Editura POLITEHNICA
ISBN 978-606-35-0315-3

Culegere de probleme de matematică pentru examenul de admitere la Universitatea Politehnica Timișoara

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ

Universitatea Politehnica Timișoara

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2021 la

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

Editura POLITEHNICA

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEŞANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIŞOR
NICOLAE LUPA
ROMEO NEGREA
GHEORGHE ŢIGAN
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2021 la UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

EDITURA POLITEHNICA
2020

PREFAŢĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultăţile Universităţii Politehnica Timişoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competenţelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conţinuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educaţiei Naţionale. În acelaşi timp s-a ţinut cont şi de manualele alternative de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deşi problemele propuse sunt de tip grilă cu şase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv prezenta culegere poate fi utilizată şi la pregătirea examenului de Bacalaureat dar şi a unor concursuri şcolare.

Ca structură, cartea are trei părţi: *Probleme de algebră*, *Probleme de trigonometrie şi geometrie plană*, respectiv *Probleme de analiză matematică*.

În finalul culegerii sunt prezentate subiectele, cu rezolvările integrale, date în perioada 2014 – 2020 la concursul de admitere la Facultatea de Automatică şi Calculatoare şi la Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii şi Tehnologii Informaţionale, din cadrul Universităţii Politehnica Timişoara.

Autorii

Cuprins

PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze
$$\{3,3\} + \{-3,3\}\ ,$$
unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

a) 0 b) $0,3$ c) $0,6$ d) $6,6$ e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}\ , 100 - \sqrt{2}\ )$ şi $B = (\sqrt{5}\ , 100 + \sqrt{5}\ )$. Câte numere naturale conţine mulţimea $A \cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei
$$|x| + |x+2| = 3.$$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulţimea
$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \leq 6\}\ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care este verificată inegalitatea $(x+2y)^2 \geq nxy$ oricare ar fi numerele reale x şi y.

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8 f) nu există

AL 6 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) $\mathbb{R}$
d) $\emptyset$ e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

AL 7 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x + 2.$$

a) $[1, \infty)$ b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ c) $[-8, -4]$
d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ e) $(-\infty, -4]$ f) $[-2, \infty)$

AL 8 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puţin o soluţie reală.

a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
d) $-2,\ 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0,\ 1 \pm \sqrt{2}$

AL 9 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1.$$

a) $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$ c) $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right]$
d) $[-1, +\infty)$ e) $\emptyset$ f) $(-1, +\infty)$

AL 10 Fie ecuaţia

$$x^2 + |x| = mx\,(x+3)\,, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei soluţii reale diferite.

a) $\mathbb{R}$ b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) $\emptyset$

d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ f) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

AL 11 Să se determine suma elementelor mulţimii

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

a) -5 b) -4 c) -1 d) 0 e) 2 f) 5

AL 12 Ştiind că a este un parametru real, să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^2 - x(a^2 + \sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2} = 0.$$

a) $\{\sqrt{2}, a^2\}$ b) $\{1, a^2\}$ c) $\{\sqrt{2}, a\}$

d) $\{\sqrt{2}, a^2 + 1\}$ e) $\{1, a\}$ f) $\{2, a\}$

AL 13 Să se găsească mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

a) $\{1\}$ b) $\{0, -1\}$ c) $\{0, 2\}$

d) $\{-1\}$ e) $\emptyset$ f) $\{0\}$

AL 14 Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{-1, 1, 2\}$ c) $\{-1, 0, 2\}$
d) $\{0, 1, 2\}$ e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 15 Andrei şi Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câştigă prima rundă, iar Cristian o câştigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârşitul celei de-a doua runde?

a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 16 Valer pleacă la şcoală având suma de x lei cu el, unde x este un număr natural din intervalul $(2, 6]$ şi cheltuieşte $\dfrac{2}{x-2}$ din aceasta. Să se determine mulţimea tuturor valorile pe care le poate lua x, dacă el se întoarce acasă fără datorii.

a) $\{3, 4, 5, 6\}$ b) $\{3, 4, 5\}$ c) $(2, 6]$
d) $\{3, 4\}$ e) $\emptyset$ f) $\{4, 5, 6\}$

AL 17 Maria cheltuieşte $\dfrac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie şi $\dfrac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câştigă dublu faţă de Maria, cheltuieşte un sfert din salariul său pe chirie şi jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată şi suma pe care o câştigă fetele împreună?

a) $\dfrac{17}{72}$ b) $\dfrac{17}{24}$ c) $\dfrac{17}{48}$ d) $\dfrac{23}{24}$ e) $\dfrac{23}{72}$ f) $\dfrac{23}{48}$

AL 18 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent creşte b?

a) $56,25\%$	b) 40%	c) 20%
d) $0,025\%$	e) $0,5\%$	f) 60%

AL 19 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se măreşte de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor creşte suma medie depusă în fiecare cont?

a) 2	b) 8	c) $9,8$	d) 12	e) $12,5$	f) 13

AL 20 Preţul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depăşesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depăşeste p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este preţul transportului?

a) $s + 0,05x$	b) $s + 0,05p$	c) $0,05(s - p + x)$
d) $s + 0,05(x - p)$	e) $s + 0,05(p - x)$	f) $s + 0,05(x + p)$

AL 21 Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - x - a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$	b) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^3}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$
c) $E_1 = -\dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$	d) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$
e) $E_1 = \dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$	f) $E_1 = -\dfrac{1}{a^2}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

AL 22 Fie ecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 = 0,\ \ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o relaţie independentă de a între x_1 şi x_2.

a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$

c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$

e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

AL 23 Fie ecuaţia

$$x^2 - x - a = 0,\ \ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o ecuaţie de gradul doi în variabilă y ce are soluţiile $y_1 = \dfrac{x_1^2}{x_2}$ şi $y_2 = \dfrac{x_2^2}{x_1}$.

a) $y^2 - \dfrac{1+2a}{a}y - a = 0$ b) $y^2 + \dfrac{1+3a}{a}y - a = 0$

c) $y^2 - \dfrac{1+3a}{a}y - a = 0$ d) $y^2 - \dfrac{1+2a}{a}y - a^2 = 0$

e) $y^2 - \dfrac{1+3a}{a}y - a^2 = 0$ f) $y^2 + \dfrac{1+4a}{a}y - a = 0$

AL 24 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real nenul a ştiind că inecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, 1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $\{1\}$

d) $(0, 1]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 25 Fie mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 26 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile

$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a, ştiind că intersecţia $A \cap B$ are exact două elemente.

a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$
d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) $\emptyset$ f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 27 Se consideră un pătrat de arie S_1. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2. În acelaşi mod, construim succesiv un şir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n\geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017 S_n \geq S_1$.

a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 28 Discriminantul unei ecuaţii de gradul II cu coeficienţi întregi nu poate fi

a) -2015 b) -2016 c) 112 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 29 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ conţin exact un număr impar?

a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 30 Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{2x + 5x^2 + 8x^3}{x^2} \quad \text{pentru} \quad x > 0.$$

a) 0 b) 2 c) 8 d) 13 e) 15 f) 22

AL 31 Fie a, b, c numere reale nenule. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

a) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ b) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$

c) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ d) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

e) $-\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ f) niciuna dintre acestea

AL 32 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuaţia

$$(a-1)(a-3) + (b-5)(b-7) + (c-9)(c-11) < 0\,?$$

a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 33 Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ şi } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \dfrac{5a^2+1}{a^2}\,y + a = 0$ b) $y^2 - \dfrac{1}{a^2}\,y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$ d) $y^2 + \dfrac{5a^2+5a+1}{a^2}\,y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$ f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 34 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}\ ,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\left[k, k+\dfrac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\}$

d) $\{1\}$ e) $[0,1]$ f) $(0,1)$

AL 35 Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}\ .$$

a) $\dfrac{19}{15}$ b) $\dfrac{20}{15}$ c) $\dfrac{14}{15}$ d) 1 e) $\dfrac{13}{15}$ f) $\dfrac{10}{15}$

AL 36 Să se calculeze media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0 b) $\dfrac{5}{8}$ c) $\dfrac{3}{8}$ d) $\dfrac{5}{12}$ e) $\dfrac{7}{16}$ f) 1

AL 37 Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$[a]^2 - (2a-1)[a] + 3a = 0.$$

a) $[-1,4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0,5)$

d) $\{-3,-2,0,4,5\}$ e) $(-1,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0,4\}$

AL 38 Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor

$$a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5}\ , \quad b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}\ , \quad c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\ .$$

a) a, b, c b) a, c, b c) b, a, c d) b, c, a e) c, a, b f) c, b, a

AL 39 Se consideră şirul de numere raţionale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Să se determine al câtelea termen al şirului este numărul $\dfrac{2016}{2015}$.

a) 8120450 b) 8118435 c) 2015

d) 2016 e) 8000111 f) 8000

AL 40 Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică relaţiile

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_n x_{n-2} + x_{n-1} = 2, \quad n \geq 3.$$

Să se calculeze $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}$.

a) 0 b) 1 c) 671 d) 672 e) 2016 f) 2017

AL 41 Fie n un număr natural nenul. Să se calculeze suma

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\;.$$

a) $1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ c) $1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

d) $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e) $1-\dfrac{1}{n}$ f) $\dfrac{1}{n+1}$

AL 42 Într-un şir $a_1,\ a_2\ \ldots$, fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine mărind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1=2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 43 Fie $a_1,...,a_n,...$ termenii unei progresii aritmetice de raţie r. Ştiind că $a_{21}=20$ şi $a_{101}=60$, să se determine r şi formula termenului a_{n+1}.

a) $r=\dfrac{1}{4},\ a_{n+1}=n-1$ b) $r=1,\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{2}$

c) $r=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{2}$ d) $r=-\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=1+\dfrac{n}{2}$

e) $r=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=1+\dfrac{n}{4}$ f) $r=1,\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{6}$

AL 44 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 *m* în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 *cm* mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

a) 10 *cm* b) 11 *cm* c) 12 *cm* d) 13 *cm* e) 14 *cm* f) 15 *cm*

AL 45 O rachetă este lansată în plan vertical şi parcurge în prima secundă 150 m. În fiecare din următoarele secunde parcurge cu 10 m mai puţin ca în secunda precedentă. Care este înălţimea maximă la care ajunge racheta? Cât durează până ajunge la înălţimea maximă?

a) $h_{max} = 1200\ m,\ t = 15\ s$ b) $h_{max} = 1000\ m,\ t = 10\ s$

c) $h_{max} = 1500\ m,\ t = 20\ s$ d) $h_{max} = 2000\ m,\ t = 25\ s$

e) $h_{max} = 800\ m,\ t = 7\ s$ f) $h_{max} = 1800\ m,\ t = 22\ s$

AL 46 Fie S_m şi S_n suma primilor m şi respectiv n termeni ai unei progresii aritmetice $(m \neq n)$ cu primul termen nenul. Ştiind că

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}\ ,$$

să se determine $\dfrac{a_m}{a_n}$.

a) $\dfrac{2m-1}{2n-1}$ b) $\dfrac{2m+1}{2n+1}$ c) $\dfrac{m}{n}$

d) $\dfrac{m-1}{n-1}$ e) $\dfrac{2m-3}{2n-3}$ f) $\dfrac{m+1}{n+1}$

AL 47 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$, ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-2\}$

AL 48 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\emptyset$ f) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

AL 49 Fie n un număr natural mai mare decât 3. Să se calculeze suma

$$2+22+222+\ldots+\underbrace{22\ldots2}_{n\text{-ori}}.$$

a) $\frac{2}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$ b) $\frac{2}{81}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n-1\right)$

c) $\frac{1}{9}\left(\frac{20^{n+1}-20}{9}-n\right)$ d) $2\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$

e) $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$ f) $\frac{2}{81}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n+1\right)$

AL 50 O persoană trimite un e-mail la trei persoane şi le cere să continue, după o săptămână, să trimită fiecare la alte trei persoane acelaşi e-mail. Câte e-mailuri circulă în total în primele 10 săptămâni dacă nu se întrerupe lanţul?

a) 88572 b) 59049 c) 29524

d) 88573 e) 9841 f) 31

AL 51 O minge cade de la $1,5$ m înălţime, se loveşte de pământ şi sare din nou $1,35$ m. Când cade din nou, urcă doar $1,215$ m, şi aşa mai departe. Înălţimile formează o progresie geometrică. Care este înălţimea la care sare mingea a 6-a oară?

a) $1,5\cdot(0,9)^5$ b) $0,9\cdot(1,5)^5$ c) $1,5\cdot(0,9)^6$

d) $15[1-(0,9)^5]$ e) 0 f) $15[1+(0,9)^5]$

AL 52 Populaţia de amoebe dintr-o colonie se dublează după fiecare două zile. Dacă acum şase zile erau 200 de amoebe, câte vor fi peste patru zile?

a) 1600 b) 3200 c) 6400

d) 12800 e) 800 f) 25600

AL 53 Populaţia unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populaţia numără 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populaţia va atinge 24300 de bacterii?

a) 10 min b) 15 min c) 20 min

d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 54 Fie $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ o progresie geometrică cu termeni nenuli şi raţie $q \neq 1$. Ştiind că $b_1 = 1$ şi $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q şi suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

a) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ b) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ d) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ f) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

AL 55 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie q şi termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + ... + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}\ , \quad n \geq 2.$$

a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 56 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie $q \neq \pm 1$ şi termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n+1}^2 \quad \text{şi} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + ... + \frac{1}{b_{n+1}^2}\ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 57 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ şi trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc.

a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 58 Să se determine funcţia de gradul întâi, ştiind că graficul său taie axa Ox în $x = \sqrt{3}$ şi trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\, x + 2$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\, x - 2$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, x + 2$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}\, x + 1$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\, x - 1$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\, x$

AL 59 În câte puncte taie axa Ox graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \text{ ?} \end{cases}$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 60 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P). Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 61 Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ şi este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$

d) $x^2 - 2x + 1$ e) nu există f) $-4x^2 + 3x + 1$

AL 62 Într-un recipient, presiunea variază în intervalul $[0, 10]$ după legea $p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7$ (presiunea măsurată în Bar, iar timpul în minute). După câte minute presiunea este minimă?

a) $4,5$ b) $6,0625$ c) 0 d) 1 e) 9 f) $6,5$

AL 63 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1} \ , \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a, ştiind că imaginea funcţiei f este un interval de lungime 1.

a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1)$ c) $\{2\}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 64 Fie funcţia $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m şi maximă M a funcţiei f.

a) $m = 0,\ M = 1$ b) $m = -4,\ M = 5$ c) $m = -4,\ M = 4$

d) $m \in \emptyset,\ M = 5$ e) $m = -4,\ M = 1$ f) $m = -4,\ M = +\infty$

AL 65 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a \ \text{ şi } \ g(x) = x^2 + (b+1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a şi b, ştiind că graficele funcţiilor f şi g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox.

a) $a = 0,\ b = -2$ b) $a = 1,\ b = -2$ c) nu există

d) $a = 0,\ b = 1$ e) $a = 1,\ b = 2$ f) $a = -1,\ b = -2$

AL 66 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \ .$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) $\dfrac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\dfrac{1}{f(x)}$ f) $\dfrac{1}{f(-x)}$

AL 67 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m-1)x, & x \in [2, 4) \\ x + 8, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

a) $[1, 2)$ b) $[0, 3]$ c) $(1, 4]$ d) $[0, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $[1, \infty)$

AL 68 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = x^2 - x \ \text{ şi } \ g\,(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcţia compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x\,(x^2 - x)$ c) $(3x-1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 69 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f\,(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } \ x < 0 \\ 2x - 3, & \text{dacă } \ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{şi } \ g\,(x) = x - 2.$$

Să se determine $(f \circ g)\,(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<-2 \\ 2x-7, & x \geq -2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$

AL 70 Să se determine toate funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \quad \text{şi} \quad g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ştiind că $f \circ g = g \circ f$.

a) $f(x) = x+1, g(x) = x$ b) $f(x) = ax+1, g(x) = x$

c) $f(x) = x+1, g(x) = x+b$ d) $f(x) = ax+1, g(x) = x+1$

e) $f(x) = ax+1, g(x) = x$ sau $f(x) = x+1, g(x) = x+b$

f) $f(x) = x+1, g(x) = x$ şi $f(x) = x+1, g(x) = x-1$

AL 71 Dacă numerele reale x şi y satisfac relaţia $|x+y| + |x-y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

AL 72 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuaţia

$$|x| + |y| < 10?$$

a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

AL 73 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y)\in M} xy \right|.$$

a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 1 f) 2

AL 74 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluţie.

a) -2 b) 2 c) 4 d) 3 e) -1 f) -6

AL 75 Să se găsească toate valorile reale ale lui x şi y ştiind că $x + y = 2$ şi $x^3 + y^3 = 2$.

a) $x = y = 1$ b) $x = 2$, $y = 0$ c) $x = 1 + \sqrt[3]{2}$, $y = 1 - \sqrt[3]{2}$
d) $x = 0$, $y = 2$ e) $x = 4$, $y = -2$ f) $x = 3$, $y = -1$

AL 76 Fie mulţimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1,\ \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum\limits_{x\in M} x^2$.

a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

AL 77 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât

$$\frac{2002}{10^{-b}}$$

să aparţină intervalului $[1, 100]$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$

d) $\{-4, -3, -2\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-3, -1\}$

AL 78 Să se determine cea mai mică valoare întreagă a numărului k care face adevărată inegalitatea $0,02468 \cdot 10^k > 10000$.

a) 6 b) 10 c) 12 d) 8 e) 20 f) 14

AL 79 Să se rezolve ecuaţia $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

a) -1 b) 0 c) 1

d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\dfrac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

AL 80 Să se rezolve ecuaţia $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

a) $\left\{0\,,\dfrac{2\ln 2}{\ln 2 + 2\ln 3}\right\}$ b) $\left\{0\,,\dfrac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1\,,\dfrac{\ln 2}{2\ln 2 + \ln 3}\right\}$

d) $\left\{1\,,\dfrac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0\,,\dfrac{\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 3}\right\}$ f) $\left\{0\,,\dfrac{\lg 3}{1 + 2\lg 2}\right\}$

AL 81 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ şi $c = \dfrac{1 - a - b}{2 - 2b}$. Să se determine 12^c.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

AL 82 Să se găsească produsul tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^{\log_2 x} = 16$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 83 Fie a şi b numere reale strict pozitive care satisfac relaţiile $a^b = b^a$ şi $b = 9a$. Să se determine valoarea lui a.

a) $1/9$ b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 84 Numerele reale strict pozitive x şi y verifică relaţiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y).$$

Să se determine raportul $\dfrac{y}{x}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ c) $\log_2 3$ d) $\dfrac{9}{4}$ e) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ f) $\log_3 2$

AL 85 Fie $x > 10$. Câte cifre are soluţia ecuaţiei $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10} + 1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 86 Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 87 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $n \geq 2$. Să se calculeze

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \ldots + \frac{1}{\log_n a} \ .$$

a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\dfrac{1}{\log_{n^n} a}$

d) $\dfrac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

AL 88 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$\log_x\left(x^2-x+2\right)>2\log_x(x+1).$$

a) $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ b) $x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ c) $x\in(1,\infty)$

d) $x\in\left(\frac{1}{3},1\right]$ e) $x\in(0,1)$ f) $x\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

AL 89 Dacă $a,b,c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, $bc\neq 1$ şi notăm $x=\log_b a,\ y=\log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

a) $x+y$ b) xy c) $\frac{1}{x+y}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{x+y}{xy}$ f) $\frac{xy}{x+y}$

AL 90 Fie $a,b,c\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} a^x=bc\\ b^y=ca\\ c^z=ab.\end{cases}$$

Să se calculeze $xyz-x-y-z$.

a) abc b) 2

c) 0 d) $(a-b)(b-c)(c-a)$

e) $a+b+c$ f) 1

AL 91 Câte numere naturale $n>1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 92 În ce interval se află soluţia strict pozitivă a ecuaţiei

$$(x^2+9)^{\frac{1}{\log_x (x^2+9)}} = \sqrt[3]{-x^2+6x}.$$

a) $(2,3]$ b) $(0,1)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right]$ c) $(1,6)$

d) $(-1,0)$ e) $[-1,1]$ f) $(1,2)$

AL 93 Să se rezolve inecuaţia

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2x+2\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3).$$

a) $x\in[-1,+\infty)$ b) $x\in\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]\cup[-1,+\infty)$

c) $x\in\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right]\cup\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$ d) $x\in\emptyset$

e) $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$ f) $x\in(-\infty,0]$

AL 94 Se consideră expresia

$$E(x,n) = \sqrt[2^1]{x}\,\sqrt[2^2]{x}\,\sqrt[2^3]{x}...\sqrt[2^n]{x} - x^n,$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x>0$. În care din următoarele situaţii $E(x,n)$ este strict pozitivă?

a) $n\in\{1,2,3,4\}$ şi $x\in(3,\infty)$ b) $n\geq 1$ şi $x\in(2,3]$

c) $n\geq 1$ şi $x\in(1,2)$ d) $n=1$ şi $x=e$

e) $n\geq 1$ şi $x\in(0,1)$ f) $n\geq 5$ şi $x\in(3,\infty)$

AL 95 Să se determine mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3}+4)^x - 3(\sqrt{3}+1)^x + 2 < 0\}.$$

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(0, \dfrac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}\right)$

d) $(0, +\infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\left(\dfrac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}, +\infty\right)$

AL 96 Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 ... x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 ... x_n) + ... + \log_{x_n}(x_1 x_2 ... x_n)$$

a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 97 Fie e baza logaritmului natural şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\dfrac{x_1}{x_2}$.

a) $e(e+1)$ b) e c) 1 d) e^3 e) 2 f) nu există

AL 98 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, x < -1 \\ mx - 3, \ x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă şi să se determine în acest caz funcţia ei inversă.

a) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \dfrac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

b) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

c) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y \geq -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$

d) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \dfrac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

e) $m = -3,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

f) $m = -1,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} 2 + y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

AL 99 Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+8} = 3$. Să se determine suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei.

a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

AL 100 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluţii reale distincte.

a) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$

d) $(1, 2]$ e) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

AL 101 Se consideră funcţia $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$(f(1) + f(2) + f(3))^3 = 27f(1)f(2)f(3).$$

Să se determine numărul elementelor mulţimii $Im(f)$, unde $Im(f)$ reprezintă imaginea funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) ∞

AL 102 Să se calculeze

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 5 f) -4

AL 103 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x astfel încât se poate calcula $C_{7x}^{x^2+10}$.

a) $\{2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AL 104 Să se calculeze suma

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 100 \cdot 100!\ .$$

a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$

d) $101! - 1$ e) $200! + 1$ f) $200! - 1$

AL 105 Să se calculeze suma $\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$.

a) 171700 b) $\frac{5050}{3}$ c) 17

d) 206040 e) 2550 f) $\frac{51}{2}$

AL 106 Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{100}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k!(k^2+1)\right).$$

a) $100!$ b) $101!-1$ c) $102!$

d) $102!-2$ e) $100!-2$ f) $101!$

AL 107 Să se determine puterea lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului

$$31\cdot 32\cdot 33\ldots 59\cdot 60.$$

a) 30 b) 31 c) 29 d) $30!$ e) $29!$ f) 10

AL 108 Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right),\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}.$$

Să se determine mulţimea $\left\{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ \middle|\ \frac{1}{2}\le x_n\le\frac{2}{3}\right\}$.

a) $\{3,4\}$ b) $\{5,6,7\}$ c) $\{2,3,4\}$

d) $\emptyset$ e) $\{2,3,4,5,6\}$ f) $\{2,4,6\}$

AL 109 Un păianjen trebuie să încalţe câte o şosetă şi un pantof pe fiecare din cele 8 picioare ale sale. În câte ordini posibile poate el încălţa cele 16 articole ştiind că, pe fiecare picior, el trebuie să ia şoseta înainte de a lua pantoful?

a) $8!$ b) $2^8\cdot 8!$ c) $(8!)^2$ d) $\frac{16!}{2^8}$ e) $16!$ f) $64!$

AL 110 Să se calculeze

$$\frac{C_{2017}^{1}\cdot C_{2017}^{3}\cdot \ldots \cdot C_{2017}^{2017}}{C_{2017}^{2}\cdot C_{2017}^{4}\cdot \ldots \cdot C_{2017}^{2016}}\ .$$

a) 1 b) 2 c) 2017 d) $\dfrac{2017\cdot 2016}{2}$ e) 2016 f) 2018

AL 111 Să se calculeze suma

$$C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6+C_9^7.$$

a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

AL 112 Fie

$$A=C_{100}^{1}+2C_{100}^{2}+3C_{100}^{3}+\ldots+100C_{100}^{100}\ .$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată?

a) A este prim b) $A\in(10^5,10^6)$ c) $3|A$
d) $7|A$ e) $A=10000$ f) $A=100\cdot 2^{99}$

AL 113 Câte numere de 10 cifre conţin 4 cifre de 3 şi 6 cifre de 7?

a) 24 b) 120 c) 210 d) 240 e) 256 f) 720

AL 114 Câte din submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1,2,\ldots,15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 115 Care este cel mai mare factor prim de două cifre al numărului C_{200}^{100}?

a) 31 b) 47 c) 61 d) 67 e) 97 f) 24

AL 116 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$.

a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$
d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 117 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuaţia

$$x + y + z = 10\ ?$$

a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 118 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 119 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete şi 7 băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete şi 2 băieţi pentru a participa la un concurs?

a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 120 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq \left(C_{n+1}^3\right)^2.$$

a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{1, 2, 3, 4\}$ c) $\emptyset$
d) $\{2\}$ e) $[2, +\infty)$ f) $\{2, 3, 4, 5\}$

AL 121 Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}\right)^{99}$?

a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 122 Fie $x > 0$. Câţi termeni din dezvoltarea

$$\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$$

nu-l conţin pe x, ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 1024?

a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 123 Fie $x_1 = 9$ şi $x_{n+1} = 9^{x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine ultimele două cifre ale lui x_{2013} scris în baza 10.

a) 11 b) 21 c) 89 d) 81 e) 99 f) 49

AL 124 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 5x + 4x^3)^{10}$.

a) $40 \cdot C_{10}^2$ b) $200 \cdot C_{10}^2$ c) $5^4 \cdot C_{10}^4$
d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$ e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$ f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$

AL 125 Fie binomul

$$\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n, \ x > 0.$$

Ştiind că termenul T_{13} este de forma $c_1 x$, să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma $c_2 x^{-22}$, unde c_1 şi c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x.

a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 126 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x + 2y + 3)^8$.

a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

AL 127 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5+2x)^{16}$ este cel mai mare.

a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(0,1)$ c) $(1,3)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e) $(-2,2)$ f) $(-1,1)$

AL 128 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a astfel încât între soluţiile complexe z_1 şi z_2 ale ecuaţiei $z^2+(2a-1)z+3a-1=0$ să aibă loc relaţia

$$\left|\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}\right| \le 1.$$

a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0,1]$ c) $[-1,1]$

d) $(1,\infty)$ e) $(-\infty,1)$ f) $(2,3)$

AL 129 Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^2-(6-i)z+5-i=0.$$

a) $2+\sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1+\sqrt{26}$.

AL 130 Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^6-9z^3+8=0.$$

a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 131 Să se calculeze

$$\frac{i\cdot i^2\cdot i^3\cdot \ldots \cdot i^{2012}}{i+i^2+i^3+\ldots+i^{2013}}.$$

a) 2013 b) $2013i$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 132 Se consideră numerele complexe z şi w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{şi} \quad |z + w| = \sqrt{2013}\ .$$

Să se determine valoarea lui $|z - w|$.

a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 133 Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C}, |z|^2 + z = 1 + i\}$ şi $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulţimea $\{z^{4n},\ z \in A\}$.

a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
d) $\emptyset$ e) $\{(i - 1)^n\}$ f) $\{(i(i - 1))^n\}$

AL 134 Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3 care satisfac relaţiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \quad \text{şi} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1.$$

Să se determine suma $z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) 3 b) 1 c) $2n$ d) $(-1)^n$ e) n f) $n^2 - n + 1$

AL 135 Ştiind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)^9$.

a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 136 Numărul complex z satisface condiţiile $|z - i| = |z - 1| = |z + 5|$. Să se determine $|z|$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 137 Se ştie că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1+2i$, $-2-2i$ şi $3+i$. Care este cel de-al patrulea număr?

a) $3 - 2i$ b) $-2 + 3i$ c) $2 - 3i$

d) $-3 + 2i$ e) $2 - 2i$ f) $3 - 3i$

AL 138 Fie numărul complex z care verifică ecuaţia $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$.

a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 139 Numărul complex z are proprietăţile $|z+2| = |z-6(1+i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 140 Expresia $\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{24}$ are valoarea

a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^8 f) -2^8

AL 141 Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ şi $z_2 = -2 + i$. Să se determine numerele complexe z cu proprietăţile

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

a) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$ b)$-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

c) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{4}$

e) $-\dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

AL 142 Fie numerele complexe z şi w. Să se calculeze

$$\frac{1+|z\cdot w|^2}{|\overline{z}\cdot w+1|^2+|z\cdot\overline{w}-1|^2}\ .$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\overline{z}w+z\overline{w}$ e) $Re(zw)$ f) $Im(\overline{zw})$

AL 143 Fie mulţimea $A=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2+z+1=0\}$. Ştiind că $z\in A$, să se calculeze

$$\frac{z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^3-4}{z^{2013}+2}\ .$$

a) z b) z^2 c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 144 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\frac{z-i}{z+i}+1=0\ .$$

a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 145 Se consideră numerele complexe z_1,z_2,z_3 care îndeplinesc condiţiile

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\quad z_1+z_2+z_3\neq 0\ \text{ şi }\ z_1^2+z_2^2+z_3^2=0.$$

Să se determine $|z_1+z_2+z_3|$.

a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 146 Care este probabilitatea p, respectiv q, ca alegând una din soluţiile ecuaţiei $(x+2)\left(x^2-x-1\right)=0$ aceasta să fie reală, respectiv întreagă.

a) $p=\frac{1}{3},\ q=0$ b) $p=1,\ q=\frac{1}{3}$ c) $p=q=\frac{1}{3}$

d) $p=1,\ q=0$ e) $p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3}$ f) $p=q=\frac{1}{2}$

AL 147 Care este probabilitatea p, respectiv q, ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n \in \mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101.

a) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{4}{101}$ b) $p = \dfrac{51}{101}, q = \dfrac{4}{101}$ c) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{5}{101}$

d) $p = \dfrac{51}{101}, q = \dfrac{5}{101}$ e) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{3}{101}$ f) $p = \dfrac{49}{100}, q = \dfrac{3}{101}$

AL 148 Din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se aleg aleator şase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{8}$ f) $\dfrac{1}{10}$

AL 149 Considerăm un alfabet format din simbolurile $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $*$ şi $\sharp$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

AL 150 Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\dfrac{A_4^2}{52}$ e) $\dfrac{C_4^2}{52}$ f) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$

AL 151 Câte secvenţe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

AL 152 Simona Halep şi Serena Williams joacă finala Turneului Winbledon după regula cel mai bun din 3 seturi. Se presupune că cele două jucătoare au şanse egale de a câştiga un set şi că rezultatul unui set este independent de alte rezultate. Dacă Simona Halep a câştigat deja primul set, care este probabilitatea ca ea să câştige finala?

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4}$

AL 153 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 6?

a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 154 Care este probabilitatea ca aruncând de două ori succesiv două zaruri, să obţinem în ambele cazuri suma punctelor 7?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{49}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{6}{49}$

AL 155 O şesime din cantitatea de pizza vândută de un restaurant este cu brânză, iar o cincime din restul celor vândute este cu pepperoni. Andrei cumpără la întâmplare o pizza. Care este probabilitatea ca aceasta să fie cu pepperoni?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{30}$ f) $\frac{3}{5}$

AL 156 Andrei invită 12 prieteni la cină, din care jumătate sunt bărbaţi. Dintre prieteni, exact o femeie şi un bărbat aduc câte un desert. Selectăm la întâmplare o persoană dintre invitaţi. Care este probabilitatea ca aceasta să fie un bărbat care nu a adus desert sau să fie o femeie?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{35}{36}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 157 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba şi 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziţionează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus şi unul Sony?

a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 158 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL 159 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \text{ şi } C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x+4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

a) $x = 1$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = 1$ c) $x = -2$, $y = -2$

d) $x = 2$, $y = -1$ e) $x = 1$, $y = -2$ f) $x = 2$, $y = 2$

AL 160 Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

a) 10 b) e c) nu există

d) 1 e) 2 f) 5

AL 161 Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_2$. Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ şi $f(B)$.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $2B$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, $-2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2B$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2B$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $-2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AL 162 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz}, dacă matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) 4 b) x c) 8 d) 2 e) e f) 1

AL 163 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a + b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} .$$

a) -2 b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) -1

AL 164 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$\operatorname{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A) \dots (I_2 + 2018A)],$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X.

a) 0 b) $2018!$ c) $1 + 2017!$

d) $2019!$ e) $1 + 2018!$ f) $1 + 2019!$

AL 165 Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

astfel încât $AB \neq O_2$ şi $BA = O_2$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B.

a) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$

AL 166 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută prin înmulţire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

a) $x_{11} = x_{22},\ x_{12} = x_{21} = 0$ b) $x_{11} = -x_{22},\ x_{12} + x_{21} = 1$

c) $x_{11} = x_{12} = 0,\ x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$

e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$

AL 167 Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AL 168 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2018}.$$

a) $\dfrac{2019^{2018}+1}{2018}\ A$ b) $\dfrac{2018^{2016}+1}{2017}\ A$ c) $\dfrac{2019^{2018}-1}{2018}\ A$

d) $2018A$ e) $1009 \cdot 2019\ A$ f) $\dfrac{2018^{2016}-1}{2017}\ A$

AL 169 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

AL 170 Fie matricea

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

a) X b) I_2 c) O_2 d) $-X$ e) $-I_2$ f) X^2

AL 171 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j \ , \\ 0, & i > j \ , \\ (-1)^{i+j}\ C_j^i \ , & i < j \ . \end{cases}$$

Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcţie de matricea identitate I_3 şi de puterile matricei $B = A - I_3$.

a) $A^n = nB^n + 2I_3$

b) $A^n = \left(\dfrac{n^2-n}{2} + 1\right) B + nI_3$

c) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\ B^2 + nB + I_3$

d) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\ B + nI_3$

e) $A^n = nB^2 + \dfrac{n^2-n}{2}\ B + I_3$

f) $A^n = \dfrac{n^2-n-1}{2}\ B^2 + nB + I_3$

AL 172 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \ x \neq \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1-4035^n \end{pmatrix}$

AL 173 Să se determine numerele reale a şi b pentru care soluţia ecuaţiei

$$X^{2017}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) $a = 0,\ b = 0$ b) $a = 2017,\ b = \frac{1}{2017}$

c) $a = \frac{1}{2017},\ b = 2017$ d) $a = 0,\ b = \frac{1}{2017}$

e) $a = 2017,\ b = 0$ f) $a = \frac{1}{2017},\ b = \frac{1}{2017}$

AL 174 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$ad = bc \ \text{ şi } \ a + d \neq 0.$$

Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) $\dfrac{(1+a+d)^n-1}{a+d}(b+c)+1$ b) $(a+b+c+d)^n+2$

c) $\dfrac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\dfrac{(1+a+d)^n-1}{a+d}(a+b+c+d)+2$

e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c)+1$

AL 175 Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{36}.

a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

AL 176 Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017}.

a) $2^{2017}A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

AL 177 Se consideră mulţimea matricelor de forma

$$X(m)=\begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b)=X(a+b+ab)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ şi să se calculeze $(X(1))^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 6(2^n-1) \\ 2+2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$ b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}-6 \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n+1) \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n-1) \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4+3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

AL 178 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n, unde n este un număr natural nenul.

a) 2^{n+1} b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\dfrac{5^{n+1}}{3}$

d) $\dfrac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\dfrac{4^n + 5^n}{3} + 1$

AL 179 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2019 \\ 2019 & 2020 \end{pmatrix}.$$

Atunci A^{2018} este de forma:

a) $\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{N}$

b) $\begin{pmatrix} a & 2019x \\ 2019x & a+2x \end{pmatrix}$, $a, x \in \mathbb{N}$ cu $a^2 + 2ax - 2019^2x^2 = 1$

c) $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a-2x \end{pmatrix}$, $a, x \in \mathbb{N}^*$

d) $\begin{pmatrix} a+2 & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$

e) $\begin{pmatrix} 2018a & 2019b \\ 2019b & 2018a+2 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$

f) $\begin{pmatrix} 2018a & 2019b \\ 2019b & 2020(a+2) \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$

AL 180 Fie $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ f(X) = aX^2 + bX + cI_3, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$. Dacă matricele A şi $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică proprietăţile

$$f(AB) = O_3 \quad \text{şi} \quad f(BA) \neq O_3,$$

atunci să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $a = 0$ b) $b = 0$ c) $c = 0$

d) $a = 1$ e) $b = -1$ f) $c = 1$

AL 181 Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2018} = O_3$. Câte matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică proprietatea $A^{2017}B + BA = I_3$?

a) 0 b) 2018 c) 27

d) 1 e) 2 f) o infinitate

AL 182 Să se determine suma tuturor elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) -2015 b) -2013 c) -2015 sau 2023

d) 2018 e) -2017 sau 2023 f) -2017 sau -2013

AL 183 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{2020}\begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$ f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 184 Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M}=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & 5a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ a\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Să se calculeze $B(a)=A(a)+A^2(a)+\ldots+A^n(a)$ şi să se determine $a\in\mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{1}{n}\,B(a)\in\mathcal{M}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix}2 & 5a(n+1)\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, a impar

b) $\begin{pmatrix}n & 5a\frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & n\end{pmatrix}$, a impar

c) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix}2 & 5a(n+1)\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, a par

d) $\begin{pmatrix}1 & 5a\frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, a par

e) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix}1 & 5a(n+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, a impar

f) $\begin{pmatrix}n & 5a\frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & n\end{pmatrix}$, a par

AL 185 Să se determine rangul matricei

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -6 & -4\end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

AL 186 Să se determine rangul matricei

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & -4 & 8\end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 187 * Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

să aibă rangul minim.

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 188 Pentru câte valori ale parametrului real m, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul maxim?

a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 189 Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $3 \geq m \geq n \geq 2$. Dacă

$$4(AB)^3 + 3(AB)^2 + 2(AB) + I_m = O_m,$$

atunci să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $m = n + 1$ b) $BA = I_n$ c) $(AB)^3 = I_m$

d) $m = n$ e) $(AB)^4 = I_m$ f) $\det(AB) = 0$

AL 190 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$.

a) $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$ b) 1

c) $a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3$ d) 0

e) $-a_1+b_1-a_2+b_2-a_3+b_3$ f) -1

AL 191 Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij}=1+\log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\mathrm{tr}(A))^{\det A}$, unde $\mathrm{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A.

a) $\log_3 2+\log_2 3+3$ b) 1

c) 3 d) $\frac{1}{2}\log_2 3$

e) $\frac{3}{2}\log_3 2+3$ f) $\log_3 2+\frac{1}{2}\log_2 3+3$

AL 192 Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B=\sum\limits_{k=1}^{n} A^k$, $n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B.

a) $(2^{n+1}-1)(3^n-1)$ b) 1 c) 0

d) $3(2^n-1)(3^n-1)$ e) 6^n f) $\frac{1}{6^n}$

AL 193 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

a) $a+b+c$ b) $a^2+b^2+c^2$

c) $ab+bc+ca$ d) $(a+b)(a+c)(b+c)$

e) $-a-b-c$ f) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

AL 194 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietăţile:

$$\det(A - I_2) = 2 \quad \text{şi} \quad \det(A + I_2) = 4.$$

Să se calculeze $\det A + \det(A - 2I_2)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL 195 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) 0 b) b c) c

d) a e) $a+b+c$ f) $(a+b+c)^3$

AL 196 Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c = \overline{1, 9}$.

a) $99800\ (a-b)(b-c)(c-a)$ b) $998001\ (a^3+b^3+c^3-3abc)$

c) $10^6\ abc$ d) $9908\ (a+b+c)^3$

e) 0 f) $999\ \overline{abc}$

AL 197 Fie x, y şi z numere reale, pozitive şi distincte. Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x & y & y \\ z & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}.$$

a) $\dfrac{z(x-y)^3-y(x-z)^3}{z-y}$ b) $\dfrac{z(x-y)^4-y(x-z)^4}{z-y}$

c) $\dfrac{z(x-y)^2-y(x-z)^2}{z-y}$ d) $\dfrac{z(x+y)^4-y(x+z)^4}{z+y}$

e) $\dfrac{z(x+y)^3-y(x+z)^3}{z+y}$ f) $\dfrac{z(x+y)^2-y(x+z)^2}{z+y}$

AL 198 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}, \ a,b,c\in\mathbb{R}^*.$$

a) $(a+b+c)^2$ b) $4(a+b)(b+c)(c+a)$

c) 0 d) $2(a-b)(b-c)(c-a)$

e) $a^2+b^2+c^2-2abc$ f) $4(a+b+c)^2+abc$

AL 199 Să se calculeze

$$\begin{vmatrix} a^2-ab-ac+p & ab-a^2-ac-p & ac-a^2-ab-p \\ ab-b^2-bc-p & b^2-ab-bc+p & bc-ab-b^2-p \\ ac-bc-c^2-p & bc-ac-c^2-p & c^2-ac-bc+p \end{vmatrix},$$

unde $a,b,c,p\in\mathbb{R}$.

a) 0 b) $a^2+b^2+c^2+p^2$

c) $p(a^2+b^2+c^2+p^2)$ d) $-4p^2(a^2+b^2+c^2+p)$

e) $-2p(ab+ac+bc)$ f) $4p^2(a^2+b^2+c^2+p^2)$

AL 200 Fie matricea $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiţia $a_{ij}+a_{jk}+a_{ki}=0$ pentru orice $i,j,k=\overline{1,3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A.

a) 2017 b) -2017 c) 1 d) -1 e) 0 f) 1009

AL 201 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-a-1 & ac-a & a^2-b^2-c \\ b^2+ab-a-1 & a^2-c^2-b & ab-a \\ b^2c+bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $1 \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ c) 1

d) $1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 202 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^3} & -\dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{b^3} & -\dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{c^3} & -\dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

a) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

b) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

c) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

d) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

e) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

f) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

AL 203 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \le i \le n-1,\ n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 204 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $| x_1 | + | x_2 | + | x_3 |$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) -3 f) 4

AL 205 Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$, $C = A^2 + B^2$ şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2x \det C - \det C = 0.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $x_1, x_2 \geq 0$ b) $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

c) $x_1 < 0,\ x_2 = \sqrt{2}\, x_1$ d) $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ sau $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$

e) $x_1 = x_2 > 0$ f) $x_1 = \sqrt{2}\, x_2,\ x_2 > 0$

AL 206 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relaţiile $AA^t = A^tA = I_3$ şi are determinantul egal cu 1.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 207 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A. Câte elemente are mulţimea $\{I_2, A, A^2, ..., A^{2018}\}$?

a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 208 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $AB \neq BA$ şi $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \operatorname{tr}(A + B),$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X.

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 209 Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $A + A^t = O_3$ şi x un număr real astfel încât $\det(A^2 - xI_3) < 0$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $x \in \emptyset$ b) $x = -1$ c) $x > 0$

d) $x = 0$ e) $x = -2$ f) $x = -3$

AL 210 Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cel puţin una nesingulară astfel încât

$$3AB = 2BA + I_3.$$

Să se calculeze

$$\det(I_3 - AB) + 2\det(I_3 - BA) - 3\det(AB - BA) \ .$$

a) $1 - \det(AB - BA)$ b) -1 c) $\dfrac{3}{2}$

d) $3 + \det(I_3 - AB)$ e) $2 + \det(I_3 - BA)$ f) $\det(AB - BA)$

AL 211 Să se determine mulţimea tututor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

să aibă soluţie nesingulară.

a) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$

d) $\emptyset$ e) $\{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

AL 212 Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) 12 b) 5 c) -9 d) -4 e) 7 f) 3

AL 213 Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$ f) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R} \right\}$

AL 214 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibe loc relaţia

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

a) $2a + b = \det A$ b) $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$

c) $a = 0,\ b = 2,\ c = -1$ d) $a = -1,\ b = 2,\ c = 0$

e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ f) $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$

AL 215 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \ \text{ sau } \ i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \ \text{ şi } \ i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 216 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$ b) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ c) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ e) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

AL 217 Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, B, C, D nesingulare, astfel încât

$$(A - B^{-1})B - (AD + CB) + CD = O_2.$$

Care din următoarele relaţii este adevărată?

a) $I_2 - CD + BA = CB + DA$ b) $D(C + D^{-1}) - AB = DA + BC$

c) $DC - I_2 + BA = BC + DA$ d) $C(D - C^{-1}) + AB = BC - AD$

e) $CD + I_2 - DA = BC - BA$ f) $C(C^{-1} + D) + AB = BC + AD$

AL 218 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine abc.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 219 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ şi

$$A^4 - (a+d)^2 A^2 + (ad-bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existenţa inversei lui A şi în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1}.

a) $\dfrac{a+d}{ad-bc} I_2$ b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{a+d}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) A f) $\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 220 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x+y+2z=-1 \\ 2x+2y+3z=2 \\ x-2y-z=4\ . \end{cases}$$

a) $(-24, 14, 19)$ b) $(-2, -3, 3)$ c) $(21, 10, -14)$

d) $(-5, -3, 6)$ e) $(-14, -21, 24)$ f) $(3, -2, -3)$

AL 221 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x-y-3z=2 \\ x+4y+3z=1 \\ -3x-2y+z=-3. \end{cases}$$

Care din următoarele relaţii este verificată de soluţiile sistemului?

a) $x^2-y^2-2z=1$ b) $x+y+z=3$ c) $x^2+y-z^2=-1$

d) $x+y^2-z^2=1$ e) $x^2+y^2+z^2=1$ f) $x^2+y+z^2=4z$.

AL 222 Soluţia sistemului $(A-9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, este $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice valori posibile ale lui x_1, x_2 şi x_3.

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 223 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}^* \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui a pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}_+^*$ e) $\mathbb{Q}^*$ f) $\{-1\}$

AL 224 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m-1)\,z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1 \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \dfrac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

AL 225 Fie sistemul

$$\begin{cases} x+2y-z=1+a \\ -x+y-z=a \\ 2x+y=1, \quad a\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui a pentru care soluţia sistemului verifică relaţia $3x+3y-z=0$.

a) $\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 226 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x+y+mz+4t=p \\ 2x+3y+z+6t=1 \\ -x-2y+3z+nt=2, \quad m,n,p\in\mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 227 Să se determine acele soluţii (x,y,z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

pentru care $x^2+y^2+z^2=1$.

a) $(0,1,0),\ \left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},\frac{10}{13}\right)$ b) $(1,0,0),\ \left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right)$

c) $\left(\frac{12}{13},\frac{7}{13},-\frac{3}{13}\right),\ (0,0,-1)$ d) $(0,0,1),\ \left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right)$

e) $(0,0,1),\ \left(-\frac{12}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right),\ (0,0,1)$

AL 228 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $-\dfrac{1}{10}$ b) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{10}\right\}$

d) $\dfrac{1}{10}$ e) $-\dfrac{1}{20}$ f) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{20}\right\}$

AL 229 Fie sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

şi (x_0, y_0, z_0) o soluţie nebanală a sistemului. Să se determine valoarea raportului

$$\frac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}.$$

a) $\dfrac{23}{5}$ b) 1 c) $\dfrac{7}{5}$ d) 2 e) -1 f) $-\dfrac{7}{5}$

AL 230 Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluţie.

a) $a = b = c$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ c) $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$

d) $\nexists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ e) $a = b \neq c$ f) $a \neq b = c$

AL 231 Să se determine mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \\ m^2 x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită şi soluţii diferite de soluţia banală.

a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\left\{ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\}$ c) $\{\pm 1\}$

d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f) $\left\{ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$

AL 232 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$

d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

AL 233 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a + 3) = 0\ , \ a \neq 0. \end{cases}$$

Să se determine parametrul real a astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat. Pentru această valoare, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este soluţia sistemului.

a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 234 Pentru care din următoarele cazuri de mai jos, sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b, \;\; a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este incompatibil?

a) $a - b + c = 0$ b) $a, b, c \in \emptyset$ c) $a + b - c = 0$

d) $a + b - c \neq 0$ e) $a + b + c = 0$ f) $a + b + c \neq 0$

AL 235 Fie sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Care dintre următoarele propoziţii matematice este adevărată?

a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat

b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil

c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat

d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat

e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil

f) Toate afirmaţiile sunt false

AL 236 Fie (z_1, z_2, z_3) o soluţie nebanală a sistemului omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

care verifică şi condiţia suplimentară

$$z_1 + 2^2 z_2 + 3^2 z_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Să se determine $| z_1 | + | z_2 | + | z_3 |$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 237 Fie (x_t, y_t, z_t) soluţia sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{t+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^t - \dfrac{1}{2^t} \\ 2x + y + z = 1 + 2^t + \dfrac{1}{2^t}, \ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se determine

$$\lim_{t\to\infty} x_t y_t z_t.$$

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 238 Pe $\mathbb{Q}^*$ se defineşte operaţia „ $*$ “ care satisface următoarele proprietăţi:

(*i*) $(x * y) \cdot (z * t) = (x \cdot z) * (y \cdot t)$, pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{Q}^*$;

(*ii*) $x * x = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$;

(*iii*) $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$,

unde „ $\cdot$ “ este operaţia de înmulţire în $\mathbb{Q}^*$. Să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{2017} \left[\frac{1}{k} * (k+1) \right].$$

a) $\dfrac{2016}{2017}$ b) $\dfrac{1}{2017}$ c) 2017 d) $\dfrac{1}{2018}$ e) 2018 f) $\dfrac{2017}{2018}$

AL 239 Pe mulţimea $(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = \frac{xy}{x+y}, \quad x, y \in (0, +\infty).$$

Să se calculeze

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{50}\ .$$

a) $\dfrac{1}{1225}$ b) $\dfrac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\dfrac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\dfrac{1}{1300}$

AL 240 Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = (x-a)^2 (y-a) + a, \ \ a \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x \circ x = x$.

a) $\{a, a-1\}$ b) $\{a, a+1\}$ c) $\{a-1, a, a+1\}$
d) $\{-a, 1-a\}$ e) $\{-a, -a-1\}$ f) $\{-a, 1-a, -a-1\}$

AL 241 Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy + a(x+y) + a^2 - a, \quad a \in \mathbb{N}^*$$

şi mulţimea

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2^x * 2^y = a^2 + 2a + 2\}.$$

Să se determine

$$\sum_{(x,y) \in M} (x+y).$$

a) 1 b) -1 c) 2 d) 0 e) -2 f) 3

AL 242 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v), $u, v > 0$, este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ x \circ 2 + y \circ 3 = 2\sqrt{13} \end{cases},$$

să se determine $u + v$.

a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$.

AL 243 Se consideră $\mathbb{R}$ cu legea de compoziţie $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operaţia de înmulţire a matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia $f : \mathbb{R} \to M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relaţia $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, să se determine mulţimea valorilor lui a.

a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 244 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \{x \mid \exists\ a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\}.$$

Să se determine cea mai mare (în sensul relaţiei de incluziune) mulţime $A \subset \mathbb{Z}$ pentru care $\mathcal{M}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor întregi.

a) $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ b) $\mathbb{Z}^*$ c) $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{N}^*$ f) $\mathbb{Z} \setminus \{3\}$

AL 245 Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua $\det A$, ştiind că şi $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 246 Fie mulţimea

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix},\ \ x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Să se determine valorile parametrilor $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $(\mathcal{M},\cdot)$ să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\cdot)$.

a) $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=1$ b) $\alpha=\beta,\ \gamma=0$ c) $\beta=2\alpha,\ \gamma=1$

d) $\alpha=2\beta\ ,\ \gamma=-1$ e) $\alpha=2\beta,\ \gamma=1$ f) $\alpha=-\beta,\ \gamma=1$

AL 247 Pe mulţimea

$$\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\ \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziţie $A*B=A\cdot B+aA+bB+6I_2$, unde $a,b\in\mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă şi comutativă?

a) $a\in\{-3,2\},\ b=a$ b) $a\in\{-2,3\},\ b=a$ c) $a\in\{-1,2\},\ b=a$

d) $a=-2,\ b=3$ e) $a=-1,\ b=2$ f) $a=-3,\ b=2$

AL 248 Să se determine o relaţie între parametrii reali a şi b astfel încât legea de compoziţie $x*y=xy+ax+ay+b$ de pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

a) $a^2=a+b$ b) $a=a^2+b$ c) $b^2+a=a^2$

d) $a+a^2=b$ e) $2a=b+a^2$ f) $2b+a=a^2$

AL 249 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x*y=xy+2x+2y+k.$$

Să se găsească $k\in\mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$x*x=-2.$$

a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1,-1\}$ d) $\{2,-2\}$ e) $\{1,-2\}$ f) $\{-2\}$

AL 250 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i,\ -1 + i$ b) $e = 1 + i,\ i$ c) $e = 1,\ 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ i$ e) $e = -i,\ 2 - i$ f) $e = 2 + i,\ 1 - i$

AL 251 Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 252 Pe mulţimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z} + 1$ se defineşte operaţia

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale monoidului $(2\mathbb{Z} + 1, *)$.

a) $\{-3, 1\}$ b) $2\mathbb{N} + 1$

c) $2\mathbb{Z} + 1$ d) $\{-5, -3, 1, 3\}$

e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

AL 253 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{M}, \cdot)$, unde "$\cdot$" reprezintă operaţia de înmulţire a matricelor.

a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 254 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + Im(z_1) Im(z_2).$$

Să se determine elementele inversabile în raport cu această lege.

a) $\{z \in \mathbb{C},\, Re(z) = 0\}$ b) $\{z \in \mathbb{C},\, Re(z) \neq 0\}$

c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C}^*$

e) $\{z \in \mathbb{C},\, Im(z) = 0\}$ f) $\{z \in \mathbb{C},\, Im(z) < 0\}$

AL 255 Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

şi mulţimea $\mathcal{M} = \{xA + B \mid x \in \mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile din $\mathcal{M}$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

a) $\emptyset$ b) $\mathcal{M} \setminus \left\{\frac{1}{2}A + B\right\}$ c) $\mathcal{M} \setminus \{I_2\}$

d) $\mathcal{M} \setminus \{-A + B\}$ e) $\mathcal{M}$ f) $\mathcal{M} \setminus \{2A + B\}$

AL 256 Fie $a \geq 0$ şi $M = (a, +\infty) \setminus \{a + 1\}$ pe care se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = (x - a)^{\ln \sqrt[k]{y-a}} + a, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$.

a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)} + a}$ b) $\dfrac{e^{k^2}}{x - a} + a$

c) $\dfrac{e^{k^2}}{x - a}$ d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$

e) $e^{k^2} - x - 2a$ f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$

AL 257 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se introduce legea de compoziţie

$$x * y = a^{\sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b}},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, n impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziţie.

a) $\dfrac{b^{2^n}}{x}$ b) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}}$

c) $a^{\sqrt[n]{2\log_a^n b - \log_a^n x}}$ d) $\dfrac{b^2}{x}$

e) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}}$ f) $\dfrac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

AL 258 Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile faţă de legea $*$ din mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $(b, 1)$, $b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0)$, $b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1)$, $b \in \mathbb{Z}$

d) $(\pm 1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$

AL 259 Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, care are toate rădăcinile reale. Ştiind că mulţimea tuturor acestor soluţii este un grup faţă de legea

$$x * y = x + y + 3, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

să se determine $a + b + c$.

a) -9 b) -27 c) 63 d) 27 e) 54 f) 28

AL 260 Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul al treilea. Ştiind că mulţimea rădăcinilor sale $\{x_1, x_2, x_3\}$ este grup de ordinul trei în raport cu înmulţirea numerelor complexe, să se calculeze $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

a) 0 b) -1 c) $-i$ d) 3 e) $3i$ f) 1

AL 261 Fie $f = X^4 + \widehat{a}X^3 + \widehat{b}X^2 + \widehat{c}X + \widehat{d}$ un polinom din $\mathbb{Z}_8[X]$. Să se calculeze $\widehat{a}+\widehat{b}+\widehat{c}+\widehat{d}$ ştiind că f are patru rădăcini distincte ce formează grup faţă de înmulţirea din $\mathbb{Z}_8$.

a) $\widehat{0}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{5}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{2}$ f) $\widehat{7}$

AL 262 Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 263 Fie mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ aX & 1 & 0 \\ na^2X^2 & aX & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

inclusă în mulţimea matricelor pătratice de ordinul 3 cu elemente din mulţimea polinoamelor de grad cel mult 2 având coeficienţi reali. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real n astfel încât $(G, \cdot)$ să fie grup.

a) $\{0\}$ b) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ c) $\{1\}$ d) $\mathbb{R}$ e) $\emptyset$ f) $\mathbb{R}^*$

AL 264 Să se determine numerele reale a şi b astfel încât mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x + ay & y - bx \\ y + bx & x - ay \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 - 4y^2 = 1 \right\}$$

să formeze un grup în raport cu înmulţirea matricelor.

a) $b = \sqrt{3}$, $a = 0$ b) $b = 0$, $a = \pm\sqrt{3}$

c) $b = \pm 1$, $a = \sqrt{3}$ d) $b = 0$, $a = \pm 1$

e) $b = 1$, $a = \sqrt{3}$ f) $b = 0$, $a = 1$

AL 265 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dat şi mulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C},\ A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are grupul G în raport cu înmulţirea matricelor?

a) $(n-1)^2$ b) n c) $n-1$

d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) n^2

AL 266 Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru. Ştiind că există $x, y \in G$ cu proprietăţile $x^2 = e$ şi $yx = xy^2$, să se determine $y^{2018}x$.

a) e b) y c) y^{2017} d) x^{2019} e) xy f) $y^{1009}x$

AL 267 Ştiind că o parte din tabla operaţiei unui grup $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ este

$*$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y		
b	b					
x		z				a
y						
z						

,

să se determine $y * z$.

a) e b) x c) a d) z e) b f) y

AL 268 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G = \left\{ M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ştiind că funcţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ şi $(G, \cdot)$, unde relaţia "$*$" este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar "$\cdot$" este înmulţirea matricelor, să se determine valoarea parametrului a.

a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25.

AL 269 Fie $\mathbb{R}^*$ dotată cu legea de compoziţie definită prin $a*b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulţirea matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia

$$f : \mathbb{R}^* \to M, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ şi $(M, \cdot)$, să se determine mulţimea valorilor lui k.

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 270 Fie $G = (1, +\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia " $*$ " definită prin

$$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f : (0, +\infty) \to G, \quad f(x) = \sqrt{ax + b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

a) $a = 0,\ b = 2$ b) $a = 1,\ b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0,\ b = 1$

d) $a = 0,\ b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1,\ b = 2$ f) $a = b = 1$

AL 271 Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ şi } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ şi $(\mathbb{Z}, \top)$.

a) $(1, -10), (-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$

d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0), (-1, -10)$ f) $(1, 0)$

AL 272 Fie mulţimea

$$M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a \in (0,\infty) \right\}.$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

a) $(M,\cdot)$ nu este grup;

b) $(M,\cdot)$ este grup comutativ izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$;

c) $(M,\cdot)$ este grup comutativ dar nu este izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$;

d) M nu este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricilor;

e) Există $a \in (0,\infty)$ astfel încât $A(a)$ să fie singulară;

f) $I_3 \notin M$.

a) a b) b c) c d) d e) e f) f

AL 273 Să se determine toate automorfismele f ale grupului $(\mathbb{Z},+)$.

a) $f(x) = nx,\ \forall\ n,x \in \mathbb{Z}$ b) $f(x) = \pm x,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) = 2x,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$ d) $f(x) = ax + b,\ a,b,x \in \mathbb{Z}$

e) $f(x) = \pm 2x,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$ f) $f(x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{Z}$

AL 274 Să se determine numărul tuturor morfismelor de grupuri

$$f : (\mathbb{Z}_6,+) \to (\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$$

astfel încât $f(\widehat{2}) = \widehat{3}$.

a) 0 b) 1 c) 2

d) 3 e) 4 f) o infinitate

AL 275 Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $f : G \to G$, $f(x) = x^{2019}$ un endomorfism surjectiv. Să se precizeze care din următoarele relaţii este adevărată pentru orice $x, y \in G$.

a) $x = y$ b) $xy = y^{-1}x^{-1}$ c) $xy = yx$

d) $x^{2018}y = yx^{2018}$ e) $x^{2017}y = yx^{2017}$ f) $x^{1009}y = yx^{1009}$

AL 276 Fie $(G, \cdot)$ un grup pentru care există $f : G \to G$ astfel încât

$$yf(x^2) = f(y^{-1}xyf(xy))$$

pentru orice $x, y \in G$. Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

a) f nu este injectivă b) f nu este bijectivă

c) f este surjectivă d) $f(xy) = xy^2$, $\forall\ x, y \in G$

e) $f(xy) = y^2x$, $\forall\ x, y \in G$ f) $f(xy) = y^{-1}x$, $\forall\ x, y \in G$

AL 277 Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru, $f : G \to G$ un endomorfism pentru care există $a, b \in G$ astfel încât $f^2(a) = ab$ şi $f^{2018}(a) = e$, iar

$$g(x) = xf^2(x)f^4(x)f^6(x)\dots f^{2016}(x),$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{de\ n-ori}$. Atunci $g(b)$ este:

a) a b) b c) a^{-1} d) e e) b^{2018} f) a^{2018}

AL 278 Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5$, $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $a \neq \widehat{0}$. Să se găsească toate funcţiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f^4_{a,b} = f^{2018}_{\widehat{2},\widehat{0}} \circ f^{2020}_{\widehat{2},\widehat{2}} \circ f^{2022}_{\widehat{2},\widehat{4}},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{de\ n-ori}$.

a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}$; $f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$

AL 279 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră operaţiile algebrice

$$x \perp y = x + y - i \quad \text{şi} \quad x \top y = xy + ax + by + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$ pentru care operaţia "$\top$" este distributivă în raport cu operaţia "$\perp$".

a) $a = i$, $b = c = -i - 1$ b) $a = b = i$, $c = -i - 1$

c) $a = -i$, $b = i$, $c = i - 1$ d) $a = -i$, $b = c = i - 1$

e) $a = -i$, $b = i$, $c = -i - 1$ f) $a = b = -i$, $c = i - 1$

AL 280 Fie legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

a) $e_\perp = \widehat{10}$, $e_\top = \widehat{3}$ b) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{3}$ c) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{6}$

d) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{4}$ e) $e_\perp = \widehat{4}$, $e_\top = \widehat{3}$ f) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{11}$

AL 281 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

a) $\mathbb{Z}[i]$ b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ c) $\{1, i\}$

d) $\{\pm 1, \pm i\}$ e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ f) $\emptyset$

AL 282 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 17$ b) $a = b = 1$, $c = 56$ c) $a = b = c = 7$

d) $a = b = 1$, $c = 7$ e) $a = b = c = 1$ f) $a = b = c = -1$

AL 283 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x * y = x + y - 2 \text{ şi } x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = -2$ f) $a = -1, b = 2$

AL 284 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar cu proprietatea $x^2 = 3x$ pentru orice $x \in A$. Atunci $2016x$ este:

a) $2x$ b) 1 c) x d) $-x$ e) $-3x$ f) $3x$

AL 285 Fie $\mathcal{A}$ este un inel şi $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $f(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2$. Să se determine

$$f(1 + x, 1 + y) - f(1 + x, y) - f(x, 1 + y) + f(x, y).$$

a) 0 b) xy c) yx

d) $xy - yx$ e) $yx - xy$ f) $xy + yx$

AL 286 Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$ c) $a = 0$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ f) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$

AL 287 Fie mulţimea

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x+ay & by \\ cy & x-ay \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se determine o relaţie între parametrii reali a, b, c astfel încât

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{K} \quad f(x+yi) = \begin{pmatrix} x+ay & by \\ cy & x-ay \end{pmatrix}$$

să fie izomorfism între corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ şi corpul $(\mathcal{K}, +, \cdot)$.

a) $2a + bc = 1$ b) $a^2 + bc = 1$ c) $2a = bc - 1$

d) $a^2 + bc + 1 = 0$ e) $a^2 = bc - 1$ f) $a^2 - bc = 1$

AL 288 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{11}$ cu soluţia (x_0, y_0). Dacă y_0' este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my_0' = x_0$.

a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

AL 289 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluţia $(\widehat{3}, \widehat{2})$ şi să se specifice numărul total al soluţiilor.

a) $a = \widehat{2}$, 5 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii b) $a = \widehat{4}$, 7 soluţii; $a = \widehat{6}$, 3 soluţii

c) $a = \widehat{1}$, 3 soluţii; $a = \widehat{5}$, 8 soluţii d) $a = \widehat{3}$, 8 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii

e) $a = \widehat{1}$, 5 soluţii; $a = \widehat{5}$, 3 soluţii f) $a = \widehat{3}$, 6 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii

AL 290 În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuaţia

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 291 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluţiile ecuaţiei $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

a) $A(\widehat{7})$ b) $A(\widehat{3})$

c) $A(\widehat{2})$, $A(\widehat{5})$, $A(\widehat{8})$ d) $A(\widehat{1})$, $A(\widehat{4})$

e) $A(\widehat{0})$ f) nu are soluţii

AL 292 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

AL 293 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

a) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

b) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

c) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

d) $m = \widehat{2}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

e) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

f) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

AL 294 Fie polinomul $P = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Să se determine polinomul Q astfel încât să fie îndeplinită condiţia

$$P(x) = Q(x) + 2Q'(x) + 3Q''(x) + 4Q'''(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$

b) $4X^3 - 21X^2 + 2X + 1$

c) $4X^3 - 21X^2 + 14X + 3$

d) $4X^3 - 7X^2 + 21X + 12$

e) $4X^3 + 2X^2 + 3X + 1$

f) $-4X^3 + 12X^2 + 13X - 1$

AL 295 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a + x & b + x & c + x \\ a^2 + x^2 & b^2 + x^2 & c^2 + x^2 \\ a^3 + x^3 & b^3 + x^3 & c^3 + x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$

b) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$

c) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

d) $f'(x) = (b-a)(c-a)(b-c)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

e) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

f) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

AL 296 Fie polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - X - 5$ şi $g = X^2 + 1$. Să se determine câtul c şi restul r ale împărţirii lui f la g.

a) $c = X + 2,\ r = 0$
b) $c = X^2 + 1,\ r = X + 2$
c) $c = X + 2,\ r = -2X - 7$
d) $c = -2X - 7,\ r = X + 2$
e) $c = X + 1,\ r = -2$
f) $c = X - 1,\ r = 0$

AL 297 Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărţirii lui f la $X^2 - X - 2$.

a) $a = 1,\ b = 4,\ X + 1$
b) $a = -1,\ b = 4,\ 2X + 2$
c) $a = 1,\ b = 4,\ 2X + 2$
d) $a = -1,\ b = 2,\ 2X + 1$
e) $a = 1,\ b = 2,\ X + 2$
f) $a = -1,\ b = 4,\ X - 1$

AL 298 Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ şi restul împărţirii lui f la $X + 1$ să fie 3.

a) $a = 3,\ b = 2,\ c = 5$
b) $a, b, c \in \emptyset$
c) $a = -2,\ b = 3,\ c = 5$
d) $a = 2,\ b = 3,\ c = 5$
e) $a = 3,\ b = 2,\ c = -5$
f) $b = 3,\ c = 2a + 1,\ a \in \mathbb{R}$

AL 299 Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

a) $a, b, c \in \emptyset$
b) $a, b, c \in \mathbb{R}$
c) $a = b = c = 0$
d) $a = c = 1,\ b = -1$
e) $a = c = -1,\ b = 1$
f) $a = 1,\ b = -5,\ c = 4$

AL 300 Să se determine polinomul cu coeficienţi raţionali de grad minim care împărţit la $X^2 + 2X - 3$ dă restul $3X + 11$ şi împărţit la $X^2 - 4X + 5$ dă restul $7X - 3$.

a) $-X^3 - 4X + 12$
b) $X^3 + 2X - 17$
c) $-X^3 + 4X + 11$
d) $X^3 - 4X + 17$
e) $X^3 + 3X + 15$
f) $-X^3 + 17X - 5$

AL 301 Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)\,(X - 2016) \text{ şi } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) X
b) 0
c) $X - 2000$
d) $X + 2014$
e) $2016 \cdot 2014$
f) $X - 2016$

AL 302 Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât polinomul $f = (X - 1)^7 + a(X - 1)^4 + bX + c$ să se dividă cu $(X + 1)^3$.

a) $a = 28,\ b = 448,\ c = 128$
b) $a = 56,\ b = 448,\ c = 576$
c) $a = 56,\ b = 320,\ c = 81$
d) $a = 28,\ b = 448,\ c = 192$
e) $a = 84,\ b = 320,\ c = 81$
f) $a = 28,\ b = 320,\ c = 128$

AL 303 Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul $X^9 + mX^2 + n$ să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

a) $m = 0,\ n = 0$ b) $m = 0,\ n = -1$ c) $m = -1,\ n = 0$
d) $m = -1,\ n = -1$ e) $m = 1,\ n = 0$ f) $m = 0,\ n = 1$

AL 304 Să se determine restul împărţirii polinomului X^n la polinomul $X^2 + 2X - 3$.

a) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X + \dfrac{3+(-3)^n}{4}$ b) $\dfrac{1}{4}[(1+(-3)^n)X + 3 + (-3)^n]$
c) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X + \dfrac{3-(-3)^n}{4}$ d) $\dfrac{2-(-3)^n}{4}X + \dfrac{3+(-3)^n}{4}$
e) $\dfrac{1-(-3)^n}{4}X + \dfrac{3+3^n}{4}$ f) $\dfrac{1}{4}[(1+3^n)X + 3 + (-3)^n]$

AL 305 Să se determine restul împărţirii polinomului $(X^3 + X + 1)^{19}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

a) -1 b) X c) $X + 1$ d) 0 e) $X - 1$ f) 1

AL 306 Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0,$$

ştiind că are rădăcini opuse.

a) $a = -3,\ \{1, 2, \pm\sqrt{2}i\}$ b) $a = -1,\ \{\pm 1, \pm 2\}$
c) $a = 2,\ \{1, 2, \pm 2i\}$ d) $a = -2,\ \{1 \pm i, \pm 1\}$
e) $a = -1,\ \{\pm 2, \pm i\}$ f) $a = -3,\ \{\pm 1, \pm\sqrt{2}i\}$

AL 307 Fie polinomul $f = X^4 + a^2X^3 - 7X^2 + aX + 6$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left\{-1, \dfrac{8}{9}\right\}$

d) $\left\{-1, 0, \dfrac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1, 0\}$ f) $\{-1\}$

AL 308 Fie polinomul $f = X^3+X^2-2X-2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

a) $(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ b) $(X-1)(X^2+2)$

c) $(X+1)(X^2-2)$ d) $(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

e) $(X+1)(X-2)(X+2)$ f) $(X+1)(X^2+2)$

AL 309 Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$

c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})^2(X+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$

e) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$ f) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

AL 310 Fie polinomul $f = (1-2X)^{2017} + (3X-2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 311 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluţia $1+i$ şi să se găsească celelalte soluţii.

a) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,-6\}$ b) $a=-3$, $b=6$, $\{1-i,1+i,-1\}$
c) $a=12$, $b=-6$, $\{1-i,1,12\}$ d) $a=6$, $b=-12$, $\{1+i,-1,-3\}$
e) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,6\}$ f) $a=4$, $b=6$, $\{1+i,1,6\}$

AL 312 Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Ştiind că

$$xP(x-1)=(x-3)P(x),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

AL 313 Fie polinomul $P=X^3+mX^2+nX-a^3$, unde $m,n\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^*$. Ştiind că $P(a-x)+P(a+x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

a) 0 b) a c) $(2017-a)^3$ d) 2017^3 e) a^3 f) 2017

AL 314 Polinoamele cu coeficienţi reali aX^2+bX+c, aX^3+bX^2+bX+a şi aX^3+cX^2+cX+a, $a\neq 0$, admit o rădăcină comună dacă şi numai dacă:

a) $a,b,c\in\mathbb{R}$ b) $a+b+c=0$, $b\neq c$
c) $a-b+c=0$, $b\neq c$ d) $a+b-c=0$
e) $-a+b+c=0$ f) $-a+b+c=0$, $a\neq b$.

AL 315 Fie polinoamele $P=X^3-6X^2+11X-6$ şi $Q=aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei $P(Q(x))=0$.

a) 0 b) $\dfrac{a}{b}$ c) $\dfrac{6-3b}{a}$ d) $\dfrac{b}{a}$ e) $\dfrac{1-b}{a}$ f) 1

AL 316 Fie polinoamele P şi Q cu proprietatea $P(x)=Q(x)+Q(1-x)$. Ştiind că P are coeficienţi naturali şi $P(0)=0$, să se determine $P(P(3))$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 317 Fie polinoamele P şi $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1-x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Ştiind că P are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 şi rădăcinile -1 şi 0, să se determine $P(3)$.

a) 60 b) 0 c) 24 d) -24 e) -60 f) 1

AL 318 Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărţirii lui P la $X - 7$ este 3. Să se determine restul împărţirii lui P la $X^2 - 7X$.

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) 0 f) $-\frac{3}{7}$

AL 319 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n, ştiind că restul împărţirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3 - \sqrt{3}$.

a) $m = 0$, $n = 1$ b) $m = 1$, $n = 1$ c) $m = 1$, $n = 2$

d) $m = 2$, $n = 1$ e) $m = 2$, $n = 2$ f) $m = 1$, $n = 0$

AL 320 Ştiind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 321 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} X^{k-1}, \quad i = \overline{1,3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a) -1 b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$

c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) 0

e) 1 f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

AL 322 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde x_i, $i = \overline{1,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 11 e) -11 f) 2

AL 323 Fie ecuaţia $x^3 - ax + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, cu soluţiile x_1, x_2, x_3. Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-a^2$ c) a^2 d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

AL 324 Ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) 3 c) -17 d) $\dfrac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 325 Se consideră ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluţiile x_1, x_2, x_3 şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2.

a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 326 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 - b_1 i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 - b_2 i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 - b_3 i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 + \alpha_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,3}$.

a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1 b_2 c_3$

c) 0 d) 1

e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)(b_3 - c_3)$

AL 327 Fie $f = X + a$ şi $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

a) $\dfrac{5}{2}$ b) 0 c) $-\dfrac{1}{4}$ d) $-(a+b+c)^2$ e) 1 f) abc

AL 328 Suma soluţiilor comune ale ecuaţiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1 + \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 329 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:
(i) $P + 1$ este divizibil cu $(X-1)^3$;
(ii) $P - 1$ este divizibil cu $(X+1)^3$.
Să se calculeze $P(0)$.

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 330 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie injectivă. Să se determine suma coeficienţilor polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia

$$-2x + 4 + 5f(x+2) = 4f(3x-2) + f(2x - 7P(x-1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 331 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, atunci ele verifică relaţia:

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$ b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$

c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$ d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$

e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$ f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$.

AL 332 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine mulţimea valorilor parametrului m pentru care are loc relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\ .$$

a) $\emptyset$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

AL 333 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 şi x_4. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} + \frac{1}{2-x_4}\ .$$

a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 334 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2.

a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$

c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$

e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 335 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu raţia număr natural.

a) $a = 5$, $b = 67$, $c = 100$ b) $a = -15$, $b = 70$, $c = -120$

c) $a = 15$, $b = 70$, $c = 120$ d) $a = -5$, $b = 67$, $c = 100$

e) $a = 15$, $b = -70$, $c = 120$ f) $a = 5$, $b = -67$, $c = -100$

AL 336 Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condiţiile $x_1^3 = x_2$ şi $x_2^3 = x_1$?

a) niciunul b) 100 c) 4

d) 1000 e) o infinitate f) unul

AL 337 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

a) 0 b) $9c - a^2 + 2ab$ c) $2ab - a^3 - 9c$

d) $4ab - 9c - a^3$ e) $9c + a^2 - 4ab$ f) $c - a + bc$

AL 338 Împărţind polinomul X^8 la $X - 1$ se obţine câtul q_1 şi restul r_1, împărţind polinomul q_1 la $X - 1$ se obţine câtul q_2 şi restul r_2, iar continuând procedeul şi definind recursiv polinoamele q_{k+1} şi restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul şi restul împărţirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 7\}$, să se determine r_5.

a) 1 b) 2 c) 7 d) 70 e) 100 f) 700

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120° - \cos^2 30°$.

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Se consideră expresia $E(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

a) 1 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) 0 f) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2\cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{12}$ f) $\frac{5\pi}{12}$.

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$ şi $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \dfrac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$ este:

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\dfrac{2}{3}$ f) $-\dfrac{1}{3}$.

TG 7 Se consideră următoarele propoziţii matematice:

(i) $\sin 144° = \cos 54°$; (ii) $\cos 2018° = -\cos 38°$;

(iii) $\operatorname{tg}^2 15° = \dfrac{1 - \cos 30°}{1 + \cos 30°}$; (iv) $\sin^2 5° + \sin^2 45° + \sin^2 85° = \dfrac{3}{2}$;

(v) $(\operatorname{ctg} 10° - \operatorname{ctg} 80°) \cos 70° = 2 \sin 110°$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt false?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 8 Care dintre numerele:

$a = \cos 55°$, $b = \sin 155°$, $c = \sin 15°$, $d = \cos 170°$, $e = \cos 100°$, $f = \sin 106°$

este cel mai aproape de zero?

a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 9 Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ astfel încât $\cos a + \cos b = 0$.

a) $\operatorname{tg}(a + b) + 1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 10 Dacă $\sin a = \dfrac{3}{5}$, $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos \dfrac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $-\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

TG 11 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 12 Valoarea expresiei $E(x)=\frac{3+\cos 2x}{2+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{3-\cos 2x}{2+\operatorname{ctg}^2 x}$, $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ este:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4.

TG 13 Să se calculeze $\cos\frac{3a}{2}$, ştiind că $\sin\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 14 Să se determine partea întreagă a numărului $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

a) -4 b) -3 c) -1 d) 3 e) 4 f) 5

TG 15 Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$. Să se calculeze $\sin x$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 16 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\ ,\quad x\in\mathbb{R}.$$

a) 2 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 17 Se consideră expresia

$$E(x) = (1 + \mathrm{tg}^2 x)\cos^2 x - (1 + \mathrm{ctg}^2 x)\sin^2 x + x,$$

unde $x \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Să se calculeze $E\left(\frac{\pi}{4}\right) + E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

a) 0 b) $1 + \pi$ c) $\pi - 1$ d) π e) $\pi + 2$ f) $\frac{\pi}{2}$

TG 18 Dacă $x = \frac{\pi}{8}$, atunci valoarea expresiei

$$E(x) = \frac{\cos 2x + 4\cos x + 3}{1 + \cos x} + \frac{\cos 2x - 4\cos x + 3}{1 - \cos x}$$

este:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 4 e) -1 f) 0.

TG 19 Să se calculeze $\sin^8 \frac{\pi}{8} + \cos^8 \frac{\pi}{8}$.

a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{32}$ e) $\frac{7}{16}$ f) $\frac{19}{32}$

TG 20 Să se calculeze $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sqrt{3}$

TG 21 Fie $E(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8.

TG 22 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

TG 23 Să se calculeze $\cos 8x$ ştiind că $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

TG 24 Să se calculeze $\cos(x + 2y)$ ştiind că $x = \frac{4\pi}{3}$ şi $\operatorname{tg} y = 2 - \sqrt{3}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 25 Fie a şi b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ şi } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a - b)$.

a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

TG 26 Fie funcţia $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

TG 27 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 28 Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 10$ şi $BC = 2\sqrt{5}$. Dacă $DE \perp AC$, $E \in AB$ şi $DE \cap AC = \{Q\}$, să se calculeze AQ.

a) 2 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

TG 29 Într-un triunghi dreptunghic ABC au loc relaţiile $\cos B > \cos C$ şi $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 6$. Să se calculeze $\sin B - \sin C$.

a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

TG 30 Fie triunghiul ABC cu $AB = 4$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30°$ astfel încât latura (BC) are cea mai mică valoare posibilă. Dacă punctul P este egal depărtat de laturile triunghiului, să se calculeze AP.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 1

TG 31 Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic în care între catete există relaţia $c - b = 1$, iar $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 30°$, este:

a) $\sqrt{3} + 1$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 1$ e) $3 + \sqrt{3}$ f) $2\sqrt{3}$.

TG 32 Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c cu $b = 5$, $c = 8$ şi $\cos A = \frac{1}{4}$. Să se afle a.

a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 33 Fie triunghiul PQR cu $PQ = 4$, $QR = 5$ şi $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

a) $\dfrac{29}{35}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{4}{7}$ e) $\dfrac{5}{7}$ f) $-\dfrac{4}{7}$

TG 34 În triunghiul ABC, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

TG 35 Aria triunghiului ABC este $10\ m^2$. Să se determine AB ştiind că $AC = 4\ m$ şi unghiul $\widehat{BAC}$ are $30°$.

a) $\dfrac{10}{3}\ m$ b) $5\ m$ c) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ m$ d) $10\ m$ e) $20\ m$ f) $8\ m$

TG 36 Într-un cerc cu raza de $4\ cm$ se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul $\widehat{ABC}$ de $30°$. Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

a) $2\ cm$ b) $3\ cm$ c) $4\ cm$ d) $4\sqrt{3}\ cm$ e) $3\sqrt{3}\ cm$ f) $2\sqrt{3}\ cm$

TG 37 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ şi $\operatorname{tg} A = -\sqrt{2}$. Să se determine BC.

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 38 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$ şi punctul $P \in (BC)$ astfel încât $BP = 6$. Să se calculeze AP.

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 39 Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin C$.

a) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 40 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 şi un unghi de $60°$. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 41 Se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ şi $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC.

a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{20}{\sqrt{89 + 40\sqrt{3}}}$ f) 4

TG 42 În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

a) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{29\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{29\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{3\sqrt{29}}{5}$ e) $\frac{29\sqrt{5}}{45}$ f) $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

TG 43 Se consideră un triunghi cu proprietatea că lungimile laturilor sale sunt trei numere naturale consecutive şi unul din unghiuri are măsura egală cu dublul măsurii altui unghi. Atunci suma lungimilor laturilor sale este:

a) 15 b) 12 c) 18

d) 30 e) 45 f) nu există un astfel de triunghi.

TG 44 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ şi $m(\widehat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei $(AD), D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

a) $3 - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} - 6$ c) $\sqrt{6} - 2$
d) $3\sqrt{6} - 6$ e) $\sqrt{6} - 6$ f) $3\sqrt{6} - 3$

TG 45 Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul

$$\mathcal{P} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

şi măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 3, 4, 5. Să se afle aria triunghiului ABC .

a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + 3$ c) $\sqrt{3} + 3$
d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $6 + \sqrt{2}$

TG 46 Se consideră triunghiul ABC de laturi a, b, c, în care $m(\widehat{C}) = \dfrac{3\pi}{8}$, iar $m(\widehat{B}) = \dfrac{\pi}{8}$. Să se calculeze $E = 4\dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{b}{c}$.

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $\sqrt{2} + 3$ d) 4 e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $\sqrt{2} - 1$

TG 47 Triunghiul ABC are o latură de 9 cm şi perimetrul de 50 cm. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

a) 90 cm^2 b) 120 cm^2 c) $120\sqrt{2}$ cm^2
d) 200 cm^2 e) 400 cm^2 f) $300\sqrt{2}$ cm^2

TG 48 În triunghiul ABC, $AB = 2\sqrt{3}BC$ şi $m(\widehat{C}) = m(\widehat{A}) + 30°$. Să se calculeze $\sin B$.

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{11}{14}$ f) $\dfrac{2}{3}$

TG 49 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmaţiile:

(i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(ii)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$;

(iii) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(iv)* $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{FA}$;

(v) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$; *(vi)* $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Câte dintre afirmaţiile de mai sus sunt corecte?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 1

TG 50 Asupra unui corp punctiform acţionează două forţe cu aceeaşi origine, una de $8N$ şi cealaltă de $7N$. Să se calculeze mărimea forţei rezultante, ştiind că unghiul dintre cele două forţe este de $60°$.

a) $13N$ b) $\sqrt{41}N$ c) $\sqrt{111}N$

d) $15N$ e) $\sqrt{113 + 56\sqrt{3}}N$ f) $14N$

TG 51 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P şi Q împart latură (BC) în trei părţi egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 52 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ şi M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a+b$ este:

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

TG 53 În pătratul $ABCD$ cu latura de 6, punctele M şi N aparţin laturii (BC) astfel încât $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

a) 12 b) $4\sqrt{10}$ c) $\dfrac{25}{2}$ d) 13 e) $8\sqrt{3}$ f) $9\sqrt{2}$

TG 54 Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC} = \vec{i} + a\vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{5}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 1 f) 3

TG 55 Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ fie respectiv punctele D şi E astfel ca $AB = 3 \cdot AD$ şi $AC = 2 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care

$$k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4

TG 56 Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC, iar H ortocentrul său. Valoarea parametrului real k pentru care are loc egalitatea

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = k \cdot \overrightarrow{HG}$$

este:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 3 e) -1 f) -3.

TG 57 Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $M(1,1)$, $N(5,-1)$, $P(3,5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$
d) 30 e) $8\sqrt{5} + 12$ f) $6\sqrt{5} + 14$

TG 58 Fie triunghiul ABC cu $A(1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(5,-1)$ şi dreapta d de ecuaţie $x - y - 2 = 0$. Atunci:

a) $A \in d$ b) $d \perp BC$ c) $d \cap [AB] = \emptyset$

d) d este bisectoarea unghiului ABC e) $d \| BC$

f) niciunul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat.

TG 59 Fie punctele $A(1,1)$, $B(2,\frac{1}{2})$, $C(-1,-4)$, $D(\frac{5}{2},3)$, $P(a,b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $a \cdot b$ ştiind că punctele A, B, P, respectiv C, D, P sunt coliniare.

a) $\dfrac{28}{25}$ b) $\dfrac{10}{9}$ c) $\dfrac{21}{16}$ d) $\dfrac{11}{10}$ e) 1 f) 2

TG 60 Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) 6 b) 4 c) -6 d) -4 e) 3 f) -3

TG 61 Punctul $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, situat pe cercul trigonometric, se roteşte în sens trigonometric în jurul originii cu $90°$. Fie (a,b) coordonatele sale după rotire. Să se calculeze $\log_4 \left|\dfrac{a}{b}\right|$.

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{3}{4} - \log_2 3$ c) $\log_2 3 - \dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

TG 62 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(2,6)$. Să se calculeze distanţa de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecţie dintre dreapta suport a medianei din A cu dreapta suport a înălţimii din B.

a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

TG 63 Pornind din punctul A de coordonate $(6,-1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant faţă de dreapta $d : x+2y+2=0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanţa parcursă de P între cele două axe de coordonate.

a) $\frac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

TG 64 Fie $P(a,b)$ punctul egal depărtat de punctele $A(2,2+\sqrt{3})$, $B(-1,2)$, $C(0,-2-\sqrt{3})$. Atunci $a+b$ este egal cu:

a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{3}{2}$.

TG 65 Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $\frac{5}{3}$

TG 66 Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1 : 3x+4y-10=0$ şi $d_2 : y = mx+5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 67 Punctul $C(a,b)$ aparţine segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a-b$, ştiind că $A(0,4)$ şi $B(4,0)$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5}-8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2}-2$ f) $2\sqrt{5}-4$

TG 68 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) şi $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanţă de A se intersectează dreptele MN şi BC ?

a) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\dfrac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\dfrac{24}{5}$ e) $\dfrac{47}{10}$ f) 5

TG 69 Prin simetricul punctului $A(-2, 3)$ faţă de punctul $B(1, 2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 70 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}, \sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conţin cel puţin două din punctele considerate pot fi construite?

a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 71 Fie $O(0, 0)$, $A(-1, 4)$, $B(5, 1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui faţă de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB.

a) $\left(\dfrac{34}{15}, \dfrac{53}{15}\right)$ b) $(2, 3)$ c) $\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{18}{5}\right)$

d) $\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$ e) $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ f) $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

TG 72 Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă d se numeşte *bine plasat* dacă distanţa de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conţine dreapta $d : 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 73 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC, unde $A(1,1)$, $B(4,5)$ şi $C(5,4)$. Să se calculeze distanţa de la P la dreapta AB.

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10+\sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10-\sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 74 Fie punctele O, A, B, C astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$, unde $O(0,0)$, $A(4,1)$, $B(1,2)$. Prin C se duce o dreaptă ce face unghiul θ cu $(Ox$, unde $\cos\theta=\frac{1}{3}$, ce intersectează dreapta OA în punctul D. Să se calculeze aria triunghiului OCD.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1099-98\sqrt{2}}{254}$ c) $\frac{10\sqrt{2}-7}{2}$
d) $\frac{10\sqrt{2}-3}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{13}{2}$

TG 75 Fie $A(2,0), B(0,4)$ şi $C(5,a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $O(x_o,y_o)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, să se determine x_o-y_o.

a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 76 Fie punctele $A(1,3), B(3,5)$ şi $C(c,c)$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Dacă $\{P\}=CA\cap Ox$, $\{Q\}=CB\cap Oy$, să se determine coeficientul unghiular al dreptei PQ.

a) 1 b) 2 c) $-\frac{9}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) c

TG 77 Fie $A(3,0), B(0,3)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $x+y=8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $H(x_0,y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC, să se determine x_0+y_0.

a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 78 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x+1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$.

TG 79 Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului de vârfuri $A(4, 0), B(3, 0)$ şi $C(1, 4)$, se consideră respectiv punctele M, N, P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = 3\ , \quad \frac{NB}{NC} = 2\ , \quad \frac{PC}{PA} = \frac{1}{6}\ .$$

Să se studieze dacă dreptele AN, BP şi CM sunt concurente şi în caz afirmativ să se găsească coordonatele punctului de concurenţă.

a) nu sunt concurente b) $\left(\frac{19}{10}\ , \frac{12}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}\ , \ 4\right)$

d) $\left(\frac{10}{7}\ , \frac{24}{7}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}\ , \ 2\right)$ f) $\left(2\ , \frac{10}{3}\right)$

TG 80 Pe laturile AB şi BC ale triunghiului de vârfuri $A(3, 0), B(0, 4)$ şi $C(2, 5)$ se consideră respectiv punctele M, şi N astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = a, \quad \frac{NB}{NC} = b, \quad a, b > 0.$$

Pentru ce valori ale lui a şi b distanţele de la punctul I, de intersecţie a dreptelor AN şi CM, la cele trei laturi ale triunghiului ABC sunt egale între ele?

a) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 1$ b) $a = \dfrac{\sqrt{130}}{5}$, $b = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$ c) $a = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$

d) $a = 2$, $b = 2$ e) $a = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $b = 2$ f) $a = \sqrt{5}$, $b = 1$

TG 81 Simetrica dreptei $d : y = 2-x$ faţă de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P şi Q. Să se calculeze aria triunghiului POQ.

a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 82 Se consideră punctele $A(1,0)$ şi $C(3,1)$. Dacă (AC) este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor B şi D.

a) $\left(\frac{12}{5},-\frac{3}{5}\right),\left(\frac{7}{5},\frac{7}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ e) $\left(\frac{13}{5},-\frac{11}{20}\right),\left(\frac{8}{5},\frac{29}{20}\right)$ f) $(2,-1),(1,1)$

TG 83 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x+2y-9=0$, $d_2 : x-2y+3=0$ şi $d_3 : 2x+ay-3=0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0,0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C. Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$; 1 d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2}$; 1

TG 84 Se dau punctele $A(4,0)$ şi $B(0,2)$. Fie M, N proiecţiile punctului P, mijlocul segmentului (AB), pe Ox, respectiv Oy. Dacă Q este punctul de intersecţie al perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP, iar R punctul de intersecţie al perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP, să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 85 Prin punctul A de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : x+y-2=0 \quad \text{şi} \quad d_2 : 2x-y-4=0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se arate că raportul distanţelor de la P la d_1, respectiv la d_2 este constant şi să se determine valoarea lui.

a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 86 Mulţimea punctelor $P(x, y)$ aflate la distanţa r de punctul $Q(a, b)$ formează cercul de centru Q şi rază r. Să se determine ecuaţia ce descrie acest cerc.

a) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ b) $x^2+y^2-2ax-2ay-r^2=0$
c) $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ d) $x^2+y^2+a^2+b^2-r^2=0$
e) $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ f) $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2+b^2-r^2=0$

TG 87 Se consideră punctele $A(3, 0)$ şi $B(0, 4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanţa r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care din următoarele ecuaţii este verificată de toate punctele $P(x, y)$ ce se află la distanţa r de punctul Q.

a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ b) $x^2+y^2-x-y-\dfrac{1}{2}=0$
c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+3=0$ d) $x^2-y^2-2x-2y=0$
e) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ f) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

TG 88 Dintre toate punctele $P(x, y)$ ce verifică ecuaţia $(x-4)^2+(y-3)^2=4$, să se determine cel mai apropiat de $O(0, 0)$.

a) $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ c) $\left(\dfrac{8}{3}, 2\right)$
d) $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$ e) $(2, 1)$ f) $(3, 2)$

TG 89 Să se determine $m \in (0, \sqrt{10})$ pentru care există punctele N şi P situate în primul cadran astfel încât $ON = OP = \sqrt{10}$ şi $MNPQ$ este pătrat, unde $M(m, 0)$ şi $Q(0, m)$.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{2}$ e) 2 f) $\sqrt{5}$

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(simbol AM)

AM 1 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x-1}$.

a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 2 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 - \ln(x^2+1)}{x^2}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) -1 f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 3 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x - 2^x}{2^x - 4}$.

a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\dfrac{1}{\ln 2}$ e) $\ln\sqrt{2}$ f) e

AM 4 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(e^{12x}+1)}{\ln(1+e^{3x})}$.

a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) $+\infty$ f) 1

AM 5 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2-\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{4}$ d) 1 e) $\dfrac{1}{8}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 6 Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\pi}{x-\pi}\right)^x$.

a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^π d) π^2 e) π f) e

AM 7 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

a) 0 b) 1 c) e d) $\dfrac{1}{e}$ e) e^2 f) -1

AM 8 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)-\cos x+e^{x^2}}{10x^2}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$ f) $\dfrac{5}{4}$

AM 9 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 10 Utilizând, eventual, identitatea

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}\ ,$$

să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{2}$

AM 11 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{x}}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) $+\infty$ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 12 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} x^4\left(e^{\frac{1}{x^2+1}} - e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 13 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\frac{x}{4}\right]}{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 14 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x+1))$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 15 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $+\infty$ d) nu există e) 1 f) 2

AM 16 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^2+2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) nu există

AM 17 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x^3}{6}-\sin x\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) -1 b) $-\dfrac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 18 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(e^x+a)-x\right)(e^x+x)=1.$$

a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 19 Să se determine mulţimea tuturor valorilor posibile ale parametrului $a\geq 0$ pentru care limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{\sin x}}{x^a}$$

există şi este un număr real nenul.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2,+\infty)$ e) $(0,2)$ f) $\{0,3\}$

AM 20 Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x.$$

a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) $+\infty$

AM 21 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\dfrac{1}{e^2}$

AM 22 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) nu există c) 1 d) $+\infty$ e) 3 f) 2

AM 23 Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \{x\}(1-\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\dfrac{3}{2}$

AM 24 Fie funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) 0 c) -1 d) $\dfrac{1}{2}$ e) $+\infty$ f) nu există

AM 25 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) $+\infty$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

AM 26 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}\ .$$

a) 0 b) 1 c) $n(n+1)$

d) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ e) $n+1$ f) n

AM 27 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 28 Să se calculeze $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{11^x - \cos x}{11x}$.

a) $\ln 11$ b) $\ln \sqrt[11]{11}$ c) $\ln \sqrt{11}$ d) $\ln 11^{11}$ e) $\ln 11^2$ f) $\ln \dfrac{11}{2}$

AM 29 Să se studieze existenţa limitei $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{9^x - 1}{|x|}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 30 Să se studieze existenţa limitei $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(e^{-2x} \sin\left(x^2 + 1\right)\right)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 2 b) 0 c) 1 d) -1 e) -2 f) nu există

AM 31 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{n-(\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x)}{\sin^2 x}\ .$$

.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ d) $+\infty$ e) $\dfrac{n}{2}$ f) $\dfrac{n(n+1)}{4}$

AM 32 Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$, ştiind că

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2ax)}{x^2} = 0\ .$$

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\pm\sqrt{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

AM 33 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} (26-5x)^{\frac{1}{x-5}}$.

a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^5 f) e^{-1}

AM 34 Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{x}}$. Să se calculeze media aritmetică a următoarelor trei limite:

$$l_1 = \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad l_2 = \lim_{x\to 0} f(x) \quad \text{şi} \quad l_3 = \lim_{x\to \infty} f(x).$$

a) 3 b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{4}{3}$ e) 1 f) $\dfrac{1}{6}$

AM 35 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\frac{1}{\ln x}\right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) $+\infty$ f) nu există

AM 36 Să se calculeze
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x}{\sin x-x\cos x}.$$

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) 2 e) 4 f) -1

AM 37 Să se calculeze
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

a) $+\infty$ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 38 Fie $a>0$ fixat. Să se calculeze
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}\,a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 39 Să se studieze existenţa limitei
$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x^3+3x]}{[x]^3+3[x]},$$
unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 2 c) 1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{4}$ f) nu există

AM 40 Să se calculeze
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^{2018})-\ln^{2018}(1+x)}{x^{2019}}.$$

a) 2018 b) 0 c) 1 d) 1009 e) 2017 f) 1010

AM 41 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n(x)}{x^{n+2}}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $\frac{n}{6}$ d) n e) $\frac{n}{2}$ f) nu există

AM 42 Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2(nx)} \cdot \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cos(kx), \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) 0 b) $\frac{n+1}{n}$ c) 1 d) $\frac{2n+1}{n}$ e) $\frac{2n+1}{2n}$ f) $\frac{n}{2n+1}$

AM 43 Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea că $f(x^2 + x) \leq x$, pentru orice $x \geq 0$. Dacă

$$L = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \ ,$$

atunci:

a) $L = \infty$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{2}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$ f) $L = 2$

AM 44 Se consideră funcţia $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale nenule şi diferite de 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se studieze existenţa limitei $\lim_{x \to 0} h(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

AM 45 Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x.$$

a) $y=0$ b) $y=\dfrac{1}{2}$ c) $y=2x-\dfrac{1}{2}$

d) $y=-2x-\dfrac{1}{2}$ e) $y=-2x+\dfrac{1}{2}$ f) $y=2x+\dfrac{1}{2}$

AM 46 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg} x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ b) $y=-\dfrac{\pi}{2}x+1$ c) $y=\pm\dfrac{\pi}{2}x+1$

d) $y=\pm\dfrac{\pi}{2}x-1$ e) nu există f) $y=\dfrac{\pi}{2}x$

AM 47 Să se studieze existenţa asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei

$$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2+x\ln(e^x+1)}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine ecuaţia sa.

a) $y=x+\dfrac{1}{2}$ b) $y=\sqrt{2}x$ c) $y=x+1$

d) $y=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ e) nu există f) $y=\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM 48 Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=x\ln x$$

şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=0$

d) nu există asimptote e) $x=0$ f) $x=0$ şi $y=0$

AM 49 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y=0$ b) $y=x$ c) nu există

d) $y=x+1$ e) $x=0$ f) $y=2x$

AM 50 Fie funcţia $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\ .$$

Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $y=0$ b) $y=2$ c) $y=1$

d) $y=2x$ e) $y=x$ f) toate răspunsurile sunt false

AM 51 Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{x+1},\ a\in\mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a astfel încât $y=0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $(0,+\infty)$ b) $\{1\}$ c) $(-1,2)$

d) $\emptyset$ e) $[0,+\infty)$ f) $\mathbb{R}$

AM 52 Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-2},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Să se determine toate valorile parametrilor reali a,b astfel încât $y=x+2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $a=0,\ b=-2$ b) $a=1,\ b=0$ c) $a=0,\ \forall\ b\in\mathbb{R}$

d) $a=0,\ b=3$ e) $a=-2,\ \forall\ b\in\mathbb{R}$ f) $a=0,\ b=0$

AM 53 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$. Să se determine toate asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $x=0$ este asimptotă verticală

b) $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

c) $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$

d) $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

e) $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$

f) $y=0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

AM 54 Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}x, & \text{dacă } x\le 0\\ 1+\sqrt{x}, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $y=0$ b) $y=x-1$ c) $y=-\dfrac{\pi}{2}$

d) $y=-\dfrac{\pi}{2}x$ e) $y=-\dfrac{\pi}{4}$ f) $y=2\pi x$

AM 55 Să se determine asimptotele la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}\ .$$

a) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la dreapta

b) $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x=0$ este asimptotă verticală la dreapta

c) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

d) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

f) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 56 Fie $a > 0$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a} \ ,$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie. Ştiind că funcţia f nu are asimptote verticale, să se studieze existenţa altor asimptote la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0,\ y = -x$ b) $y = 0$ c) $y = 0,\ y = x$
d) $y = 0,\ y = x + 1$ e) $y = 1,\ y = x$ f) nu are asimptote

AM 57 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiţie. Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $x = 2$
d) $y = 2 - x$ e) $x = 2,\ y = -x - 2$ f) $y = \pm x + 2$

AM 58 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă în punctul $x = 0$.

a) 0 b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{3}$

AM 59 Se consideră funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ \dfrac{a\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, & \text{dacă } x \in (1,\pi]. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 60 Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

a) f este continuă pe $[0, 1]$

b) f este discontinuă în punctul $x = 0$

c) f este discontinuă în punctul $x = \dfrac{1}{2}$

d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$

e) f este discontinuă în punctul $x = 1$

f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 61 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei[1]

$$f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\setminus\{\pi\}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right|$$

în punctul π. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq\pi\\ 1, & x=\pi\end{cases}$

c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x=\pi$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq\pi\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pi\end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

AM 62 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\sin(3\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

în punctele $a=-1$ şi $b=1$. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

[1] Fie $f:(a,c)\cup(c,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe fiecare din intervalele (a,c) şi (c,b). Dacă $l=\lim_{x\to c} f(x)$ există şi este finită atunci $\widetilde{f}:(a,b)\to\mathbb{R}$ definită prin $\widetilde{f}(x)=f(x)$ pentru $x\neq c$ şi $\widetilde{f}(c)=l$ este o funcţie continuă, numită prelungirea prin continuitate a lui f.

a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1,1]$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases}3, & x=-1\\ f(x), & x\in(-1,1)\\ -3, & x=1\end{cases}$

c) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-1,1)\\ -3, & x\in\{-1,1\}\end{cases}$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-1,1)\\ 3\pi, & x\in\{-1,1\}\end{cases}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases}-3, & x=-1\\ f(x), & x\in(-1,1)\\ 3, & x=1\end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-1,1)\\ 3, & x\in\{-1,1\}\end{cases}$

AM 63 Fie funcţia continuă $f:[1,100)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+\{x\})(b-\{x\})$, $a,b\in\mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x. Dacă $\mathrm{Im}f=[m,M]$, să se determine $M-m$.

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) a^2+a d) ab e) $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ f) $\dfrac{(a+b)^2}{4}$

AM 64 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x=0$ astfel încât $f(0)=0$. Dacă $f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(5x)}{\sin(f(x))}\,.$$

a) 0 b) $\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{3}{5}$ d) $+\infty$ e) 1 f) $\dfrac{10}{3}$

AM 65 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât

$$f(2017) = 2016 \text{ şi } f(x)\, f(f(x)) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f(2015)$.

a) 1 b) 2015 c) 2017 d) $\dfrac{1}{2017}$ e) $\dfrac{1}{2015}$ f) 2016

AM 66 Se consideră funcţiile $f, g : (0, e) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ x+1, & \text{dacă } x \in [1,e) \end{cases},\ \text{respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(1+f(x))}\ .$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0,e) :\ g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ şi } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine S.

a) 1 b) $1+e$ c) $1-e$ d) $e-1$ e) 0 f) e

AM 67 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left|x^2 - 4x\right| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}\ ,$$

unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f.

a) $[1,4)$ b) $[1,4]$ c) $(0,\infty)$ d) $[1,\infty)$ e) $(1,\infty)$ f) $[1,\infty) \setminus \{4\}$

AM 68 Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1+|x|},$$

unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se determine mulţimea C a punctelor de continuitate ale lui f, respectiv mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f.

a) $C = D_1 = (0, \infty)$

b) $C = [0, \infty),\ D_1 = (0, \infty)$

c) $C = D_1 = \mathbb{R}$

d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$

e) $C = \mathbb{R},\ D_1 = \mathbb{R}^*$

f) $C = [-1, 1],\ D_1 = (-1, 1)$

AM 69 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

a) f este continuă şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

c) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $2f(1) = f'(1)$

d) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = f'(1)$

e) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = 2f'(1)$

f) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = -f'(1)$

AM 70 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}\ .$$

Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0 = 1$ şi în caz afirmativ să se calculeze $f'(1)$.

a) f este derivabilă şi $f'(1) = \dfrac{1}{e}$

b) f este derivabilă şi $f'(1) = -\dfrac{1}{e}$

c) f este derivabilă şi $f'(1) = 0$

d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$

e) f este derivabilă şi $f'(1) = e$

f) f este derivabilă şi $f'(1) = -e$

AM 71 Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă şi $f'(0) = -1$
b) f este derivabilă şi $f'(0) = 1$
c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
d) f este derivabilă şi $f'(0) = 0$
e) f este derivabilă şi $f'(0) = 2$
f) f este derivabilă şi $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

AM 72 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \le 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 4, \quad b = 0$
b) $a = 3, \quad b = 0$
c) $a \in \mathbb{R}, \quad b = 5$
d) $a = 3, \quad b \in \mathbb{R}$
e) $a = 4, \quad b = 1$
f) $a = -1, \quad b = 4$

AM 73 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \ge 0\ . \end{cases}$$

Determinaţi parametrii reali a, b astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 1, \forall\, b \in \mathbb{R}$
b) $a = b = 0$
c) $\forall\, a \in \mathbb{R}, b = 0$
d) $a = 1, b = 0$
e) $a = b = 1$
f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$.

AM 74 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcţiei f.

a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$
b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$
f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$

AM 75 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ .$$

Determinaţi domeniul maxim de definiţie D şi domeniul de derivabilitate D_1.

a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
$D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
$D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

AM 76 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dacă notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ f \text{ nu este derivabilă în } x\},$$

atunci $S = \sum\limits_{x \in A} x^2$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 77 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$.

a) $2x\,(x^2+1)^{x^2+1}\left[\ln(x^2+1)+1\right]$

b) $2x\,(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

c) $x\,(x^2+1)^{x^2+1}\left[\ln(x^2+1)+1\right]$

d) $2x\left[\ln(x^2+1)+1\right]$

e) $2x\,(x^2+1)\left[\ln(x^2+1)+1\right]$

f) $x\,(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

AM 78 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt{x^2+e}}$ în punctul $x_0 = 0$.

a) e b) $2e$ c) $e^{\sqrt{e}}$ d) 0 e) $\sqrt{e}$ f) 1

AM 79 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(1-x^2)+\sqrt{x^2+1}$. Să se calculeze derivata funcţiei f în $x_0=1$.

a) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-4}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2+\sqrt{2}$

AM 80 Să se calculeze derivata funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\pi^2+\ln\left[\left(\sqrt{x^{10}+2x^2+4}\right)^{2^{-1}}\right]$$

în punctul $x_0=-1$.

a) 2 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{7}{2}$ d) $-\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) -2

AM 81 Fie $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2x^2}}\ , & \text{dacă } x\neq 0\\ a\ , & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

să fie continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) nu există f) $\sqrt{2}$

AM 82 Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relaţia $s(t)=e^{-t}\cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine acceleraţia mobilului după 2 secunde.

a) $e^{-2}\cos 2$ b) $2e^{-2}\cos 2$ c) $2e^{-2}\sin 2$

d) $e^{-2}\sin 2$ e) $\dfrac{e^{-2}\sin 2}{2}$ f) $\dfrac{e^{-2}\cos 2}{2}$

AM 83 Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă şi în caz afirmativ să se calculeze limita

$$L=\lim_{y\to-\infty} e^{-y}f^{-1}(y).$$

a) f este inversabilă şi $L=+\infty$ b) f este inversabilă şi $L=0$

c) f este inversabilă şi $L=1$ d) f este inversabilă şi $L=e$

e) f este inversabilă şi $L=e^{-1}$ f) f nu este inversabilă

AM 84 Fie funcţia $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=\dfrac{x}{e^x}$ şi funcţiile $f_n(x)=f'_{n-1}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

a) 0 b) xe^{-x} c) xe^{-2x}

d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

AM 85 Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g:(0,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\frac{x^2f''(x)+mxf'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) -1

AM 86 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{|x|-1}{|x|+1}\ln\frac{x^2+1}{|x|+1}\ .$$

Să se calculeze

$$\left(\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f'(x)\right)\cdot\left(\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f'(x)\right).$$

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 87 Se consideră funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $f'(x) = \frac{x}{2}$ b) $f'(x) = \frac{1}{x+\pi}$ c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+\pi}}$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

AM 88 Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

în punctul $x_0 = 0$ este:

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) e e) 1 f) nu există

AM 89 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \left|x^2 + |x^2 - x| - 1\right|.$$

Notăm cu M mulţimea punctelor în care f nu este derivabilă şi $S = \sum_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcţiei f în punctul x. Să se determine S.

a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM 90 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ şi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(0)=1,\ f'(x)=5x$ b) $f(0)=0,\ f'(x)=5x$

c) $f(0)=2,\ f'(x)=2x+5$ d) $f(0)=1,\ f'(x)=5x+2$

e) $f(0)=0,\ f'(x)=5x+2$ f) $f(0)=0,\ f'(x)=2x+2$

AM 91 Fie $a>0$ şi funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Să se determine mulţimea valorilor lui a astfel încât f să fie convexă.

a) $(0,\infty)$ b) $[1,\infty)$ c) $\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ d) $\emptyset$ e) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left[\frac{1}{2},1\right)$

AM 92 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & \text{dacă } x\neq 1\\ 1, & \text{dacă } x=1\end{cases}.$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 93 Fie funcţia inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x-1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(0)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) nu există e) 2 f) $-\frac{1}{2}$

AM 94 Să se determine toate funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relaţia $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = ae^x$, $a \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = \ln(1+x)$

d) $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f) nu există astfel de funcţii

AM 95 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2012 - 2013 \sqrt[2013]{x}$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = x$

d) $y = 0$ e) $y = 1$ f) $y = 2$

AM 96 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$$

în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

a) $y = -\dfrac{5}{2}\, x + \dfrac{11}{2}$ b) $y = \dfrac{5}{2}\, x + \dfrac{11}{2}$ c) $y = 3$

d) $y = x + 2$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = -2x + 1$

AM 97 Să se determine punctele de pe graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$$

în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $2x - 9y = 0$.

a) $(1, 0)$ b) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3} - \ln 2\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3} - \ln 2\right)$

d) $\left(2, \ln 2 - \dfrac{2}{3}\right)$ e) $\left(2, \ln 2 - \dfrac{1}{3}\right)$ f) $(1, 1)$

AM 98 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin(x^3-1)-\frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x=1$.

a) $y=7x-11$ b) $y=7x$ c) $y=11x-7$

d) $7y=x-11$ e) $7y=x+11$ f) $y=7x-4$

AM 99 Pentru ce valori ale parametrului $a\in\mathbb{R}$, dreapta $y=ax-2$ este tangentă la curba $y=x^3+4x$?

a) 1 b) -1 c) 7 d) 2 e) -2 f) 0

AM 100 Se consideră funcţia $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\sqrt{x+1}\ .$$

Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x=0$, $x=3$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{3}$

AM 101 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$.

a) $y=x-1$ b) $y=x+1$ c) $y=-x$

d) $y=-x+2$ e) $y=x$ f) $y=x+2$

AM 102 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\dfrac{1}{2}$.

a) $(1, 1)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 0)$

d) $(2, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

AM 103 Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}\ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$

d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

AM 104 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune ale lui f.

a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ c) $\emptyset$

d) $\{-1\}$ e) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

AM 105 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^{|x-1|}},$$

şi mulţimile A şi B ale absciselor punctelor unghiulare, respectiv de inflexiune ale funcţiei f. Să se calculeze $\alpha + \beta$, unde

$$\alpha = \sum_{a \in A} a^2 \text{ şi } \beta = \sum_{b \in B} b^2.$$

a) 20 b) 10 c) 19 d) 18 e) 1 f) 22

AM 106 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 107 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2-1)(x^2-4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4 f) 5

AM 108 Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2-\ln x,\ a\in\mathbb{R}^*$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui f.

a) 0 b) 1 c) 2

d) 3 e) depinde de valoarea lui a f) 4

AM 109 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1\}$ b) $\{0,1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\{1,2\}$ f) $\emptyset$

AM 110 Fie funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f precizând şi natura acestora.

a) $(e,2e)$, minim local b) $\left(e,\dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

c) $\left(\sqrt{e},\dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local d) $(\sqrt{e},2e)$, minim local

e) $\left(\sqrt{e},\dfrac{1}{2e}\right)$, minim local f) $\left(\dfrac{1}{e},2e\right)$, minim local

AM 111 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2-6x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

a) $\{0,6\}$ b) $\{3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1,6\}$

AM 112 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 113 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) $\emptyset$

AM 114 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$

d) $\{0, 1\}$ e) $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ f) $\emptyset$

AM 115 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\ .$$

a) $\{2, 4 \pm \sqrt{5}\}$ b) $\{4, 2 \pm \sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$

d) $\{4\}$ e) $\{4, 4 \pm \sqrt{5}\}$ f) $\{2, 2 \pm \sqrt{5}\}$

AM 116 Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

f) nu are puncte de extrem local

AM 117 Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcţiei $f:(0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC.

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{1}{e}$ d) $\dfrac{2}{e}$ e) $\dfrac{4}{e}$ f) $\dfrac{12}{e^3}$

AM 118 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{mx+1}{x^2+1}\ .$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem local.

a) $\{-1\}$ b) $(-1,1)$ c) $(-\infty,-1)$

d) $(1,\infty)$ e) $(0,1)$ f) $\mathbb{R}^*$

AM 119 Se consideră funcţia

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f\,(x)=\frac{e^x}{2+x}\ .$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f precizând şi natura acestora.

a) $(-1, e)$, maxim local b) $\left(1, \dfrac{e}{3}\right)$, minim local

c) $\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$, maxim local d) $\left(1, \dfrac{e}{3}\right)$, maxim local

e) $\left(-1, \dfrac{1}{e}\right)$, minim local f) $(1, e)$, maxim local

AM 120 Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = 3\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x.$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

AM 121 Să se determine punctul de minim al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \text{ arctg}\, \sqrt{x}.$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) π e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM 122 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x\, b^{1-x} + b^x\, a^{1-x}$, cu $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Atunci:

a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

b) $\left(\dfrac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

c) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcţiei f

d) $\left(\dfrac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

e) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

f) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

AM 123 Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\frac{e^{|\ln x|}}{x+1}\ .$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 124 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcţiei

$$f:(-2,0)\to\mathbb{R}\ ,\quad f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x}\ ,$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 125 Fie A punctul aparţinând graficului funcţiei

$$f:\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}\ ,\quad f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\ ,$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziene xOy. Să se afle distanţa de la O la A.

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

AM 126 Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă v km/h (cu condiţia $40\le v\le 70$) consumând $\left(8+\frac{v^2}{300}\right)$ $litri/h$ de benzină. Să se determine viteza pentru care costul este minim, ştiind că şoferul este plătit cu 15 lei/h şi benzina costă 6 $lei/litru$.

a) 50 km/h b) 55 km/h c) $15\sqrt{14}$ km/h

d) $16\sqrt{14}$ km/h e) 70 km/h f) $14\sqrt{14}$ km/h

AM 127 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferenţa dintre acesta şi cubul său să fie maximă.

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

AM 128 Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0.$$

a) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, \infty)$

d) $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AM 129 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$. Soluţia inecuaţiei $f(x) - 1 > 0$ este:

a) $(0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $(1, +\infty)$ e) $(-\infty, -1)$ f) $\emptyset$

AM 130 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2 + 1 \geq a + 2 \ln x, \quad \text{pentru orice} \quad x \in (0, \infty).$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 131 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \quad \text{pentru orice} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\emptyset$

AM 132 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca ecuaţia $e^x = mx^2$ să aibă trei rădăcini reale distincte.

a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \dfrac{e^2}{8}\right)$

d) $\left(\dfrac{e^2}{8}, \dfrac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\dfrac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\dfrac{e^2}{4}\right\}$

AM 133 Să se determine mulţimea tuturor numerelor reale x care verifică inegalitatea:

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \geq 0.$$

a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $[0, \infty)$ d) $\mathbb{R}$ e) $[1, \infty)$ f) $\emptyset$

AM 134 Să se rezolve inecuaţia $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\{1\}$

AM 135 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}\ , & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0\ , & \text{dacă } x = -3\ . \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcţiei f.

a) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ b) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

e) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ f) f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$

AM 136 Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ .$$

Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $[0,1]$ b) $[0,+\infty)$ c) $\mathbb{R}$

d) $[0,10]$ e) $[1,4]$ f) $\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ,1\right]$

AM 137 Se consideră funcţiile $f,g,h:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{x}{x+1}\ ,\quad g\left(x\right)=x,\quad h\left(x\right)=\ln\left(1+x\right).$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice $x\geq 0$?

a) $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\geq h\left(x\right)$ b) $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\leq h\left(x\right)$ c) $f\left(x\right)\geq h\left(x\right)\geq g\left(x\right)$

d) $f\left(x\right)\leq h\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ e) $f\left(x\right)>g\left(x\right)>h\left(x\right)$ f) $f\left(x\right)<g\left(x\right)<h\left(x\right)$

AM 138 Fie $f\left(t\right)=t^3e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t>0$ (puterea este măsurată în waţi şi timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 139 Fie funcţia $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}\ , & \text{dacă } x\neq 0\\ \quad 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

şi afirmaţiile:

(i) f este continuă, dar nu este derivabilă;

(ii) $x=0$ este asimptotă verticală;

(iii) $y=0$ este asimptotă orizontală;

(iv) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$;

(v) f este strict crescătoare;

(vi) $\mathrm{Im}\ f=\left[-\dfrac{2}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt adevărate?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 140 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (3x^2 - 6x)\sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (6x - 6)\sqrt[3]{x}$

b) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2)\sqrt[3]{x^2}$

c) F nu este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$

d) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8)\sqrt[3]{x}$

e) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8)\sqrt[3]{x^2}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2)\sqrt[3]{x}$

AM 141 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x|x - 1|$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right|$

b) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2}|x - 1|$

c) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1|$

d) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\left|\dfrac{x^2}{2} - x\right|$

e) F nu poate fi primitivă a nici unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + x$

AM 142 Să se studieze primitivabilitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} a\,\dfrac{|x|}{x}\,, & x \neq 0 \\ 1 + a\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

după parametrul real a.

a) f este primitivabilă pentru $a > 1$

b) f este primitivabilă pentru $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

c) f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a = 0$

d) f este primitivabilă pentru $a \in \{-1, 1\}$

e) f nu este primitivabilă pentru $\forall\, a \in \mathbb{R}$

f) f este primitivabilă pentru $a < -1$

AM 143 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^{x}, & x \geq 0 \ . \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(2e^x + 1), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 + 1) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(1 - e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă

d) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 + 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + e^x, & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

e) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2 - 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ (x-1)(1 + e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

f) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ (x-1)(e^x + 2), & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

AM 144 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{2-x}, & x \in (0, 2] \ . \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}, & x \in [-1,0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in [-1,0] \\ -\frac{\sqrt{2-x}}{2} + \frac{1}{2}, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

d) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}, & x \in [-1,0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

e) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2}, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

f) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{2}, & x \in [-1,0] \\ -\sqrt{(2-x)^3} + 1, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

AM 145 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c)\,\mathrm{arctg}x$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x$.

a) $a = -\frac{1}{2},\ b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$

d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

AM 146 Să se calculeze $\int \left(x^2 - x\right) e^{-2x} dx$.

a) $(2x-1)\, e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

d) $(1-2x)\, e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\frac{2x^3}{3} + x^2\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 147 Să se calculeze $\int (2x-1)\cos 2x dx$.

a) $x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x\sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x\cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 148 Fie $I(a) = \int \frac{e^x}{x^a}\, dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde a este un număr natural nenul. Care dintre umătoarele afirmaţii este adevărată?

a) $I(3) = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2} I(1)$ b) $3I(3) = \frac{e^x}{x^2} - I(1)$

c) $I(3) = -\frac{e^x}{2x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} I(1)$ d) $2I(3) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{3} I(2)$

e) $I(3) = \frac{e^x}{3x^2} - \frac{2}{3} I(2)$ f) $I(3) = \frac{e^x}{3x^3} - \frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{3} I(2)$

AM 149 Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

a) $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{1}{7}$ b) $a = \frac{4}{17}, b = -\frac{4}{17}$ c) $a = -\frac{1}{17}, b = \frac{4}{17}$

d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7},\ b = \frac{4}{7}$ f) $a = b = \frac{1}{17}$

AM 150 Să se calculeze $\int x^5 e^{3x} dx$.

a) $\frac{1}{25} e^{3x}(81x^5 + 135x^4 - 180x^3 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{81} e^{3x}(81x^5 - 135x^4 - 180x^3 + 120x + 40) + \mathcal{C}$

c) $\frac{1}{243} e^{3x}(81x^5 - 135x^4 + 180x^3 - 180x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{243} e^{3x}(81x^5 + 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

e) $\frac{1}{243} e^{3x}(81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

f) $\frac{2}{243} e^{3x}(81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x + 40) + \mathcal{C}$

AM 151 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - 6x + 5}\ .$$

Să se calculeze $\int f(x)\, dx$.

a) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ b) $\frac{11}{4} \ln(5-x) - \frac{3}{4} \ln(1-x) + \mathcal{C}$

c) $\frac{11}{4} \ln \frac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$ d) $\frac{3}{4} \ln \frac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$

e) $\frac{7}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{7}{4} \ln|x-5| + \mathcal{C}$

AM 152 Să se determine familia primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\ , \quad a>0,\ \ b\in\mathbb{R}^*.$$

a) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{ab}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{a}{b}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = \dfrac{b}{a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{b}{a}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

f) $F(x) = \dfrac{b}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{b}{a}\ \mathrm{arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

AM 153 Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x-8-x^2}{x^4+4x^3}\ .$$

Să se determine acea primitivă F a funcţiei f care verifică relaţia $F(5) = \dfrac{4}{25}$.

a) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{8}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x^3}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{6}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{8}{5} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\ln\sqrt{\dfrac{x+4}{x}} - \dfrac{x-1}{x^2} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln\sqrt{\dfrac{x}{x+4}} + \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{6}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

f) $\ln\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}} - \dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{1}{25} - \ln\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 154 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{x^{2018}+x}$$

pe intervalul $I \subset (0,\infty)$.

a) $\ln x - \dfrac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$ b) $\ln x + \dfrac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

c) $\ln x + \ln(1+x^{2017}) \cdot 2017 + \mathcal{C}$ d) $\ln x - \dfrac{\ln(x+x^{2018})}{2018} + \mathcal{C}$

e) $-\ln x + \dfrac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$ f) $\dfrac{\ln x}{2018} - \dfrac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$

AM 155 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+5}} .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

a) $11 \ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right| + 3\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$

b) $\dfrac{11}{3} \ln \dfrac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$

c) $7 \ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right| + 2\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{7}{2} \ln \dfrac{\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right|}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$

e) $2 \ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right| + 11\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$

f) $\dfrac{3}{7} \ln \dfrac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$

AM 156 Fie $I \subset (0, \infty)$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

a) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

b) $3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

c) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 3\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

f) $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \mathcal{C}$

AM 157 Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}.$$

Să se determine familia primitivelor funcţiei f.

a) $\frac{12}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} - \frac{18}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{36}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{1}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

c) $\frac{1}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} - \frac{1}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

d) $\frac{11}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{9}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{6}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

e) $\frac{4}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{4}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} + \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

f) $\frac{13}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{7}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}} + \sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}} + \mathcal{C}$

AM 158 Să se calculeze

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} + 1}\,dx, \quad x > \frac{1}{2}\ .$$

a) $\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$

b) $-\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

c) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

d) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

e) $-\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

f) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

AM 159 Se consideră funcţia

$$f(x)=x^5\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2},\ \ a\in\mathbb{R}\ .$$

Să se determine familia primitivelor funcţiei f.

a) $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^3}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

b) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}-\dfrac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^3}+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

e) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

f) $\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{3a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

AM 160 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{2-e^x}{e^x+e^{2-x}}\ .$$

a) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

b) $2\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{e}\text{arctg}e^{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

e) $2\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

f) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x} - \ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

AM 161 Fie funcţiile[2] :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{ch}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{şi respectiv} \quad \text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ .$$

Să se determine primitiva F a funcţiei $f(x) = \text{ch}^2\ x \cdot \text{sh}^2\ x$ care verifică relaţia $F(0) = 0$.

a) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} - \dfrac{x}{8}$

b) $-\dfrac{x}{16} + \dfrac{1}{32}\ \text{sh}\ 4x$

c) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} + 2x$

d) $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\ \text{ch}\ x$

e) $\dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{8}$

f) $\dfrac{e^{4x}}{64} + \dfrac{e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} - \dfrac{5}{32}$

AM 162 Se defineşte funcţia[3]

$$\text{th}\ x = \frac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ .$$

Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei th şi să se precizeze domeniul maxim D pe care sunt definite acestea.

[2]Funcţia ch se numeşte *cosinus hiperbolic* iar funcţia sh se numeşte *sinus hiperbolic*

[3]Funcţia th se numeşte *tangenta hiperbolică*

a) $\ln(e^x - e^{-x}) + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

b) $\dfrac{1}{2}\ln(e^x + e^{-x}) + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

c) $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

d) $-x + \ln(1 + e^{2x}) + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

e) $-x + \ln(1 - e^{2x}) + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

f) $\dfrac{2}{e^x - e^{-x}} + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

AM 163 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}\ .$$

a) $\ln \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x} + \mathcal{C}$

b) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{2}\ln \left|\dfrac{1+\text{tg } x}{1-\text{tg } x}\right| + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1+\sin x}{1-\cos x} + \mathcal{C}$

e) $\ln \left|\dfrac{1+\text{tg } \frac{x}{2}}{1-\text{tg } \frac{x}{2}}\right| + \mathcal{C}$

f) $\ln \left|\dfrac{1+\text{tg } x}{1-\text{tg } x}\right| + \mathcal{C}$

AM 164 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{\text{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $F(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\text{tg } x}{1-\text{tg } x}} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \text{tg } x + \dfrac{1}{4}\ln\sqrt{\dfrac{1+\text{tg } x}{1-\text{tg } x}} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = 2x + \ln\sqrt{\dfrac{1-\text{tg } x}{1+\text{tg } x}} + \mathcal{C}$

d)$F(x) = x^2 + \ln\left|\dfrac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 1}\right| + \mathcal{C}$

e) $F(x) = x + \ln\left|\dfrac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 1}\right| + \mathcal{C}$

f) $F(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 1}\right| + \mathcal{C}$

AM 165 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}\ .$$

a) f nu admite primitive

b) $F(x) = \begin{cases} -4\cos x + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\cos x + a + 4, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} -4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\cos \dfrac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $F(x) = \begin{cases} -4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $F(x) = \begin{cases} 4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4\sin \dfrac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} 4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

AM 166 Ce relaţie trebuie să existe între constantele reale strict pozitive a şi b astfel încât funcţia

$$f(x) = \frac{1}{a + b \cdot \cos x}$$

să fie primitivabilă pe $\mathbb{R}$?

a) $a > b$ b) $a \neq \dfrac{1}{b}$ c) $a \geq b$

d) $a \neq 0$ e) $a \neq 0$, $b \neq 0$ f) $b \neq 0$

AM 167 Pentru orice $b \in \mathbb{N}$ se definesc integralele

$$I(b) = \int \frac{1}{x^b \sqrt{a^2 + x^2}}\, dx, \quad x \in (0, \infty), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Care din următoarele relaţii este adevărată?

a) $I(9) = \dfrac{1}{8a^2}\left(-7I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ b) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(-8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

c) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ d) $I(9) = \dfrac{1}{7a^2}\left(8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

e) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 8I(7)\right)$ f) $I(9) = \dfrac{1}{8a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 7I(7)\right)$

AM 168 Fie integralele

$$I(c) = \int \frac{x^c}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ \ c \in \mathbb{N}.$$

Să se exprime $I(2017)$ sub forma $I(2017) = a\,x^{2016}\sqrt{1+x^2} + b\,I(2015)$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $a = b$ b) $a - b = 1$

c) $a \cdot b = 2016$ d) $a = 2017b$

e) $a + b = -2015$ f) $\nexists\ a, b \in \mathbb{R}$ care să verifice relaţia

AM 169 Pentru $b \in \mathbb{N}$ se consideră integralele

$$I(b) = \int \frac{x^b}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ \ x \in (-a, a),\ \ a > 0.$$

Să se determine o relaţie între $I(5)$ şi $I(3)$.

a) $5I(5) = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2I(3)$ b) $5I(5) = -x^4\sqrt{a^2-x^2} + 4a^2I(3)$

c) $5I(5) = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2I(3)$ d)$I(5) = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 2a^2I(3)$

e) $I(5) = 4x^4\sqrt{a^2-x^2} - 5a^2I(3)$ f) $4I(5) = x^4\sqrt{a^2-x^2} - 3a^2I(3)$

AM 170 Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1+2\ln x}{x\,(2+\ln x)}\;dx.$$

a) $3\ln 2+3\ln 3+2$ b) $\ln\dfrac{9e^2}{32}$ c) $6+\ln\dfrac{9}{8e}$

d) $2\ln 2+3\ln 3+1$ e) $\ln\dfrac{8e^2}{27}$ f) $4-\ln\dfrac{3}{2e}$

AM 171 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x}\cos\pi x\;dx.$$

a) $\dfrac{3\,(1+e^{-3})}{9+\pi^2}$ b) $\dfrac{2\,(1+e^{2})}{4+\pi^2}$ c) $\dfrac{1+e^{-3}}{9+\pi^2}$

d) $\dfrac{1+e^{3}}{4+\pi^2}$ e) $\dfrac{2\,(1+e^{3})}{9+\pi^2}$ f) $\dfrac{3\,(1+e^{-3})}{4+\pi^2}$

AM 172 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x-x^3}{x^4+1}\;dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{8}$ b) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\ln 2}{4}$ c) $\pi-2\ln 2$

d) $2\pi-4\ln 2$ e) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\ln 2}{3}$

AM 173 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+4}\;dx.$$

a) $\dfrac{\text{arctg }3-\ln 5}{8}$ b) $\dfrac{\text{arctg }2-\ln 2}{4}$ c) $\dfrac{2\text{arctg }3-\ln 2}{4}$

d) $\dfrac{2\text{arctg }2-\ln 5}{8}$ e) $\dfrac{\text{arctg }4-\ln 3}{8}$ f) $\dfrac{2\text{arctg }4-\ln 3}{4}$

AM 174 Să se calculeze

$$\int_1^e (2x+1)\ln x\ dx.$$

a) $\frac{1}{2}(e+3)$ b) $\frac{1}{3}(e^2+2)$ c) $\frac{1}{2}(e^2+3)$

d) $\frac{1}{2}(e^2-2)$ e) $\frac{1}{3}(e-3)$ f) $\frac{1}{3}(e^2+1)$

AM 175 Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\ dx.$$

a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

AM 176 Să se calculeze

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}\ .$$

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\frac{9}{2}$ d) $\ln\frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 177 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{3+x^2}\ , & |x|\le\sqrt{3}\\ 0, & |x|>\sqrt{3}, \qquad a\in\mathbb{R}^*\end{cases}$$

şi integrala $F(x)=\displaystyle\int_{-e}^{x} f(t)dt$. Să se calculeze $F(1)-F(0)$.

a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\frac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 178 Se consideră funcţia [4] $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-a}^{a} x^2(\sigma(x) - \sigma(-x))dx,\ a > 0.$$

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{2a^3}{3}$ d) $\dfrac{a^3}{3}$ e) $2a$ f) $3a^3$

AM 179 Să se calculeze

$$\int_{7}^{27} \frac{1}{x + 3\sqrt{2x-5}}\ dx.$$

a) $\ln \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ b) $\dfrac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2$ c) $\dfrac{5}{2}\ln 3 - 4\ln 2$

d) $\ln \dfrac{9}{4\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{5}{2}\ln 3 - 3\ln 2$ f) $\dfrac{3}{2}\ln 3 + 4\ln 2$

AM 180 Să se calculeze

$$\int_{7}^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x-5}}\ dx.$$

a) $\ln \dfrac{10}{7} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{25}$ b) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{9}$ d) $\ln \dfrac{10}{9} - \operatorname{arctg} \dfrac{9}{25}$

e) $\ln \dfrac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln \dfrac{34}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$

[4] funcţia σ se numeşte *funcţia treaptă unitate a lui Heaviside*

AM 181 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^{1} |x| \arcsin x \; dx.$$

a) $-\dfrac{\pi}{2}$ b) -1 c) 1 d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) 0 f) π

AM 182 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^{1} |x| \arcsin^2 x \; dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{8}$ b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}$ e) $\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2}$

AM 183 Să se determine valoarea parametrului $a > 0$ astfel încât integrala

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{1+e^x} \; dx$$

să ia valoarea 20000.

a) 4 b) $\dfrac{1}{2}$ c) e d) 1 e) 10 f) 100

AM 184 Fie integrala

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{b}{ae^t + b} \; dt.$$

Să se determine o relaţie între parametrii reali nenuli a, b astfel încât I să ia valoarea $\ln 32 - \ln 9$.

a) $23a + 5b = 0$ b) $23a - 5b = 0$ c) $a \ln 3 = b \ln 4$

d) $a + b = \ln 12$ e) $42a - 11b = 0$ f) $a = b$

AM 185 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{1024} \frac{\ln(2017-x)}{\ln[1505^2-(512-x)^2]}\ dx.$$

a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$

d) 512 e) $\dfrac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

AM 186 Să se calculeze

$$\int_1^3 x[x]dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\dfrac{11}{2}$ b) $\dfrac{11}{3}$ c) $\dfrac{13}{2}$ d) $\dfrac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 187 Să se calculeze

$$\int_{-1}^3 x3^{[x]}dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\dfrac{81}{4}$ b) $\dfrac{85}{3}$ c) $\dfrac{82}{3}$ d) $\dfrac{88}{3}$ e) $\dfrac{83}{4}$ f) $\dfrac{89}{4}$

AM 188 Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=[mx],\ m>0,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine constanta m pentru care $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 189 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^{3} (x + |m - x|)\, dx = 9.$$

a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1, 3\}$

AM 190 Să se calculeze integrala

$$\int_{0}^{12} x\sqrt{14 - \sqrt{13^2 - x^2}}\; dx.$$

a) $\frac{2400}{49}$ b) $\frac{2536}{15}$ c) $\frac{2188}{15}$ d) $\frac{2195}{17}$ e) $\frac{2638}{49}$ f) $\frac{2600}{17}$

AM 191 Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : [-3, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \le 0, \\ 7x, & x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le -1, \\ 2x - 1, & x > -1 \end{cases}$$

şi funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g$. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)dx$.

a) 1 b) $-\frac{29}{4}$ c) -4 d) $\frac{27}{4}$ e) $\frac{26}{3}$ f) $-\frac{29}{3}$

AM 192 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{1} (1 - |x|)\; dx.$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2 f) 0

AM 193 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{2}\Big(1-\Big||x|-1\Big|\Big)dx.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 194 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \min\{1, \operatorname{tg} x\}\ dx.$$

a) $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{12}$ b) $\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{12}$ c) $\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{12}$

d) $\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{12}$ e) $\ln\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}$ f) $\ln\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

AM 195 Să se calculeze

$$\int_{-2}^{2} \min\{1, x, x^2\}\ dx.$$

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

AM 196 Să se calculeze

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\sin x, \frac{1}{2}\right\} dx.$$

a) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}+\frac{3}{2}$

d) $\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi+3+3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3}+1$

AM 197 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \min\{\sin x, \cos x\}\ dx.$$

a) $\sqrt{2}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM 198 Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1} \max\{1, 2^x\}\, dx.$$

a) $\ln 2 + 1$ b) $\ln 2 - 1$ c) $1 - \dfrac{1}{\ln 2}$

d) $1 + \dfrac{1}{\ln 2}$ e) $-1 + \dfrac{1}{\ln 2}$ f) $\ln 2$

AM 199 Să se calculeze

$$\int_{-a}^{a} \max\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)^x, \pi^x\right\} dx,\ \ a > 0.$$

a) $2(\pi^a - 1)$ b) $2\pi^a$ c) $\dfrac{2(\pi^a-1)}{\ln \pi}$ d) $\dfrac{2}{\ln \pi}$ e) $\dfrac{2a}{\ln \pi}$ f) 0

AM 200 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\ dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{2} + 1$ b) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{4} + 1$

d) $\dfrac{\pi}{8} + 1$ e) $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$ f) $\dfrac{\pi - 1}{4}$

AM 201 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$ b) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3} + 3}{648}$ c) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{648}$

d) $\dfrac{\pi + 3}{648}$ e) $\dfrac{6\sqrt{3} - 3}{648}$ f) $\dfrac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{324}$

AM 202 Se consideră funcţia inversabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 7}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y)dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcţiei f.

a) $1 + \ln\dfrac{8}{7} - \dfrac{6\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ b) $1 + \ln\dfrac{7}{8} - \dfrac{\sqrt{7}}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1 + \ln\dfrac{8}{7}$ d) $-1 - \ln\dfrac{8}{7} + \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2 + \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ f) 0

AM 203 Fie integrala

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$.

a) 0 b) ∞ c) 2 d) $\ln 3$ e) 1 f) $\dfrac{1}{2}$

AM 204 Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\ dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3}\ln\frac{2}{9}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7}\ln\frac{9}{2}$ f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4}\ln\frac{9}{2}$

AM 205 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}\ dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$

AM 206 Se consideră funcţiile

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_1(x) = \int_0^x t\sin 2t\ dt$$

şi

$$f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\quad f_2(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ dt.$$

Să se calculeze $f_1(x) + f_2(x)$ pentru toate valorile lui x din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) $x\arcsin x$ b) $x\arccos\sqrt{x}$ c) $x\arcsin\sqrt{x}$

d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{\pi}{6}$

AM 207 Să se determine constanta reală a pentru care valoarea integralei

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x\cos x}\ dx$$

este $\ln\sqrt[4]{3}$.

a) 2 b) 1 c) π d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

AM 208 Se consideră integralele

$$C = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \; dx \quad \text{şi} \quad S = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \; dx.$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $C + S = \dfrac{3\pi}{8}$ b) $C - S = \dfrac{\pi}{2}$ c) $C + S = \dfrac{\pi}{16}$

d) $C - S = 0$ e) $C + S = \dfrac{3\pi}{16}$ f) $C - S = \dfrac{3\pi}{4}$

AM 209 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \; dx,$$

unde $f(x) = \max\{\sin x, \sin^3 x\}$.

a) $\dfrac{9\pi}{16}$ b) $\dfrac{\pi}{12}$ c) $\dfrac{7\pi}{16}$ d) $\dfrac{\pi}{16}$ e) $\dfrac{3\pi}{16}$ f) 0

AM 210 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} \; dx.$$

a) $\dfrac{2\sqrt{3} + \pi}{6}$ b) $\dfrac{6\sqrt{3} - \pi}{2}$ c) $\dfrac{3\sqrt{3} + \pi}{6}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3} - \pi}{3}$ e) $\dfrac{4\sqrt{3} - \pi}{6}$ f) $\dfrac{5\sqrt{3} + \pi}{2}$

AM 211 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{sign}\; x \; \sin \frac{\pi x}{2} \; dx,$$

unde sign reprezintă funcţia *semn*, sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sign}\; x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

a) 2 b) $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\pi}$ c) π d) $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$ e) $\dfrac{2}{\pi}$ f) 4π

AM 212 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 x \;\cos x \; dx.$$

a) $\dfrac{13}{129}$ b) $\dfrac{31}{129}$ c) $\dfrac{13}{192}$ d) $\dfrac{31}{192}$ e) $\dfrac{27}{129}$ f) $\dfrac{71}{192}$

AM 213 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \;\sin 2x \; dx.$$

a) 0 b) $-\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{10}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$ f) 1

AM 214 Se consideră integralele definite

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \; dx, \quad \text{unde} \;\; a \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $aI(a)I(a-1)$ pentru toate valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{\pi a}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{2\,(a-1)!}$ c) π d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi a}{a-1}$ f) $\dfrac{\pi\,(a-1)}{2}$

AM 215 Fie integralele

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \; dx, \quad \text{unde} \;\; a \in \mathbb{N}.$$

Să se precizeze care dintre următoarele relaţii este adevărată pentru $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

a) $I(a)=\dfrac{\pi}{2}-I(a-1)$ b) $I(a)=\dfrac{a-1}{a}I(a-2)$ c) $I(a)=\dfrac{1}{a+1}I(a-2)$

d) $I(a)=\dfrac{a-1}{a}I(a-1)$ e) $I(a)=\dfrac{\pi}{2}-I(a-2)$ f) $I(a)=\dfrac{a}{a+1}I(a-2)$

AM 216 Fie

$$I(n)=\int_0^1 (2017+x^n)^n dx,\ \ n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{I(n)}$.

a) 2017 b) 2018 c) 1 d) $\dfrac{\pi}{4}$ e) $\ln 2017$ f) $\dfrac{1}{2017}$

AM 217 Fie funcţiile f_1 şi f_2 definite pe intervalul $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ prin expresiile

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ \sin\pi x}{|x|}, & x\neq 0\\ 10\ , & x=0\end{cases},\quad \text{respectiv}\quad f_2(x)=\sqrt{\sin^2\pi x}.$$

Dacă

$$I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx \quad \text{şi} \quad I_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_2(x)\,dx,$$

se cere să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată:

a) $f_1>f_2$ şi $I_1>I_2$ b) $f_1=f_2$ şi $I_1=I_2$ c) $f_1=f_2$ şi $I_1=I_2$

d) $f_1\neq f_2$ şi $I_1=I_2$ e) $f_1\neq f_2$ şi $I_1\neq I_2$ f) $f_1<f_2$ şi $I_1<I_2$

AM 218 Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(n\arccos\ x)}{\sqrt{1-x^2}}\ , & |x|<1,\\ n\ (\text{sign}\ x)^{n+1}, & |x|=1,\quad n\in\mathbb{N}^*,\end{cases}$$

unde sign reprezintă funcţia semn. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

a) $\dfrac{1}{n}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{n}$ c) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n\cos\dfrac{\pi}{n}$ f) 0

AM 219 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2}\frac{x}{1+e^{-x}}\,dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{x}{1-e^{-x}}\,dx.$$

a) $\ln 2\ln 3$ b) $\ln 2+4\ln 3$ c) $\ln 2+\ln 3$

d) $2\ln 2\ln 3$ e) $3\ln 2+2\ln 3$ f) $\ln 2+2\ln 3$

AM 220 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\mathrm{tg}^5x+\mathrm{tg}^7x+\mathrm{tg}^9x+\mathrm{tg}^{11}x)\,dx.$$

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{5}{4}$ c) $\dfrac{144}{5}$ d) $\dfrac{2}{3}$ e) $\dfrac{11}{6}$ f) $\dfrac{155}{6}$

AM 221 Să se determine numărul real m pentru care are loc identitatea

$$\int_0^1\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}dx=m\int_1^2(x-1)^2\sqrt{x}\,dx.$$

a) $3,5$ b) 2 c) 3 d) $1,5$ e) 1 f) $2,5$

AM 222 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2^n}\int_a^b\cos^n\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

ştiind că intervalul de integrare $[a,b]$ este inclus în $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) ∞ f) $\dfrac{1}{2}$

AM 223 Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^4 e^{-t}dt.$$

a) $3!$ b) 8 c) $4!$ d) e^4 e) 16 f) e^2

AM 224 Se consideră integralele definite

$$I=\int_a^b \ln(x+1)\ dx \quad \text{şi} \quad J=\int_a^b \frac{x}{x+1}\ dx,$$

unde a şi b sunt numere reale cu proprietatea $0<a<b$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $I=J$ b) $I>J$ c) $J>I$

d) $I=2J$ e) $I=\dfrac{a}{b-a}J$ f) $J=\dfrac{a}{a+b}I$

AM 225 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^4+2x^3-5x^2+13=24\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 t\ dt\ .$$

a) $\emptyset$ b) $\{0,\pm\sqrt{2}\}$ c) $\{-1,1\}$

d) $\left\{0,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ e) $\left\{\pm 1,\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ f) $\{1,-2\pm\sqrt{2}\}$

AM 226 Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$, unde

$$I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x^2+x+1}\ dx,\quad \text{unde}\quad a>1.$$

a) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) 1

AM 227 Să se calculeze

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^{a^2} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4 e) ∞ f) $\frac{1}{4}$

AM 228 Să se calculeze valoarea limitei

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2}dt}{\displaystyle\int_0^{\mathrm{ctg}x}\ln(t^2+2)dt}\,.$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 229 Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,dt.$$

Să se precizeze care din afirmaţiile următoare este adevărată.

a) F este crescătoare b) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$
c) F este pară d) F este descrescătoare
e) $F(1)=0$ f) nici un răspuns nu este corect

AM 230 Să se determine aria subgraficului funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x+1}{x+3}\,.$$

a) $\ln\frac{16}{9}$ b) $2-\ln\frac{16}{9}$ c) $1-\ln\frac{16}{9}$
d) $\ln\frac{9}{16}$ e) $1-\ln\frac{9}{16}$ f) 2

AM 231 Să se determine aria mulţimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2+3}{x+3} \quad \text{şi} \quad y = 2.$$

a) $12 - 3\ln 3$ b) $12 + 3\ln 3$ c) $16 - 3\ln 3$

d) $16 - 12\ln 3$ e) $16 - \ln 12$ f) $\ln 12$

AM 232 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele $y = 2x^2 + 5x - 3$ şi $y = 6 - x - x^2$.

a) 2^5 b) 12 c) 2^4 d) 60 e) 2^6 f) 34

AM 233 Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{(x-\cos t)^2 + \sin^2 t}}\, dt\ .$$

Să se calculeze aria suprafeţei limitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele $x = a$, $a \le -1$, respectiv $x = b$, $b \ge 1$.

a) $a + b$ b) $b - a$ c) $\cos b - \cos a$

d) $2\ln|abe^2|$ e) $\ln a^2 + \ln b^2$ f) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$

AM 234 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit, delimitat de curbele de ecuaţii $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{32}{5}$ c) $\frac{16}{5}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 235 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y = x^2 - 4x$ şi dreapta $x - y = 4$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{2}{3}$

AM 236 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y^2 = 10x$ şi dreapta $y = 5x$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 237 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabolele $y = x^2$ şi $y = 8 - x^2$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{16}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{64}{3}$

AM 238 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $x = y - y^2$ şi dreapta $x + y = 0$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 239 Să se determine volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}$.

a) $\pi\left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \frac{1}{4}\right)$ b) $\pi\left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \frac{1}{4}\right)$

c) $\pi\left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4}\right)$ d) $\pi\left(\ln \frac{3}{4} + 16 \arcsin \frac{3}{4}\right)$

e) $\pi\left(3\sqrt{7} + \ln \frac{3}{4}\right)$ f) $\pi\left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \frac{5}{6}\right)$

AM 240 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$.

a) $\frac{4\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{2}$ b) $\frac{1}{16}\pi^2 (3\pi^2 + 2)$ c) $\frac{\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{4}$

d) $\frac{9\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{8}$ e) $\frac{3}{8}\pi^2 (\pi^2 - 2)$ f) $\frac{8\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{8}$

AM 241 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a cercului de ecuaţie $x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$.

a) 2π b) $2\pi^2$ c) π d) π^2 e) 4π f) $4\pi^2$

AM 242 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$.

a) 12π b) 10π c) 16π d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

AM 243 Să se determine parametrul m aşa încât volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\left(x - \frac{m}{x}\right)$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 244 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

a) $\pi \ln \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi \ln \dfrac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi \ln \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi \ln \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$

AM 245 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1,3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $\pi \ln \frac{5}{13}$ b) $3\pi \ln \frac{13e}{5}$ c) $\pi \ln \frac{5}{13}$

d) $3\pi \ln \frac{5e}{13}$ e) $2\pi \ln \frac{13}{5e}$ f) $2\pi \ln \frac{5e}{13}$

AM 246 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$.

a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{16}$ d) $\frac{3\pi^2}{8}$ e) $\frac{3\pi^2}{16}$ f) $\frac{3\pi}{8}$

ANEXE

Subiectele date la admitere în anii 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019 şi 2020 cu rezolvările integrale

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2014 **A**

1.(8p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x+7}=3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei.

a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E=\sum_{i=1}^{2014}\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k!(k^2+1)\right].$$

a) $2014!$ b) $2014!-1$ c) $2015!$ d) $2015!-2$ e) $2016!-2$

3.(8p) Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, \text{ dacă } i=j,\\ (-1)^{i+j}C_j^i, \text{ dacă } i<j,\\ 0, \text{ dacă } i>j,\end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinări de j luate câte i. Să se calculeze A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1&2&-3\\0&-1&3\\0&0&-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul $(\mathcal{M},\cdot)$, unde

$$\mathcal{M}=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$$

şi " $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\dfrac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ şi } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

6.(9p) Ştiind că $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ şi $\sin a + \cos a = \dfrac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2}$.

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A şi B. Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcţia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1,\ y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1$

d) nu există e) $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1,\ y = \dfrac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = -1$

b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 2$

c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 1$

d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$

e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

a) -2 b) 1 c) -1 d) 3 e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^{0} |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

a) $\frac{435}{96}$ b) $\frac{135}{32}$ c) $\frac{221}{48}$ d) $\frac{37}{96}$ e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox şi dreptele $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$ b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$

d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUŢII AC+ETC 2014

1. Punem condiţia de existenţă $x+7 \geq 0$ şi obţinem $x \in [-7,+\infty)$.
Notăm $\sqrt[3]{2-x} = u$ şi $\sqrt{x+7} = v$ şi atunci avem $2-x = u^3$ şi $x+7 = v^2$, de unde obţinem sistemul

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

cu soluţiile $u_1 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = 2$, $v_2 = 1$, $u_3 = -3$ şi $v_3 = 6$, adică $x_1 = 2$, $x_2 = -6$ şi $x_3 = 29$.
În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei este

$$|2| + |-6| + |29| = 37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i} k![(k+1)^2 - 2(k+1)+2]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i} [k!(k+1)(k+1) - 2k!(k+1)+2k!]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i} [(k+1)!(k+1)] - 2\sum_{k=1}^{i}[(k+1)! - k!]\right]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i} [(k+1)!(k+2-1)] - 2[(i+1)!-1]\right]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}\left[\sum_{k=1}^{i} [(k+2)! - (k+1)!] - 2(i+1)! + 2\right]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}\,[(i+2)! - 2 - 2(i+1)! + 2]\right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}\,[(i+1)!(i+2) - 2(i+1)!]\right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2014}\left[\frac{1+i}{i}(i+1)!i\right] = \sum_{i=1}^{2014}[(1+i)(i+1)!] = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}[(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014}[(2+i)!-(i+1)!] = \\
&= 2016!-2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$a_{11} = (-1)^{1+1} = 1, \quad a_{22} = (-1)^{2+2} = 1, \quad a_{33} = (-1)^{3+3} = 1,$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2}C_2^1 = -2, \quad a_{13} = (-1)^{1+3}C_3^1 = 3, \quad a_{23} = (-1)^{2+3}C_3^2 = -3,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0,$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulţirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărţirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărţirii, adică

$$(x-2015)^{2014} + x - 2001 = (x-2014)(x-2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ şi $x = 2016$, ecuaţia precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluţia $a = 1$ şi $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\dfrac{a}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2}-1\right)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \dfrac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde} \ \ \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2}-1\right),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obţinem că $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{3}$ este singura soluţie.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1,0)$ şi $B(0,2)$. Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{1+0+x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 8$$

şi

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{0+2+y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcţia f nu are asimptote orizontale. În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2}x\right] = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ şi $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$\begin{aligned}
f'_s(0) &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\nearrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\
&= \lim_{x\nearrow 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{-x}{x} = -1
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
f'_d(0) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\searrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\
&= \lim_{x\searrow 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{x} = 1,
\end{aligned}$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$. Dar

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{a(x^2+1)-(ax+a-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{ax^2+a-2ax^2-2ax+4x}{(x^2+1)^2} = \\
&= \frac{-ax^2+(4-2a)x+a}{(x^2+1)^2},
\end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia $4 - 2a = 0$ cu soluţia reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2-11x-3| = \begin{cases} 4x^2-11x-3\ , \text{ dacă } x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right] \cup [3,\infty) \\ -4x^2+11x+3\ , \text{ dacă } x \in \left(-\dfrac{1}{4}, 3\right) \end{cases},$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}}(4x^2-11x-3)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{0}(-4x^2+11x+3)dx =$$

$$= \left(4\cdot\frac{x^3}{3} - 11\cdot\frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4\cdot\frac{x^3}{3} + 11\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{0} = \frac{221}{48}\ .$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părţi de două ori, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2}(\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}\ . \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015 — A

1.(7p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuaţiei.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right),\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma tuturor elementelor mulţimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulţimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2 \text{ } \c{s}i \text{ } \left[\frac{1}{|z-3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

a) $P \subset \left(4, \frac{\sqrt{70}}{2}\right]$ b) $P = \left(4, \frac{35}{8}\right)$ c) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \frac{\sqrt{75}}{2}\right)$

4.(8p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ şi restul împarţirii lui f la $X + 1$ este 3.

a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA şi OB două raze perpendiculare în cercul de centru O şi rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA), P \in (OB)$, iar M şi N aparţin arcului mic AB.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de punctul $B(3,4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P. Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

a) $-3, 1$ b) $\dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}$ e) $1, \dfrac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x + 1)).$$

a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{2} + 1$ b) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ şi de dreapta $2x - 3y = 9$.

a) 9 b) $\dfrac{9}{2}$ c) 18 d) $\dfrac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea absciselor punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xlnx$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $2y - x + 1 = 0$ b) $y - x - 1 = 0$ c) $y + x = 0$
d) $y - x + 1 = 0$ e) $y - 2x + 1 = 0$

SOLUŢII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = v$ şi eliminând x din cele două relaţii, se obţine:

$$u + v = 3, u^3 + v^3 = 9,$$

cu soluţiile $u = 2, v = 1$ şi $u = 1, v = 2$. Rezultă $x = 49$ sau $x = 0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{C_{k+1}^2}\right)$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 + k + 2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k+1} = \frac{n+2}{3n}.$$

Rămâne de rezolvat în $\mathbb{N}$ inecuaţia:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{3n} \leq \frac{2}{3},$$

deci $n \in \{2, 3, 4\}$. Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din condiţia $\mid z - 2 \mid = 2$ se obţine $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relaţie, $1 \leq \dfrac{1}{\mid z - 3 \mid} < 2$ rezultă $\dfrac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \dfrac{35}{8}\right)$. Ţinând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluţie $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rang A = rang $\bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui $\bar{A}$ trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică uşor că pentru $m = 1$ avem rang A = rang $\bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ şi aplicând apoi Teorema împărţirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informaţii, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ si împărţindu-l la $X^2 + 2$ se obţine restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie sa coincidă cu $X + 1$. Se obţin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ şi $[OP]$, cu C proiecţia punctului O pe latura PQ şi cu D proiecţia punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obţine că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de $B(3,4)$, se obţine imediat că $C(5,6)$. Fie $P(p,0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p+2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obţine $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\ln(e^x+1)) = \lim_{y\to\infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1)\ln y) = \lim_{y\to\infty} \ln(y-1) \cdot \ln \frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0 \cdot \infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt şi aplicăm apoi de două ori Regula lui l´ Hospital:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln \dfrac{y-1}{y}}{\dfrac{1}{\ln(y-1)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obţine:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\, dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\, dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\, dx$$

$$= -\sqrt{1-(x-2)^2}\Big|_1^2 + \arcsin(x-2)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecţie ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ şi $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeţei determinate de parabolă şi dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x-9}{3} + \sqrt{9-2x}\right) dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x\Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Ştiind că mulţimea punctelor de extrem local ale unei funcţii se găsesc printre soluţiile primei derivate, rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$. Se obţin soluţiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcţiei f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcţiei f.

Răspuns corect: d).

12. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 26.07.2016 — A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m, respectiv valoarea maximă M, a funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a) $m = -\frac{1}{4}$, $M = 0$ b) $m = 0$, $M = 42$ c) $m = -42$, $M = 0$

d) $m = 0$, $M = 2$ e) $m = -\frac{1}{4}$, $M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + ... + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}\ .$$

a) $S = 0$ b) $S = \frac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \frac{1}{6}$ e) $S = \frac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei X.

a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a şi b astfel încât legea de compoziţie

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicaţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, *)$.

a) $a = -12$, $b = 3$ b) $a = 3$, $b = 12$ c) $a = 12$, $b = 3$

d) $a = 12$, $b = -3$ e) $a = 3$, $b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m+3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ şi $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparţine bisectoarei unghiului AOB.

a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\dfrac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulţimii $\mathbb{R}$ prin f.

a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) $\mathbb{R}$

10.(8p) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot lnx$. Să se determine panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1, 0)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^3}dx.$$

a) $\frac{5}{4} - 2\ln 2$ b) $2\ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2\ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}\ ,$$

axa Ox şi dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln \frac{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

c) $13\sqrt{5} - 4\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

SOLUŢII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcţiei $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimul funcţiei pe intervalul $[1, 3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$S=\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2^2+...+\log_2 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2^2+...+\log_3 2016^2}+$$

$$+...+\frac{1}{\log_{2016} 1+\log_{2016} 2^2+...+\log_{2016} 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{\log_2 1^2\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1^2\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2016^2}+...+\frac{1}{\log_{2016} 1^2\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\log_{1^2\cdot 2^2\cdot ...\cdot 2016^2} 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2016-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X=\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$, ecuaţia devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5\\ -4 & 1 & -12\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Se obţin relaţiile $2a-4b+c=1, b=2, 5a-12b+3c=3$ de unde $a=0, b=2, c=9$, deci $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 9\end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiţia ca legea de compoziţie să fie asociativă se obţine $a=12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiţia morfismului între două grupuri, $f(x+y)=f(x)\star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x+y)=e^{x+y}+b$$

şi

$$f(x)\star f(y)=e^{x+y}+(b-3)e^x+(b-3)e^y+b^2-4b+12.$$

Egalând cele două expresii, se obţine $(b-3)(e^x+e^y+b+4)=0$ pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, adică $b=3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienţilor polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărţind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obţine câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuaţia devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

şi are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \dfrac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0,1]$, rămâne ca şi a doua rădăcină să fie în afara aceluiaşi interval, adică $\dfrac{m-1}{2} < 0$ şi $\dfrac{m-1}{2} > 1$. Se obţine $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanţe egale de laturile unghiului, punem condiţia $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuaţiile dreptelor $OA : y = -2x$ şi $OB : y = 3x$, deci distanţele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|\, 4 + a\,|}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|\, 6 - a\,|}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obţine $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0, deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{xlnx} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine:

$$\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluţia ecuţiei $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiţie sunt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variaţie al funcţiei, se obţine că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funţiei f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituţia $\ln x = t$, $\dfrac{1}{x}\, dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^3}\, dt = 2\int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^3}\, dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = ds$ şi se obţine:

$$2\int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3}\, ds = 2\left(\int_1^2 \frac{1}{s}\, ds - 2\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3}\, ds\right) = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcţia f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ şi negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$A = \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$= 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4}\Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4}\Big|_2^3 - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_2^3$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}\ .$$

Răspuns corect: b).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 25.07.2017 **A**

1.(9p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

a) $9a^2 + 1$ b) $9a^2 - 12a$ c) $9a^2 - 1$ d) $9a^2$ e) $9a^2 - 3a + 12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}\ .$$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$

e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărţirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

a) $X - 1$ b) X c) $X + 1$ d) $-X + 1$ e) $-X - 1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ABC}$ au măsurile de $30°$, respectiv $135°$, iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

a) $\frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3} - 1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecţie a dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ şi $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se calculeze raportul dintre distanţa de la P la d_1 şi distanţa de la P la d_2.

a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$. Să se determine mulţimea tuturor punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) $\emptyset$

11.(8p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{e^x + 1}\, dx = -\frac{32}{5} .$$

a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1 + x)}}{x} .$$

a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ şi $x_1 x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1}=C_{80}^{k}(\sqrt[3]{5})^{80-k}(\sqrt[5]{2})^{k}=C_{80}^{k}5^{\frac{80-k}{3}}2^{\frac{k}{5}},\quad k\in\overline{0,80},$$

el este număr raţional dacă şi numai dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile:

$$\frac{80-k}{3}\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad \frac{k}{5}\in\mathbb{N}\ ,$$

adică $k\in\{5,20,35,50,65,80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operaţii cu coloane şi linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2\end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_1}{\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4\\ b^2 & 2b+1 & -4b+4\\ c^2 & 2c+1 & -4c+4\end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3+2C_2}{=}$$

$$=6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1\\ b^2 & 2b+1 & 1\\ c^2 & 2c+1 & 1\end{vmatrix} \overset{L_2:=L_2-L_1}{\underset{L_3:=L_3-L_1}{=}} 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1\\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0\\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=12(b-a)(c-a)(b-c).$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2(2^x+2^{-x})=5$, care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-1$, deci produsul lor este -1.

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la X^2-X+1 este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(2x^3+x+1)^{2017}=(x^2-x+1)\cdot Q(x)+ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărţirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului X^2-X+1. Atunci $\omega^3 = -1$ şi $\omega^2-\omega+1 = 0$, adică $\omega^2 = \omega - 1$ şi înlocuind pe x cu ω în relaţia de mai sus se obţine

$$(\omega-1)^{2017} = a\omega + b \quad \Leftrightarrow \quad (\omega^2)^{2017} = a\omega + b \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = a\omega + b,$$

de unde rezultă că $a = 1$ şi $b = -1$, deci restul căutat este $X - 1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obţine că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = 3\sqrt{2}.$$

Cum $\mathrm{m}(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ şi

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB}) = 9(2-\sqrt{3}) = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2, atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două drepte şi obţinem $A(2,0)$, iar ecuaţia dreptei d este $y = x - 2$.

Fie $P(p, p-2) \in d$, $p \neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P,d_1)}{d(P,d_2)} = \frac{\frac{2|p-2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p-2|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcţia f poate fi scrisă

$$f(x) = \frac{3x^4}{x^2+1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 3x^2\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left[3e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x}} e^2 \left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ şi $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, rezultă că $f''(-1) = 7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcţia f devine

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4x}\ , & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ \sqrt{-x^2+4x}\ , & \text{dacă } x \in (0, 4), \end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}\ , & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \dfrac{-x+2}{2\sqrt{-x^2+4x}}\ , & \text{dacă } x \in (0, 4). \end{cases}$$

Din tabloul de variaţie al funcţiei se observă că punctele de extrem ale funcţiei sunt $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunţ cu I şi făcând schimbarea de variabilă $-x = t$ obţinem

$$I = \int_a^{-a} -\frac{t^4}{e^{-t}+1}\,dt = \int_{-a}^{a} \frac{t^4 e^t}{e^t+1}\,dt = \int_{-a}^{a} \frac{t^4(e^t+1-1)}{e^t+1}\,dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t + 1} \right) dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-a}^{a} - I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţia $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, dx \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4} \; .$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 13.09.2017 A

1.(8p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică$(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 1$ şi raţia $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5.

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017}.

a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4\ . \end{cases}$$

a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = 1$, $b = 4$ c) $a = 2$, $b = 4$
d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -4$, $b = 1$

6.(8p) Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ ştiind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{3}{5}$.

a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparţine dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul $P(-1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta d.

a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$

d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$

d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\emptyset$

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox şi dreptele $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\frac{e^2}{8} - \frac{3}{e^2}$ b) $\frac{e^2}{16} - \frac{7}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{7}{4e^2}$

d) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

a) $\dfrac{4}{3}\ln(x+5) - \dfrac{1}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{1}{3}\ln(x+5) - \dfrac{4}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

c) $\dfrac{4}{3}\ln(x+1) + \dfrac{1}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{1}{3}\ln(x-1) - \dfrac{4}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

e) $\dfrac{1}{2}\ln(x+5) + \dfrac{4}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2 - 11x + 6 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $6x^2 - 11x + 5 = 0$ şi atunci suma soluţiilor ei este $\dfrac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5 = a_1 + 4r = 1 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A = 0$, rezultă că $\det(A^{2017}) = (\det A)^{2017} = 0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = -14$, $y = -21$ şi $z = 24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condiţiile $f(-1) = 0$ şi $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluţia $a = 1$ şi $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparţine dreptei d se obţine că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 şi prin urmare, ecuaţia ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2-1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcţiei f.

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}.$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx = \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+5}\, dx = -\frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}.$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 23.07.2018 A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi şi raţia 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{2017} + a_{2018}}{a_{2018} + a_{2019}}\ ,$$

atunci:

a) $S = 1$ b) $S = 2017$ c) $S = \dfrac{2017}{2018}$ d) $S = 2018$ e) $S = \dfrac{2018}{2017}$

2.(8p) Fie mulţimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = 2 \text{ şi } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$

d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0

c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$

e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$

d) $\emptyset$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2018)^{2017} + X - 2020 \text{ şi } g = (X - 2017)(X - 2019).$$

Să se determine restul împărţirii lui f la g.

a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$

d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = 30°$ şi $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză şi celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\dfrac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\dfrac{6\sqrt{3} - 5}{2}$

d) $\dfrac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0,1), B(1,1)$ şi $C(4,3)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii triunghiului ABC dusă din A. Să se calculeze $m \cdot n$.

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1,\ f'(0) = 2$.

a) $a=1,\ b=1$ b) $a=3,\ b=1$ c) $a=2,\ b=1$

d) $a=-2,\ b=-1$ e) $a=1,\ b=-1$

10.(7p) Fie funcţia $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiţie a funcţiei. Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3}\ .$$

a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}\ .$$

a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinsă între graficele funcţiilor $f,g:\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, unde $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=\cos x$.

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}-2$ c) $2\sqrt{2}-1$ d) $4\sqrt{2}-1$ e) $4\sqrt{2}-2$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S=\frac{a_1+a_1r}{a_1r+a_1r^2}+\frac{a_1r+a_1r^2}{a_1r^2+a_1r^3}+\ldots+\frac{a_1r^{2016}+a_1r^{2017}}{a_1r^{2017}+a_1r^{2018}}=$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1r(1+r)} + \frac{a_1r(1+r)}{a_1r^2(1+r)} + \ldots + \frac{a_1r^{2016}(1+r)}{a_1r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018}\ .$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relaţia $z \cdot \overline{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \tag{1}$$

Pe de altă parte, relaţia $\left|\frac{2z+3}{z-3i}\right| = 1$ poate fi scrisă

$$\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2a+3)^2 + 4b^2}{a^2 + (b-3)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -2a - 1. \tag{2}$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2), se obţin două soluţii:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ b_1 = -\frac{7}{5}, \qquad \text{de unde} \qquad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

şi

$$a_2 = -1,\ b_2 = 1, \qquad \text{de unde} \qquad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 := C_2 - C_3}{=}$$

$$= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1).$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ şi determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\text{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă şi numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m \neq -\frac{1}{10}\ .$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărţirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(x-2018)^{2017} + x - 2020 = (x-2017)(x-2019) \cdot Q(x) + ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărţirii. Înlocuind in această relaţie pe x cu 2017, respectiv 2019, se obţin relaţiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ şi $b = -4038$, adică restul împărţirii lui f la g este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x.

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu m$(\widehat{BGD}) = 90°$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu m$(\widehat{BAC}) = 90°$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu m$(\widehat{EFC}) = 90°$ şi m$(\widehat{FCE}) = 60°$, avem

$$\text{tg}\ (\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FG$, adică $\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obţine $x = \frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\frac{2}{3}$, rezultă că panta înălţimii căutate este $-\frac{3}{2}$, iar ecuaţia ei este $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ şi crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, rezultă că $Imf = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x-\text{tg }(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{9x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9x^2\cos^2 x}\left(1-\frac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{9x^2\cos^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{\text{tg}\ ^2x}\cdot\frac{\text{tg}\ ^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{9\cos^2 x}=-\frac{1}{9}\ .$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1}=t$, rezultă că $x=t^2+1$ şi integrala din enunţ devine

$$\int_3^7\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{1}{t^2+2}\ dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeţei căutate poate fi scrisă

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}-2.$$

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 17.09.2018 A

1.(8p) Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1-x-2x^2}=-x-1.$$

a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 şi 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia

$$x * x = -2.$$

a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca tg $x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} (f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$

d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1} .$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) $\mathbb{R}^*$ e) $[0, +\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 \, dx.$$

a) $\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

12.(8p) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(10x-\frac{3}{x}\right)\ln x,$$

axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e^2$.

a) $\dfrac{15e^4-7}{2}$ b) $10e^2-\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{15e^2-1}{2}$

d) $10e^4-\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{7e^4-15}{2}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condiţiile de existenţă în ecuaţia dată se obţine

$$\begin{cases} 1-x-2x^2\geq 0 \\ -x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right] \\ x\in(-\infty,-1] \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

care este soluţie a ecuaţiei.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\dfrac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunţ poate fi scrisă

$$B - \frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 9 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9^3 + 4^3 - 36 - 36 - 36 = 2 \cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuaţia din enunţ poate fi scrisă $x^2 + 4x + 2 = -2$, care are soluţia $x = -2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\text{tg } x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -2\cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obţine $\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1,4)$ şi ecuaţia medianei din A este $y = 5 - x$, de unde rezultă că $m = -1$ şi $n = 5$. Deci, $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}-1\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+6}}\right]^{\frac{2x^2+6x}{x^2-1}} = e^2.$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \dfrac{-mx^2-2x+m}{(x^2+1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei $-mx^2 - 2x + m = 0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4 + 4m^2 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părţi, integrala din enunţ devine

$$\int_0^\pi (x\cos x)^2\,dx = \int_0^\pi x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\int_0^\pi x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcţia f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \, dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \, dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

Pentru prima integrala se foloseşte Formula de integrare prin părţi, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x}\, dx = du$ şi atunci se obţine

$$A = 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx - 3 \int_0^2 u \, du =$$

$$= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2} \right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2} \; .$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 22.07.2019 A

1.(8p) Fie mulţimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete şi 6 sunt băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi?

a) 50 b) 6300 c) 240

d) 1050 e) 525

3.(10p) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - 2a - 4 & ac - 2a & a^2 - b^2 - 2c \\ b^2 + ab - 2a - 4 & a^2 - c^2 - 2b & ab - 2a \\ b^2c + 2bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d) 2 , 1

e) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

4.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$ c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 0$, $b = 1$

5.(8p) Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul

$$(X + 1)^{17} + mX^2 + n$$

să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

a) $m = 0$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 0$ c) $m = -1$, $n = -1$

d) $m = 1$, $n = 0$ e) $m = 1$, $n = 1$

6.(9p) Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin\widehat{C}$.

a) $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1,-1), B(-2,3)$ şi $C(4,0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui faţă de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(1,2)$ b) $\left(\dfrac{34}{15}, \dfrac{53}{15}\right)$ c) $\left(\dfrac{19}{15}, \dfrac{38}{15}\right)$ d) $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ e) $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{2019}+1}{x^3+1} \ .$$

a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real şi pozitiv cu proprietatea că diferenţa dintre dublul său şi cubul său este maximă.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi\left(1 + \ln\frac{13}{5}\right)$ b) $\pi\left(2 + \ln\frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi\left(1 - \ln\frac{13}{5}\right)$

d) $2\pi\ln\frac{13}{5}$ e) $\pi\left(2 - \ln\frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluţiile ecuaţiei $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt a şi 2, iar soluţia ecuaţiei $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulţimea $A \cap B$ are un singur element dacă şi numai dacă

$$2a = a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0$$

sau

$$2a = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1\ .$$

În concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieţi se poate forma o grupă de câte 2 băieţi în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relaţia

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obţinem

$$\frac{2}{\sin 75°} = \frac{c}{\sin 15°} .$$

Cum $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ şi $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ şi, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(*i*) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(*ii*) f satisface simultan condiţiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \quad \Rightarrow \quad a \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

În concluzie, $a = \dfrac{1}{2}$ şi $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului X^2+X+1. Atunci $\omega^3 = 1$ şi $\omega^2+\omega+1 = 0$.
Cum polinomul $(X+1)^{17} + mX^2 + n$ se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$ se obţine că

$$(\omega+1)^{17} + m\omega^2 + n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\omega^2)^{17} + m(-1-\omega) + n = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -(1+m)\omega - m + n = 0,$$

de unde $m = n = -1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB = c$, $AC = b$ şi $BC = a$. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \cdot \sin A \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

şi atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A = \dfrac{1}{3}$.
Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Leftrightarrow \quad a = 2\sqrt{17}$$

şi apoi din Teorema sinusurilor $\sin C = \dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ şi $m_{BC} = -\dfrac{1}{2}$, rezultă că ecuaţia dreptei GD este $y = 2x$. De asemenea, ecuaţia dreptei BC este $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ şi dacă $\{E\} = GD \cap BC$ se obţine că $E\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$ şi că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\dfrac{19}{15}, \dfrac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^{2019}+1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{2019x^{2018}+1}{3x^2} = \lim_{x\to -1} 673x^{2016} = 673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obţine $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f. În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\, dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right)\, dx =$$

$$= \pi \left(x\Big|_1^3 + 2\ln(x^2+4)\Big|_1^3 \right) = 2\pi \left(1 + \ln\frac{13}{5}\right).$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} = \frac{x}{(x^2+7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}$$

şi cum $\dfrac{x}{(x^2+7)^2}$ este o fucţie impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} dx = \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2+7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2+7-x^2}{(x^2+7)^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2+7)^2} dx \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{7}} \text{ arctg } \frac{x}{\sqrt{7}}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)}\right)' dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7}\left(-\frac{x}{2(x^2+7)}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx\right) = \frac{\pi+2}{28} \ .$$

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 14.09.2019 A

1.(10p) Câte numere întregi are mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \leq 6\} \ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} \ .$$

a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20\ . \end{cases}$$

a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$
d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a + x & b + x & c + x \\ a^2 + x^2 & b^2 + x^2 & c^2 + x^2 \\ a^3 + x^3 & b^3 + x^3 & c^3 + x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$
b) $f'(x) = (a - b)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$
c) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$
d) $f'(x) = (b - a)(c - a)(b - c)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$
e) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[2x^2 - 3(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \frac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) 0 b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}.$$

a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x+3x-1$. Să se determine $f'(0)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\, dx.$$

a) $\ln\frac{10}{7}-\operatorname{arctg}\frac{2}{25}$ b) $\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 3$

c) $\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$ d) $\ln\frac{10}{9}-\operatorname{arctg}\frac{9}{25}$

e) $\ln\frac{34}{7}-\operatorname{arctg} 4+\operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}\cos 4x$.

a) $a=\frac{1}{7}, b=-\frac{1}{7}$ b) $a=-\frac{1}{17}, b=\frac{4}{17}$ c) $a=\frac{4}{17}, b=-\frac{4}{17}$

d) $a=b=\frac{5}{17}$ e) $a=-\frac{1}{7},\ b=\frac{4}{7}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obţine că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulţimea conţine 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Fracţia din enunţ poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = i^2 = -1 \ .$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a\ b\ c)$ şi atunci ecuaţia matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obţine că $a = 2$, $b = -1$ şi $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2\ \ -1\ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 2$, $y = -1$ şi $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcţia din enunţ poate fi scrisă

$$f(x) \overset{C_2:=C_2-C_1}{\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3-C_2}{=}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c) + a^3 + x^3 -$$

$$-(a+x)(b^2+ab+a^2) - (a^2+x^2)(a+b+c)],$$

de unde se obţine că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \dfrac{\pi}{6}$, de unde se obţine că $\sin 2x = \sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ şi mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\dfrac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparţine dreptei $y = 2x - 2$, pentru că

$$a+1 = 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{1}=6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x)=2e^x+3$, rezultă că $f'(0)=5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x=\dfrac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f.

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunţ poate fi scrisă

$$\int_7^{27}\frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx=\int_7^{27}\frac{1}{\sqrt{2x-5}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}+1\right)}\,dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x-5}=t$, rezultă că $x=\dfrac{t^2+5}{2}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}\,dx=dt$, iar integrala devine

$$\int_3^7\frac{1}{\dfrac{t^2+5}{2t}+1}\,dt=\int_3^7\frac{2t}{t^2+2t+5}\,dt=\int_3^7\frac{2t+2-2}{t^2+2t+5}\,dt=$$

$$=\int_3^7\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt-2\int_3^7\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt=\ln(t^2+2t+5)\Big|_3^7-2\int_3^7\frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt=$$

$$=\ln 68-\ln 20-\text{arctg}\,\frac{t+1}{2}\Big|_3^7=\ln\frac{17}{5}-\text{arctg}\,4+\text{arctg}\,2=$$

$$=\ln\frac{17}{5}-(\text{arctg}\,4-\text{arctg}\,2)=\ln\frac{17}{5}-\text{arctg}\,\frac{4-2}{1+4\cdot 2}=\ln\frac{17}{5}-\text{arctg}\,\frac{2}{9}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f, rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x) + e^{-x}(-4a\sin 4x + 4b\cos 4x) = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}[(-a+4b)\cos 4x - (4a+b)\sin 4x] = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+4b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{17} \\ b = \dfrac{4}{17} \end{cases}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020 **A**

1.(7p) Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - x - a^2 = 0\ , \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

a) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

c) $E_1 = -\dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

e) $E_1 = \dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

2.(8p) Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$ d) $\dfrac{C_4^2}{52}$ e) $\dfrac{A_4^2}{52}$

3.(9p) Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4.(8p) Să se determine acele soluţii (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0,1,0), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{10}{13}\right)$ b) $(1,0,0), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$

c) $(0,0,1), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$ d) $(0,0,1), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$

e) $\left(\dfrac{11}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right), (0,0,1)$

5.(7p) Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i,\ z = -1 + i$ b) $e = 1 + i,\ z = i$ c) $e = 1,\ z = 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ z = i$ e) $e = -i,\ z = 2 - i$

6.(8p) Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos\frac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

7.(8p) Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8.(9p) Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) nu există e) 1

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

10.(8p) Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

11.(8p) Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x\sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x\cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$

d) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{10}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2020

1. Din relaţiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 \cdot x_2 = -a^2$ şi atunci

$$E_1 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1 \cdot x_2)^3} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{1-3(-a^2)}{(-a^2)^3} = -\frac{1+3a^2}{a^6}$$

şi

$$E_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1 - 4(-a^2) = 1 + 4a^2,$$

deci $E_2 = \sqrt{1 + 4a^2}$.

Răspuns corect: c).

2. Extrăgând simultan 2 cărţi la întâmplare din pachetul de 52 de cărţi de joc, numărul cazurilor posibile este C_{52}^2. Cum cele două cărţi trebuie să fie doi aşi de aceeaşi culoare, ei pot fi 2 aşi roşii sau 2 aşi negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

3.

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum rang $A = 2 =$ rang $\overline{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale x, y şi $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha \end{cases},$$

de unde obţinem

$$x = \frac{3-3\alpha}{4} \quad \text{şi} \quad y = \frac{1-\alpha}{4}\ ,$$

care înlocuite în relaţia $x^2+y^2+z^2=1$ ne conduc la ecuaţia $13\alpha^2-10\alpha-3=0$ cu soluţiile:

$$\alpha_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x=0,\ y=0,\ z=1$$

şi

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{12}{13}\ ,\ y=\frac{4}{13}\ ,\ z=-\frac{3}{13}\ .$$

Răspuns corect: c).

5. Cum legea de compoziţie din enunţ poate fi scrisă

$$x * y = (x-i)\cdot(y-i)+i,$$

elementul neutru $e = i+1$ se găseşte uşor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $x * a = a * x = a$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ şi obţinem $a = i$.

În concluzie, $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5 = i$

Răspuns corect: b).

6. Cum $\sin a = \dfrac{3}{5}$ şi $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a = -\dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Răspuns corect: d).

7. Cum ecuaţia dreptei CD este $y = x-1$, putem considera $P(a, a-1) \in CD$, $a \in \mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$, deci tg $(\widehat{APC}) =$ tg $(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left|\frac{m_{AP}-m_{CD}}{1+m_{AP}\cdot m_{CD}}\right| = \left|\frac{m_{BP}-m_{CD}}{1+m_{BP}\cdot m_{CD}}\right|$$

care ne conduce la ecuaţia

$$\left|\frac{a}{3-a}\right| = 1 \iff a = \frac{3}{2} \implies P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \implies OP = \frac{\sqrt{10}}{2}\ .$$

Răspuns corect: e).

8. Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulţim cu conjugata şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine ecuaţia $y = x$.

Răspuns corect: e).

10. Cum

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x}\ ,$$

rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$ şi strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru f.

Răspuns corect: a).

11. Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int (2x-1)\cos 2x dx &= \int (2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\begin{aligned}\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}&=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}=\\&=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}=\\&=\frac{(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x}{\sin x+2\cos x},\end{aligned}$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A=\frac{4}{5}$ şi $B=-\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{5}\,dx-\frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}\,dx=\\&=\frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\\&=\frac{\pi}{5}+\frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

Bibliografie

[1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruţa, D. Rendi, I. Mihuţ, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învaţământul superior*, Editura Politehnica, 2010.

[2] Gh. Cenuşă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Şerban, O. Vegheş, *Admitere ASE Bucureşti, Teste grilă şi autoevaluare*, 2005-2008, Editura Cison, Bucureşti.

[3] *Gazeta Matematică*.

[4] P. Găvruţa, I. Goleţ, D. Păunescu, C. Arieşanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Ţigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrişor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în Universitatea Politehnica Timişoara*, Editura Politehnica Timişoara, 2013.

[5] Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A. Bucureşti, 1994.

[6] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didatică şi Pedagogică, 1978.

[7] C. Ionescu-Ţiu, L. Pîrşan *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975.

[8] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educaţiei Naţionale*.

[9] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicaţii*, Editura Albatros, 1987.

[10] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.

[11] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

[12] *Probleme date la olimpiade şi concursuri de matematică.*

[13] V. Radu, *Teme şi probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.

[14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educaţiei Naţionale.*