f_{-1} = f_0$$

$$\Updownarrow$$

$$f_t\left(x - y + \frac{1}{2}, y - 1\right) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(x - y + \frac{1}{2} + t(y - 1) + \frac{t^2}{2},\ y - 1 + t\right) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ -1 + t = 0 \\ \dfrac{1}{2} - t + \dfrac{t^2}{2} = 0 \\ -1 + t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t = 1 \Rightarrow f_1$$ă, adic

$$g(x,y)=\left(x+y+\frac{1}{2},y+1\right);$$

Răspuns corect e.

AL - 442

$$z*e=z,\quad \forall z\in\mathbb{C}\qquad *\text{este evident comutativă}$$

$$z(e+i)+ie-1-i=z\quad \forall z\in\mathbb{C}\Rightarrow e+i=1$$

$$e=1-i$$

$$z\cdot z'=1-i\Rightarrow z'=\frac{2-iz}{z+i}$$

Deci orice $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ este simetrizabil astfel încât $(\mathbb{C}\setminus\{-i\},*)$ este grup abelian $\alpha=-i$

Răspuns corect f.

AL - 458

Condiţia de comutativitate $X\cdot X'=X'\cdot X$, unde

$$X=\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix},\quad X'=\begin{bmatrix}1&a'&b'\\0&1&c'\\0&0&1\end{bmatrix}, \text{ implică: } ac'=a'c\quad (*)$$

Dar $(*)$ nu este satisfăcută pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$ în cazurile subgrupurilor generate de matricele d) şi e).

Astfel, sunt comutative subgrupurile generate de a), b), c), şi f).

Definim, acum, $f:(\mathbb{R},+)\to(G,\cdot)$ prin

$$f(x)=\begin{bmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Avem $$f(x+x')=\begin{bmatrix}1&0&x+x'\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&x'\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=f(x)\cdot f(x')$$

Iar f este bijecţie.

Răspuns corect c.

AL - 481

$$\frac{\hat{3}}{\hat{4}}=\hat{3}\cdot\hat{4}^{-1}=\hat{3}\cdot\hat{3}=9;\quad \frac{\hat{7}}{\hat{6}}=\hat{7}\cdot\hat{2}=\hat{3};\quad \frac{\hat{9}}{\hat{2}}=\hat{9}\cdot\hat{6}^{1}=10;$$

$$E=\left(\hat{9}\cdot\hat{5}+\hat{10}\cdot\hat{3}=9\right)\cdot\hat{10}=\left(\hat{3}+\hat{8}\right)\hat{10}=\hat{0}\cdot\hat{10}=\hat{0};$$

Răspuns corect a.

AL - 484

$$f\left(z_1+z_2\right)\overset{1)}{=}f\left(z_1\right)+f\left(z_2\right)\ \text{şi}\ \ f\left(z_1\cdot z_2\right)\overset{2)}{=}f\left(z_1\right)\cdot f\left(z_2\right),\quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C};$$

deci $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad f\left(x+yi\right)\overset{1)}{=}f\left(x\right)+f\left(yi\right)\overset{2)}{\Rightarrow}f\left(x\right)+f\left(y\right)f\left(i\right)=$

$$\overset{f(x)=x}{\underset{x\in\mathbb{R}}{=\!=\!=}}\quad x+yf\left(i\right)$$

$$f\left(i^2\right)=f\left(-1\right)\overset{f(x)=x}{=\!=\!=}-1;\quad \text{deci}\quad f\left(i\right)=\pm i\Rightarrow f\left(x+yi\right)=x\pm yi$$

$$||\qquad\qquad\qquad\qquad\Downarrow$$

$$\left[f\left(i\right)\right]^2\qquad\qquad f\left(z\right)=z,\quad f\left(z\right)=\bar{z}$$

(sunt morfisme şi bijecții)

$\Rightarrow S\left(z\right)=z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$

Răspuns corect e.

AL - 505

$$f=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$$\underbrace{f\left(15\right)-f\left(7\right)}_{4}=a_0\left(15^n-7^n\right)+a_1\left(15^{n-1}-7^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-1}\left(15-7\right)=$$

$$=8k,\quad k\in\mathbb{Z},\ \text{absurd}$$

Răspuns corect b.

AL - 513

$$f(-1)=2$$

$f(2)=-1$; Din identitatea împărţirii

$f(X)=\left(X^2-X-2\right)Q(X)+mX+n;$ deducem

$$\begin{aligned} f(-1)&=-m+n=2 \\ f(2)&=2m+n=-1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow -X+1$$

Răspuns corect a.

AL - 525

Se face împărţirea şi se aplică Algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{r|l} 2X^3-7X^2+\lambda X+3 & X^3-3X^2+\mu X+3 \\ \hline -2X^3+6X^2-2\mu X-6 & 2 \\ \hline / -X^2+(\lambda-2\mu)X-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^3-3X^2+\mu X+3 & X^2-(\lambda-2\mu)X+3 \\ \hline -X^3+(\lambda-2\mu)X^2-3X & X+(\lambda-2\mu-3) \\ \hline / -(\lambda-2\mu-3)X^2+(\mu-3)X-3 & \\ -(\lambda-2\mu-3)X^2+(\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)X-(\lambda-2\mu-3)\cdot 3 & \\ \hline / \quad \left[(\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)+\mu-3\right]X+(12-3\lambda+6\mu)\equiv 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=4 \\ (\lambda-2\mu)(\lambda-2\mu-3)+\mu-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda=2 \end{cases}$$

Răspuns corect d.

AL - 528

$$P(x+1)-P(x)=4x^3+6x^2+4x+1,\ (\forall)x\in \mathrm{R} \Rightarrow grad\ P=4,$$

$$\Rightarrow P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e;$$

$$P(x+1)=P(x)a\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)+b\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+$$
$$+c\left(x^2+2x+1\right)+d(x+1)+e-ax^4-bx^3-cx^2-dx-e=$$
$$=4a\,x^3+(6a+3b)x^2+(4a+3b+2c)x+a+b+c+d\equiv 4x^3+6x^2+4x+1$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\6a+3b=6\\4a+3b+2c=4\\a+b+c+d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=0\\d=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad P(x)=x^4+k,\quad k\in\mathbb{R}$$

Răspuns corect c.

AL - 529

$$f(a)=p,\ f(b)=p,\ f(c)=p,\ f(d)=p,$$

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ diferite.

$$\Rightarrow f=(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)g+p,\ g\in\mathbb{Z}[X]$$

Dacă $(\exists)X_0\in\mathbb{Z}: f\left(X_0\right)=2p\Leftrightarrow$

(*) $$\left(X_0-a\right)\left(X_0-b\right)\left(X_0-c\right)\left(X_0-d\right)g\left(X_0\right)=+p=prim.$$

Egalitatea (*) este imposibilă deoarece p este număr prim. Rezultă că nu există $X_0\in\mathbb{Z}$ cu $f\left(x_0\right)=2p$

Răspuns corect a.

AL - 535 Notăm rădăcinile x_1,x_2,x_3 cu: $u-r,u,u+r$;

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}\\x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u=-\dfrac{b}{3a} \\ 3u^2-r^2=\dfrac{c}{a} \\ u\left(u^2-r^2\right)=-\dfrac{d}{a} \end{cases} \underset{u \text{ şi } r}{\overset{elimin}{\Rightarrow}} \quad 2b^3+27a^2d-9abc=0$$

Răspuns corect c.

AL - 540

$$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=\left(x_1+x_2+x_3\right)^3-3\left(x_1+x_2+x_3\right)\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)+$$

$$+3x_1x_2x_3=(-2)^3-3(-2)(-m)-3=-6m-11$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^4=-2x_1^3+mx_1^2-x_1 \\ x_2^4=-2x_2^3+mx_2-x_2 \\ x_3^4=-2x_3^3+mx_3-x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^4+x_2^4+x_3^4=-2(-6m-11)+m(4+2m)+2=2m^2+16m+24$$

$$\Rightarrow 2m^2+16m+24=24 \quad \Leftrightarrow \quad m=0,\ m=-8$$

Răspuns corect d.

ELEMENTE DE GEOMETRIE PLANĂ ŞI TRIGONOMETRIE (simbol TG)

TG - 141

Ecuația fasciculului de drepte ce trec prin intersecția dreptelor d_1 şi d_2 este $(2+\lambda)x+(2\lambda-3)y+6-4\lambda=0 \quad (1)$

Ecuația unei drepte ce trece prin P este $y-2=m(x-2)$

Punem condiția ca această dreaptă să treacă prin punctul (4,0) respectiv (- 4,0). Găsim $m=-1$ respectiv $m=\frac{1}{3}$. Obținem două drepte $(2)\quad x+y-4=0$ şi $x-3y+4=0 \quad (3)$.

Condiția ca dreapta (1) să fie perpendiculară pe (2) respectiv pe (3) este:

$$-\frac{2+\lambda}{2\lambda-3}=1 \text{ respectiv } -\frac{2+\lambda}{2\lambda-3}=-3 \Rightarrow$$

$$\lambda=\frac{1}{3} \text{ respectiv } \lambda=\frac{11}{5}\text{. Obținem două drepte}$$

$$(\delta_1) \quad x-y+2=0 \quad (\delta_2) \quad 3x+y-2=0$$

Răspuns corect f.

TG - 148

Avem: $m_1=2, \quad m_2=\frac{1}{3}$

$$tg\theta=\pm\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\frac{1}{3}}=\pm1 \quad \Rightarrow \theta=45^0, \quad \theta=135^0 \quad \Rightarrow \theta=45^0$$

Răspuns corect c.

TG - 174

Determinăm centrul şi raza cercului ce trece prin cele 3 puncte:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$\begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(2-a)^2+b^2=r^2\\(3-a)^2+(2-b)^2=r^2\end{cases} \Rightarrow a=\frac{13}{6}, b=\frac{7}{6}, r=\frac{\sqrt{50}}{6}$$

Deci $\omega\left(\frac{13}{6},\frac{7}{6}\right)$

$$O\omega^2=OT^2+r^2 \Rightarrow OT^2=O\omega^2-r^2$$

$$OT^2=\frac{169}{36}+\frac{49}{36}-\frac{50}{36}=\frac{168}{36} \Rightarrow OT^2=\frac{14}{3}$$

Răspuns corect c.

TG - 181 Fie $M\left(x_1,y_1\right)$ şi $N\left(x_2,y_2\right)$ de pe elipsă: avem

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 & \Rightarrow x^2-Sx+p=0\\ y=m\left(x-c\right) & \Rightarrow \begin{cases} y_1+y_2=S=m\left(S-2c\right)\\ y_1y_2=P=m^2\left(p-cs+c^2\right)\end{cases}\end{cases}$$

$$E=\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}=\frac{MN}{FM\cdot FN}$$

$$\begin{cases} MN=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(S^2-4p\right)}=\sqrt{\dfrac{4a^2b^4\left(1+m^2\right)^2}{\left(b^2+a^2m^2\right)^2}}\\ FM=\sqrt{\left(x_1-c\right)^2+y_1^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_1-c\right)^2}\\ FN=\sqrt{\left(x_2-c\right)^2+y_2^2}=\sqrt{\left(1+m^2\right)\left(x_2-c\right)^2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow FM\cdot FN=\left(1+m^2\right)\left|P-CS+c^2\right|=\frac{b^4\left(1+m^2\right)}{b^2+a^2m^2}$$

$$E=\frac{2a}{b^2}$$

Răspuns corect a.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
(simbol AM)

AM - 015

Avem

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1-n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-n}}\right]^{\frac{1-n}{n^2+n}\cdot n} \cdot \left[\left(1+\frac{1-2n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-2n}}\right]^{\frac{1-2n}{n^2+n}\cdot n} \cdot$$

$$\cdot \left[\left(1+\frac{1-3n}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{1-3n}}\right]^{\frac{1-3n}{n^2+n}\cdot n} \to e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot e^{-3} = e^{-6}$$

Răspuns corect b.

AM - 020

Limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\left[a\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)+b\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)+\left(a+b+1\right)\sqrt{n+3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a+b+1\right)\sqrt{n+3}=0 \Leftrightarrow a+b+1=0$$

Răspuns corect b.

AM - 029

Limita devine:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$$

Răspuns corect d.

AM - 072

Avem:

$$f(x)=\left\{\left[1+\prod_{k=1}^{n}\ln n(1+kx)\right]^{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}}\right\}^{\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)}=$$

$$=e^{\prod_{k=1}^{n}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=e^{\sum_{k=1}^{n}k}=e^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Răspuns corect d.

AM - 100

Arătăm că singurul punct de continuitate al funcției este $\frac{2}{3}$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ cu $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

Avem $f(x_n)=2-x_n \underset{n\to\infty}{\to} 2-x_0 \neq 2x_0 = f(x_0)$, deci f nu e cont. în x_0

Fie $x_0 \in \mathbb{Q}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ cu $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

Avem $f(x_n)=2x_n \underset{n\to\infty}{\to} 2x_0 \neq 2-x_0 = f(x_0)$

Dacă $x_0=\frac{2}{3}$ arunci $(\forall)(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ avem

$f(x_n)\underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)=\frac{4}{3}$, deci conf. T. Heine f este continuă doar în $x_0=\frac{2}{3}$

Răspuns corect d.

AM - 102

Se ştie că $x^n \underset{n\to\infty}{\to} \begin{cases} 0 & x\in(-1,1) \\ 1 & x=1 \\ \infty & x\in(1,\infty) \\ \text{Nu există}, & x\in(-\infty,-1] \end{cases}$

Se vede că şirul $a_n(n)=\dfrac{1+x^n\left(x^2+4\right)}{x\left(x^n+1\right)}$ nu e definit în $x=0$

Trecând la limită avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n\left(\dfrac{1}{x^n}+x^2+4\right)}{x^n\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)}=\dfrac{x^2+4}{x}$

$$f(x)=,\begin{cases} \dfrac{1}{x}: x\in(-1,0)\cup(0,1) \\ 3, \quad x=1 \\ \dfrac{x^2+4}{x}, \quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \end{cases}$$ Deci $A=\mathrm{R}\setminus\{0,-1\}$

$f(1-0)=1\neq 5=f(1+0)\neq 3=f(0)$ Deci $D=\{1\}$

Răspuns corect b.

AM - 104

Se foloseşte inegalitatea $\dfrac{2}{x}-1<\left[\dfrac{2}{x}\right]\leq\dfrac{2}{x}$

Pentru $x>0$, înmulțind cu $\dfrac{x}{3}$ se obține

$$\left(\frac{2}{x}-1\right)\frac{x}{3}<\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]\leq\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3}=\frac{2}{3} \text{ rezultă } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right]=\frac{2}{3}$$

Pentru $x < 0$ înmulţind cu $\frac{x}{3}$ se obţine

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{3} \le \frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right] < \frac{x}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right) \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{3}\left[\frac{2}{x}\right] = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Răspuns corect c.

AM - 131

Avem:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}}, & \text{când} \quad x = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{0}{x} = 0 & \text{când} \quad x \neq \dfrac{1}{n} \end{cases} = 0$$

deci f este derivabilă în $x \neq 0$ şi $f'(0) = 0$

Răspuns corect b.

AM - 134

Funcţia se scrie

$$f(x) = \begin{cases} x^7, & x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1] \\ x^5, & x \in (-1, 0] \\ x^4, & x \in (1, \infty) \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 7x^6, & x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ 5x^4, & x \in (-1, 0) \\ 4x^3, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$f_s'(-1) = 7 \neq 5 = f_d'(-1) \qquad f_s'(1) = 7 \neq f_d'(1) = 4$$

$$f_s'(0) = f_d'(0)$$

Deci f nu este derivabilă în $x = -1$ şi $x = 1$

Răspuns corect e.

AM - 143

$$\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2=8+x-6\sqrt{x-1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2}=\left|3-\sqrt{x-1}\right|\Rightarrow D=[1,\infty)$$

$$3-\sqrt{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow 9\geq x-1 \Leftrightarrow x\leq 10 \text{ şi } f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{x-1}, & x\in[1,10]\\ \sqrt{x-1}-3, & x\in(10,\infty)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, & x\in(1,10)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, & x\in(10,\infty)\end{cases}$$

$$f_a'(1)=-\infty;\quad f_s'(0)=-\frac{1}{6};\quad f_a'(10)=\frac{1}{6}\Rightarrow M=\{1,10\}$$

Răspuns corect d.

AM - 150

Punem succesiv condițiile ca f să fie continuă în 1, derivabilă în 1 şi de două ori derivabilă în 1.

$$f(1-0)=0,\quad f(1+0)=\alpha+\beta+\gamma\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=0 \qquad (1)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1) \quad f_s'(1)=1\\ 2\alpha x+\beta, & x\in(1,0) \quad f_d'(2\alpha+\beta)\end{cases}\Rightarrow 2\alpha+\beta=1 \qquad (2)$$

$$f''(x)=\left.\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}, & x\in(0,1) \quad f_s''(1)=-1\\ 2\alpha & x\in(1,\infty) \quad f_d''2\alpha\end{cases}\right\}\Rightarrow 2\alpha=-1 \qquad (3)$$

$$(1),(2),(3)\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{2},\quad\beta=2,\quad\gamma=-\frac{3}{2}$$

Răspuns corect d.

AM - 173

Avem $f'(x)=\frac{7}{(x+3)^2}$ $\quad$ *Ec.tg* : $\quad y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(x_0)=2;\quad y-\frac{-6+\sqrt{14}-1}{\frac{\sqrt{14}}{2}}=2\left(x+3-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y=2x+8-2\sqrt{14}$$

Răspuns corect e.

AM – 186

Fie:

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-x$$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}-1=\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}<0$$

Tabelul de variație

x	$-\infty$		0	1		∞
f'	− − − − − − −			0	− − − − −	
f	∞		0			$-\infty$

Deci $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,0)$

Răspuns corect c.

AM - 200

Trebuie ca $f'(-2)=0$ şi $f'(2)=0$

$$f'(x)=\frac{(2x-a)\left(x^2+1\right)-x^3+ax^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}=\frac{x^3+2x-a}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

$$-8-4-a=0\Rightarrow a=-12$$

$$8+4-a=0\Rightarrow a=12$$

Răspuns corect c

AM - 207

Avem: $f'(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{ax^2+b}}$; $\quad f'(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\sqrt{b}=1\Rightarrow b=1$

Pentru ca D să fie interval de lungime minimă trebuie ca

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \sqrt{S^2-4P}=\left|x_1-x_2\right|=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4ab>0\\ 2\sqrt{\dfrac{-b}{a}}=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{-\frac{1}{a}}=1\Rightarrow a=-1 \text{ şi } b=1$$

Răspuns corect e.

AM - 215

Avem: $$f'(x)=\frac{x^3-3x+a}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$x^3-3x+a=0$ Şirul lui Rolle : $\varphi'(x)=3x^2-3=0$

$-\infty$	-1	1	∞
$-$	$a+2$	$a-2$	$+$
	$+$	$-$	

$$\begin{cases}a+2>0\\ a-2<0\end{cases}\Rightarrow a\in(-2,2)$$

Răspuns corect b.

AM - 217

Fie: $$f(x)=2\ln x+x^2-4x+m^2-m+1$$
$$x>0$$

Avem: $f'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-4=0\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=1$

Şirul lui Rolle

x	0	1	$+\infty$
	$-\infty$	m^2-m-2	$+\infty$

Trebuie ca: $m^2-m-2<0 \Rightarrow m\in(-1,2)$

Răspuns corect c.

AM - 250

Avem: $f(x)-f(0)=xf'(\theta(x))$, unde $\theta(x)=\theta\cdot x$ cu $\theta\in(0,1)$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2} \quad : \quad \forall x\in[0,1]$$

Avem: $$\frac{1}{x+1}-1=-1\frac{1}{[1+\theta\cdot x]^2} \quad : \forall x\in(0,1)$$

Deci $\theta=\theta(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad ,\forall x\in(0,1)$

Evident $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

Răspuns corect c.

AM - 251

Pentru $x\neq 0,\ f(x)=\left(x\sin\dfrac{1}{\alpha}\right)'$. Dacă f admite primitive pe $\mathbb{R}$, fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă.

Atunci $F(x)=x\sin\dfrac{1}{x}+c,\quad \forall x\neq 0,\ c\in\mathbb{R}$.

Cum F este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow F(0)=C$

Cum F este derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow F'(0) = K = \lim\limits_{x-0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, limită care nu există. Deci am obținut o contradicție, aşadar f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$

Răspuns corect f.

AM - 254

f nu are proprietatea lui Darbaux pe $[-1,1] \Rightarrow f$ nu are primitive pe $[-1,1]$.

Într-adevăr $f|_{[-1,0)}$ și $f|_{[0,1]}$ sunt continue fără ca f să fie continuă pe $[-1,1]$

$$f[-1,1] = \underbrace{\left[\frac{1}{e},1\right) \cup [2,3]}_{\text{nu este interval}}$$

Răspuns corect e.

AM - 270

Schimbarea de variabile $tgx = t \Rightarrow x = arctgt = \varphi(t)$

$\varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$ $\qquad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in \mathbb{R}$

$$\int \sqrt{1+tg^2 x}dx = \int \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt =$$

$$= \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) + C = \ln\left(tgx + \frac{1}{\cos x}\right) + C$$

Răspuns corect b.

AM - 278

$$I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx; \quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$I + J = \int dx = x + c_1$$

$$J - I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln\left|\sin x + \cos x\right| + c_2$$
$$2I = x + c_1 - \ln\left|\sin x + \cos x\right| - c_2$$
$$I = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left|\sin + \cos x\right|\right) + k$$

Răspuns corect d.

AM - 282

$$(5+x)^2 - 16x - 16 = (x-3)^2, \quad (10+x)^2 - 36x - 36 = (x-8)^2$$
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{x+5+|x-3|}{2}} - \sqrt{\frac{x+5-|x-3|}{2}} + \sqrt{\frac{x+10+|x-8|}{2}} - \sqrt{\frac{x+10-|x-8|}{2}}, \quad x \in [3,8]$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+2}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{\frac{2x+2}{2}} = -2 + 3 = 1$$
$$\Rightarrow F(x) = x + c$$

Răspuns corect b.

AM - 285

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot dx = \int \frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= J + \sqrt{1+x^2}$$

unde
$$J = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{x^2}dx}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + \frac{1}{x}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{1+x^2} - \ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x} + C$$

Răspuns corect b.

AM - 293

$$a_n = \frac{3}{n}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{6}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3(n-1)}{n}}}\right]$$

$$a_n = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+i\frac{3}{n}}}$$

Alegem funcția $f:[0,3]\to \mathrm{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ care este continuă deci integrabilă şi diviziunea $\Delta_{[0,3]} = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \ldots, \frac{3(n-1)}{n}, 3\right\}$

şi punctele $\varepsilon_i = \left\{0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \ldots, \frac{3(n-1)}{n}\right\}$

$$\lim a_n = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\,\Big|_0^3 = 2\left(\sqrt{1+3}-\sqrt{1+0}\right) = 2$$

Răspuns corect b.

AM - 307

Cazul I. $a \le 1$

$$\left|x^2+a\right| = \begin{cases} x^2+a,\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{-a}\right)\cup\left(\sqrt{-a},\infty\right) \\ -x^2-a,\ x\in\left[-\sqrt{-a},\sqrt{-a}\right] \end{cases}$$

$$F(a) = \int_0^1 -\left(x^2+a\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3}+ax\right]\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}-a$$

Cazul II. $-1 < a \le 0$

$$F(a) = \int_0^{\sqrt{-a}}\left(-x^2-a\right)dx + \int_{\sqrt{-a}}^1\left(x^2+a\right)dx = -\frac{4}{3}a\sqrt{-a}+a+\frac{1}{3}$$

Cazul III. $0 < a$

$$F(a) = \int_0^1 \left(x^2 + a\right) dx = \frac{1}{3} + a$$

Răspuns corect c.

AM - 326

Avem integrală pe interval simetric din funcţia impară $f(x) = \dfrac{x}{\left|\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\right|}$

Deci $I = 0$

Răspuns corect c.

AM - 351

Ecuaţia $t^2 + 2(x-1)t + 4 = 0$, are $\Delta = 4\left(x^2 - 2x - 3\right) = 4(x+1)(x-3)$

Dacă $x \in (-1,3)$, $\Delta < 0$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $|t_1| = |t_2| = 2$. Dacă $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$, $\Delta \geq 0$ şi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ cu $t_{1,2} = 1 - x \pm \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$$|t_1(x)| = \begin{cases} 1 - x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \leq -1 \\ -1 + x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \geq 3; \end{cases} \qquad |t_2(x)| = \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \leq -1 \\ -1 + x - \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \geq 3; \end{cases}$$

aşa că

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \leq -1 \\ 2 & x \in (-1, 3) \\ -1 + x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Se calculează separat

$$I = \int \sqrt{x^2 - 2x - 3}\,dx = \int \sqrt{(x-1)^2 - 4}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{(x-1)^2 - 4} - 2\ln\left|x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 - 4}\right|$$

Atunci

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1}\left(1-x+\sqrt{x^2-2x-3}\right)dx + \int_{-1}^{3} 2dx + \int_{3}^{4}\left(-1+x+\sqrt{x^2-2x-3}\right)dx =$$

$$=13+3\sqrt{5}+2\ln\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

Răspuns corect d.

AM – 369

Avem: $x^4+2x^3-x^2-2x+2=\left(x^2+x-1\right)^2+1$

Deci $I=\int_0^1 \frac{\left(x^2+x-1\right)'}{1+\left(x^2+x-1\right)^2}dx = arctg\left(x^2+x-1\right)\Big|_0^1=$

$$=arctg1-arctg(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Răspuns corect d.

AM - 390

$$A=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right)dx = arctgx\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$$

Răspuns corect c.

AM - 406

$$V=\pi\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,dx;\quad x=\sin^2 t$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,2\sin t\cos t\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{\pi^2}{8}$$

Răspuns corect b.

BIBLIOGRAFIE

[1] MANUALE ALTERNATIVE APROBATE DE MEdC pentru clasele IX, X, XI, XII.

[2] Catedra de matematică:
- Algebră şi Analiză matematică - Culegere de teste pentru admitere în învăţământul superior, Universitatea Tehnică din Timişoara, 1991 (reeditată în 1992 – 1996).

[3] Catedra de matematică:
- Geometrie şi Trigonometrie - Culegere de teste pentru admitere în învăţământul superior, Universitatea Tehnică din Timişoara, 1991 (reeditată în 1992 – 1996).

[4] Boja N., Bota C., Brăiloiu G., Bînzar T., Găvruţă P., Klepp F., Lipovan O., Matei Şt., Neagu M., Păunescu D. :
- Teste de matematică – pentru bacalaureat şi admitere în învăţământul superior, Ed. Mirton, Timişoara, 1993.

[5] Boja N., Bota C., Bânzaru T., Bînzar T., Hossu M., Lugojan S., Năslău P., Orendovici R., Păunescu D., Radu F. :
- Probleme de Algebră, Geometrie, Trigonometrie şi Analiză matematică – pentru pregătirea examenului de bacalaureat şi a concursului de admitere în facultăţi.Ed. Mirton, Timişoara, 1996.

[6] Bânzaru T, Boja N, Kovacs A, Lipovan O, Babescu G, Găvruţa P, Mihuţ I, Rendi D, Anghelescu R, Milici C.
- Probleme de matematică – pentru absolvenţii de liceu, Ed. Politehnica Timişoara, Ediţia I.1998,Ediţia II-a revăzută 1999, Ediţia a III-a revizuită 2000.

[7] Bânzaru T., Boja N., Kovacs A., Lipovan O., Babescu Gh.,Găvruţa P.,Mihuţ I., Rendi D., Anghelescu R., Milici C.
- Matematică – Teste grilă pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţământul superior Ed. Politehnica, Timişoara, 2001.

[8] Bânzaru T, Boja N, Kovacs A, Lipovan O, Babescu G, Găvruţa P, Mihuţ I, Rendi D, Milici C, Anghelescu R. –
- Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat şi admitere în învăţământul superior. Editura Politehnica Timişoara 2002.