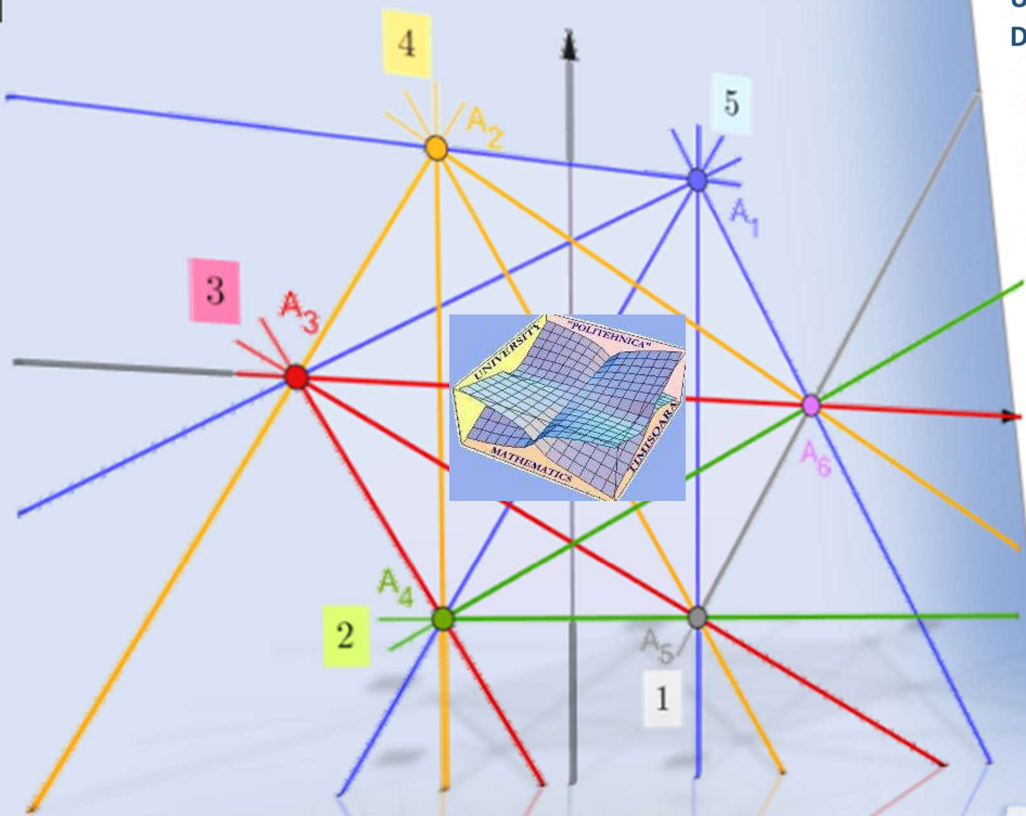
UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ



CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2022 la UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

ISBN 978-606-35-0469-3

Editura POLITEHNICA

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEŞANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIŞOR
NICOLAE LUPA
ROMEO NEGREA
GHEORGHE MOZA
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN
EMANUEL CISMAŞ

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru examenul de admitere din anul 2022 la UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIŞOARA

EDITURA POLITEHNICA
2022

PREFAŢĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultăţile Universităţii Politehnica Timişoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competenţelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conţinuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educaţiei Naţionale. În acelaşi timp s-a ţinut cont şi de manualele alternative de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deşi problemele propuse sunt de tip grilă cu şase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv prezenta culegere poate fi utilizată şi la pregătirea examenului de Bacalaureat dar şi a unor concursuri şcolare.

Ca structură, cartea are cinci părţi: *Un rezumat al cunoştinţelor dobândite la liceu*, *Probleme de algebră*, *Probleme de trigonometrie şi geometrie plană*, *Probleme de analiză matematică*, respectiv în final *Subiectele date la admitere în anii 2014 – 2021 cu rezolvările integrale.*

Rezumatul cunoştinţelor dobândite în liceu e necesar absolvenţilor care vin din diverse licee cu pregătire matematică inegală. Mai mult, acest rezumat se va dovedi util studenţiilor din anul întâi care vor avea astfel un punct de referinţă pentru valoarea adăugată de cursurile universitare. Problemele propriu zise se regăsesc în părţile doi, trei şi patru ale volumului.

Autorii

Cuprins

UN REZUMAT AL CUNOŞTINŢELOR DOBÂNDITE LA LICEU

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^2+b^2 \text{ nu se poate descompune în } \mathbb{R}$$

$$a^2+b^2 = (a-ib)(a+ib) \text{ în } \mathbb{C}$$

$$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^3+b^3 &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\\ a^3-b^3 &= (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)\end{aligned}$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}_{n \text{ termeni}}$$

$$a^{2p+1}+b^{2p+1}=(a+b)\underbrace{\left(a^{2p}-a^{2p-1}b+\cdots-ab^{2p-1}+b^{2p}\right)}_{2p+1 \text{ termeni}}$$

Progresii aritmetice şi progresii geometrice

	Progresia aritmetică	Progresia geometrică
	$\div\ a_1, a_2, ..., a_n, ...$	$\div\div\ a_1, a_2, ..., a_n, ...$
Term. gen.	$a_n = a_1 + r\cdot(n-1) \quad (r \neq 0)$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (q \neq 0; 1)$
Raţia	$r = a_{k+1} - a_k$	$q = \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \quad (a_k \neq 0)$
Suma	$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$	$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$
	$S_n = \dfrac{(a_n + a_1)\cdot n}{2} \quad (S_1 = a_1)$	$S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (S_1 = a_1)$
	$a_k = \dfrac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$	$a_k = \sqrt{a_{k-1}\cdot a_{k+1}} \quad (q > 0)$

Funcţii

Fie A şi B două mulţimi nevide; se numeşte *funcţie* definită pe A cu valori în B orice lege de corespondenţă (relaţie) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$.

Notaţia "$f : A \to B$, $y = f(x)$" se citeşte "funcţia f definită pe A cu valori în B de relaţia $y = f(x)$".

Mulţimea A este domeniul de definiţie al funcţiei f iar mulţimea B reprezintă domeniul de valori al acesteia.

Mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ poartă numele de *grafic* al funcţiei.

Funcţii bijective

Funcţia $f : A \to B$ este *injectivă* dacă şi numai dacă este îndeplinită următoarea proprietate:

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in A \text{ din } x_1 \neq x_2 \text{ rezultă } f(x_1) \neq f(x_2).$$

În practică, pentru dovedirea injectivităţii, acestă formă a definiţiei poate fi dificil de utilizat. Este preferată formularea (logic echivalentă)

$$(\forall)\, x_1, x_2 \in A \text{ din } f(x_1) = f(x_2) \text{ rezultă } x_1 = x_2.$$

Dacă există cel puţin o pereche de elemente x_1, x_2 din domeniul de definiţie A cu $x_1 \neq x_2$ dar $f(x_1) = f(x_2)$ atunci funcţia f nu este injectivă.

Interpretarea geometrică a injectivităţii pentru funcţii reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$) este sugestivă:

$f : A \to B$ este injectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, întâlneşte graficul funcţiei f în cel mult un punct.

Imaginea funcţiei $f : A \to B$ este submulţimea domeniului de valori B alcătuită din toate elementele de forma $y = f(x)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in B \mid (\exists)\, x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}.$$

Funcţia $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă şi numai dacă $\operatorname{Im}(f) = B$ sau, altfel spus,

$$(\forall)\, y \in B \text{ ecuaţia } y = f(x) \text{ are cel puţin o soluţie } x \in A.$$

Interpretarea geometrică a surjectivităţii pentru funcţii reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$) :

$f : A \to B$ este surjectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, întâlneşte graficul funcţiei f în cel puţin un punct.

Funcţia $f : A \to B$ este *bijectivă* dacă şi numai dacă f este şi injectivă şi surjectivă.

Interpretarea geometrică a bijectivităţii pentru funcţii reale $(B \subset \mathbb{R})$ de variabilă reală $(A \subset \mathbb{R})$:

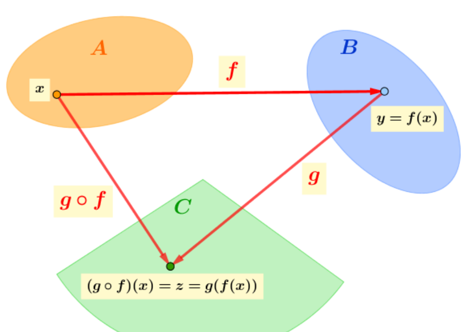
$f : A \to B$ este bijectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, întâlneşte graficul funcţiei f într-un singur punct.

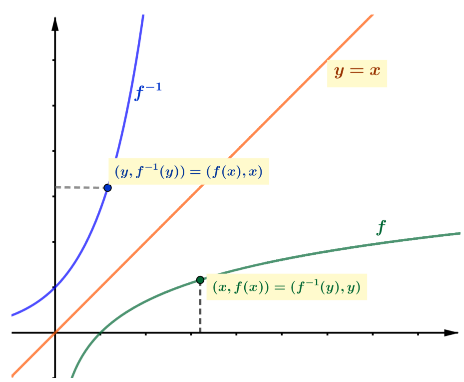
Compunerea funcţiilor

Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ definite prin relaţiile $y = f(x)$, respectiv $z = g(y)$. Funcţia ce asociază fiecărui element x din mulţimea A elementul $z = g(f(x))$ din mulţimea C se numeşte *funcţie compusă* şi se notează prin $g \circ f$. Mai precis, $g \circ f : A \to C$ este definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Evident, ordinea în care se efectuează operaţia de compunere nu este aleatoare, ci este bine determinată: domeniul de definiţie al funcţiei g (pe prima poziţie în expresia $g \circ f$) trebuie să coincidă cu domeniul de valori al funcţiei f (situată pe poziţia secundă).





Funcţii inversabile

Funcţia $f : A \to B$ este *inversabilă* dacă şi numai dacă există o funcţie $f^{-1} : B \to A$ ce verifică relaţiile

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in B) \quad \text{şi} \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in A).$$

Funcţia $f^{-1}: B \to A$, $x = f^{-1}(y)$ se numeşte *inversa* funcţiei $f : A \to B$, $y = f(x)$.

Teoremă

Funcţia $f : A \to B$ este inversabilă d.d. este bijectivă.

Interpretarea geometrică a inversabilităţii pentru funcţii reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$) :

$f : A \to B$ este inversabilă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, întâlneşte graficul funcţiei f într-un singur punct.

Graficele funcţiei f şi a funcţiei inverse f^{-1}, reprezentate în acelaşi sistem de axe, sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

Principiul inducţiei matematice

Problemă

Să se arate că propoziţia $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, $(n_0, n \in \mathbb{N})$.

Etapa I VERIFICAREA Se dovedeşte că $\mathbf{P}(n_0)$ este adevărată .

Etapa a-II-a PASUL INDUCTIV

Presupunem că $\mathbf{P}(k)$ este adevărată .

Demonstrăm, utilizând presupunerea, că $\mathbf{P}(k+1)$ este adevărată .

În final, $\mathbf{P}(n_0)$ fiind adevărată (fapt verificat la etapa I), rezultă că $\mathbf{P}(n_0+1)$ este de asemenea adevărată (consecinţă a pasului inductiv). Mai departe, conform pasului inductiv, şi propoziţia $\mathbf{P}(n_0+2)$ este adevărată şi aşa mai departe, $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n = n_0 + m,\ m \in \mathbb{N}$.

Sume remarcabile (1)

$$\begin{aligned}
1+2+3+...+n &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}\\
1^2+2^2+3^2+...+n^2 &= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\\
1^3+2^3+3^3+...+n^3 &= \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2
\end{aligned}$$

Binomul lui Newton

Permutări

$P_n =$ ”numărul sistemelor ordonate ce se pot forma cu $\underline{n}$ elemente date”

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$$

$$\begin{array}{lclclcll} n! & = & (n-1)! \cdot n & ; & n! & = & (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n & ; \\ (n+1)! & = & n! \cdot (n+1) & ; & 0! & = & 1 & . \end{array}$$

Aranjamente

$A_n^m =$ "numărul sistemelor ordonate de $\underline{m}$ elemente
ce se pot forma cu $\underline{n}$ elemente date"

$$\begin{array}{lcl} A_n^m & = & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1) \\ A_n^m & = & \dfrac{n!}{(n-m)!} \end{array}$$

$$A_n^0 = 1 \quad ; \quad A_n^1 = n \quad ; \quad A_n^n = n! \quad .$$

Combinări

$C_n^m =$ "numărul submulţimilor de $\underline{m}$ elemente
ce se pot forma cu $\underline{n}$ elemente date"

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad ; \quad C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-m+1)}{m!} \quad ;$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \ .$$

$$\begin{array}{lclclcllclcll} C_n^0 & = & C_n^n & = & 1 & ; & C_n^1 & = & C_n^{n-1} & = & n & ; \\ C_n^2 & = & C_n^{n-2} & = & \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} & ; & C_n^k & = & C_n^{n-k} & (& k \le n &). \end{array}$$

(formula combinărilor complementare)

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1} \quad ; \quad C_n^k = \frac{k+1}{n-k} \cdot C_n^{k+1} \quad ;$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k .$$

Triunghiul lui Pascal (calculul rapid al tuturor combinărilor $C_n^{\cdot}$)

$$\begin{array}{lccccccccccccccl}
n=1 & & & & & & 1\searrow & & \swarrow 1 & & & & & & & C_1^{\cdot} \\
n=2 & & & & & 1\searrow & & \swarrow 2 \searrow & & \swarrow 1 & & & & & & C_2^{\cdot} \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & C_3^{\cdot} \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & C_4^{\cdot} \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & C_5^{\cdot} \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & C_6^{\cdot}
\end{array}$$

Binomul lui Newton

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k}$$

$$\boxed{(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k}$$

(suma conţine $n+1$ termeni)

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\
T_{k+1} &= (-1)^k C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k
\end{aligned}$$

(termenul general al dezvoltării , cel de-al $k+1$-termen din dezvoltare)

$$\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \pm\frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{y}{x}$$

Sume remarcabile (2)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Numărul submulţimilor unei mulţimi finite cu n elemente este 2^n.

$$\begin{aligned}
C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + ... &= 0 \\
C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... &= 2^{n-1} \\
C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... &= 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Funcţii cu domeniul şi codomeniul mulţimi finite

Fie $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ şi $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ două mulţimi cu m şi respectiv n elemente (distincte), iar $f : X \to Y$ o funcţie arbitrară.

a) Numărul funcţiilor $f : X \to Y$ este n^m.

b) Dacă $m \leq n$ atunci numărul funcţiilor injective $f : X \to Y$ este

$$A_n^m = n\,(n-1)\ldots(n-m+1)\,.$$

Dacă $m > n$ atunci nu pot exista funcţii injective $f : X \to Y$.

c) Dacă $f : X \to Y$ este bijectivă atunci $m = n$.

Dacă $m = n$ şi $f : X \to Y$ este injectivă atunci $f : X \to Y$ este bijectivă.

Dacă $m = n$ şi $f : X \to Y$ este surjectivă atunci $f : X \to Y$ este bijectivă.

d) Numărul funcţiilor bijective $f : X \to Y$ este $P_n = n!$.

Funcţia de gradul întâi

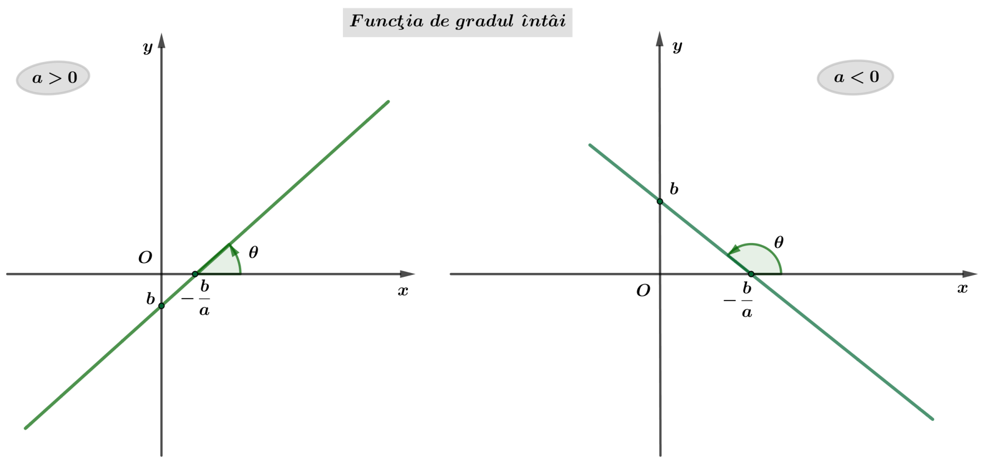
$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f\,(x) = ax + b \qquad (a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\,, \quad b \in \mathbb{R})}$$

Graficul funcţiei de gradul întâi este dreapta $y = ax + b$ ce taie axele de coordonate în punctele $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ şi $(0, b)\,.$

Soluţia ecuaţiei de gradul întâi $ax + b = 0$ este abscisa punctului în care graficul funcţiei intersectează axa $Ox : x = -\dfrac{b}{a}$.

Numărul a, coeficientul director al funcţiei de gradul întâi, este panta dreptei $y = ax + b$ şi reprezintă tangenta unghiului θ pe care dreapta îl face cu semiaxa pozitivă Ox, măsurat în sens direct trigonometric: $a = \operatorname{tg}\theta$.

Semnul coeficientului director a determină monotonia funcţiei.



Dacă $a<0$ funcţia este strict descrescătoare: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Dacă $a>0$ funcţia este strict crescătoare: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Semnul funcţiei de gradul întâi este constant pe intervalele $\left(-\infty,-\dfrac{b}{a}\right)$ şi $\left(-\dfrac{b}{a},+\infty\right)$; practic, semnul funcţiei este determinat de semnul coeficientului director a.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Funcţia de gradul al doilea

$$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad b,c\in\mathbb{R})}$$

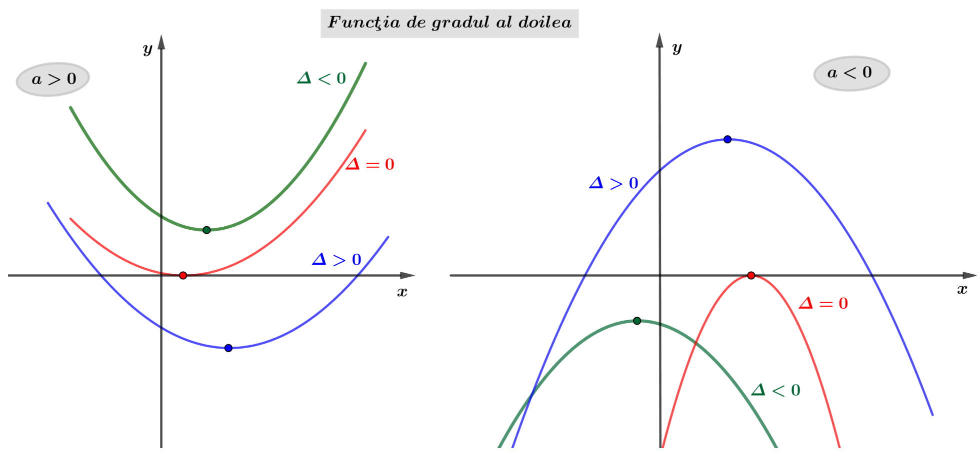
Forma canonică a expresiei de gradul al doilea se obţine prin izolarea variabilei x într-un pătrat perfect:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]} \quad \text{unde } \Delta=b^2-4ac$$

Graficul funcţiei de gradul al doilea este o parabolă având vârful în punctul $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ şi axa de simetrie $x=-\dfrac{b}{2a}$, paralelă cu Oy. Parabola intersectează axa Oy în punctul $(0,c)$.

Dacă $a>0$, vârful V este punct de *minim al graficului funcţiei*, iar dacă $a<0$ atunci vârful V este punct de *maxim al graficului funcţiei.*

Intervalele $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ şi $\left[-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$ se numesc *intervale de monotonie* ale funcţiei de gradul doi.



Intersecţia cu axa Ox depinde însă de natura rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$:

i) Dacă $\Delta<0$ atunci ax^2+bx+c este o sumă de pătrate şi nu se poate descompune în $\mathbb{R}$; ecuaţia *nu are rădăcini reale* iar parabola (graficul funcţiei de gradul al doilea) nu întâlneşte axa Ox.

ii) Dacă $\Delta=0$ atunci ax^2+bx+c se restrânge la un pătrat; ecuaţia *are o singură rădăcină reală* (dublă) $x=-\frac{b}{2a}$ iar parabola este tangentă axei Ox.

iii) Dacă $\Delta>0$ atunci ax^2+bx+c este diferenţă de pătrate şi se descompune[1] după cum urmează:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}\quad \text{unde} \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a};$$

[1]Formula de descompunere rămâne valabilă chiar dacă $\Delta<0$; în acest caz $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-(-\Delta)}=i\sqrt{-\Delta}$ iar rădăcinile $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sunt numere complexe.

ecuaţia *are două rădăcini reale distincte* x_1 şi x_2, abscisele punctelor în care parabola întâlneşte axa Ox.

Semnul funcţiei de gradul al doilea este determinat de poziţia graficului (a parabolei) faţă de axa Ox. Cele şase situaţii descrise mai sus evidenţiază rolul coeficientului director a şi al discriminantului Δ în studiul semnului. Practic, funcţia de gradul al doilea are semnul coeficientului director a cu o singură excepţie: dacă discriminantul Δ este strict pozitiv; în acest caz, *pe intervalul situat între rădăcini, funcţia are semn contrar lui* a.

i) Dacă $\Delta < 0$ atunci funcţia de gradul al doilea are acelaşi semn pe întreaga axă reală:

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	

ii) Dacă $\Delta = 0$ atunci funcţia de gradul al doilea are acelaşi semn pe întreaga axă reală cu excepţia unui singur punct, în care se anulează:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semnul lui a	

iii) Dacă $\Delta > 0$ atunci funcţia de gradul al doilea îşi schimbă semnul la trecerea prin rădăcini:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Relaţiile lui Viète evidenţiază legăturile ce există între coeficienţii şi rădăcinile ecuaţiei, indiferent dacă acestea sunt reale sau complexe:

$$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P &= x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

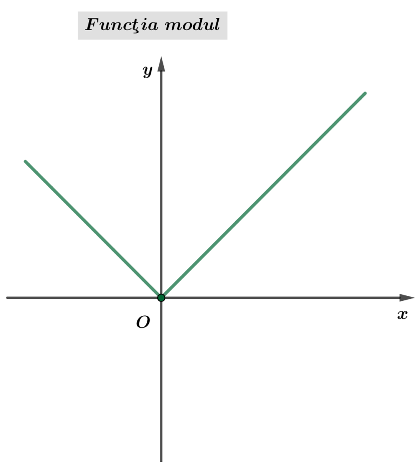
Cu ajutorul sumei $S = x_1 + x_2$ şi a produsului $P = x_1 x_2$ putem construi întotdeauna ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcini date x_1 şi x_2 :

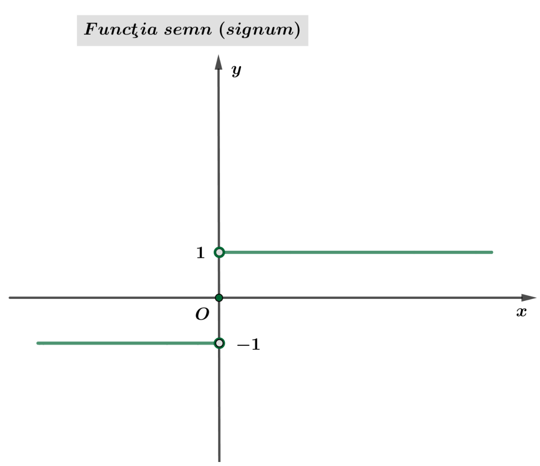
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Funcţiile modul şi signum

$$f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$sgn \; : \; \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \quad sgn(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$





Proprietăţile modulului

i) $|x| \geq 0$ şi $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ (modulul este pozitiv definit)

ii) $\dfrac{|x|}{x} = sgn(x)$ $(x \neq 0)$

iii) $|\alpha \cdot x| = \alpha \cdot |x|$ $(\alpha \geq 0)$ (modulul este multiplicativ)

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului)

iv) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Funcţia modul este *continuă* în origine *fără a fi însă derivabilă* în acest punct:

$$f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1.$$

Funcţia semn este *discontinuă* în origine; $x = 0$ este punct de discontinuitate de speţa întâi:

$$f(0-0) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(0+0) = 1.$$

Funcţia parte întreagă

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

$[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x

Proprietăţile părţii întregi

i) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$

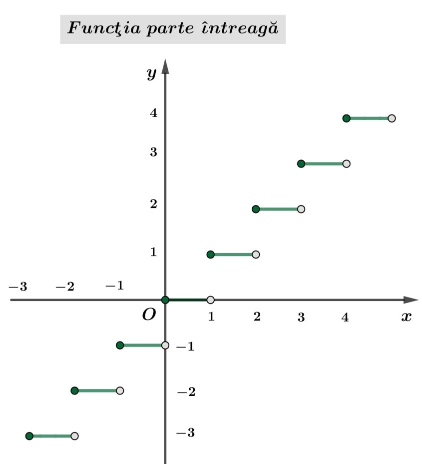
ii) $[x + n] = n + [x] \qquad (n \in \mathbb{Z})$

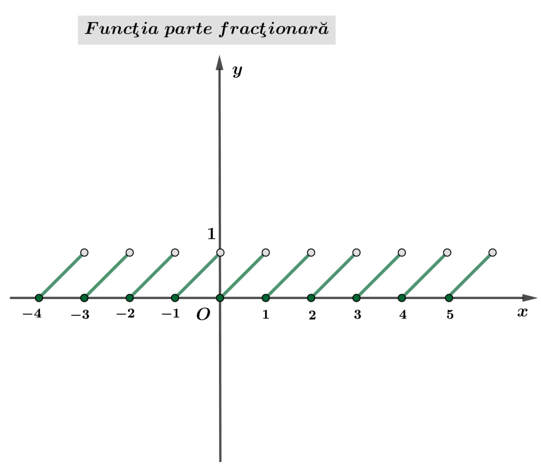
Funcţia parte întreagă este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n-0) = n - 1 \text{ şi } f(n) = f(n+0) = n$$

Punctele de abscisă întregă sunt discontinuităţi de speţa întâi.

Funcţia parte întreagă este continuă la dreapta în fiecare punct de abscisă întreagă.





Funcţia parte fracţionară

$$f : \mathbb{R} \to [0, 1), \quad f(x) = \{x\}$$

$$\{x\} = x - [x] \text{ este partea fracţionară a lui } x$$

Funcţia parte fracţionară este periodică cu perioada principală $T = 1$:

$$f(x + k) = f(x) \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}, \ (\forall)\, k \in \mathbb{Z}$$

Funcţia parte fracţionară este discontinuă în fiecare punct de abscisă întreagă:

$$f(n - 0) = 1 \ \text{ şi } \ f(n) = f(n + 0) = 0$$

Puteri şi radicali

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f(x) = \sqrt[2n]{x} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n$ a numărului pozitiv a este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $z^{2n} = a$ şi se notează prin $\sqrt[2n]{a}$.

Conform acestei definiţii, pentru numerele pozitive a şi z, are loc echivalenţa

$$\sqrt[2n]{a} = z \iff z^{2n} = a.$$

Convenim să notăm rădăcina pătrată (rădăcina de ordinul al doilea) simplu prin $\sqrt{\ }$ în loc de $\sqrt[2]{\ }$.

Observaţie

Rădăcina de ordinul doi a numărului 4 este 2 deoarece doar una din rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 = 4 \iff z_{1,2} = \pm 2$$

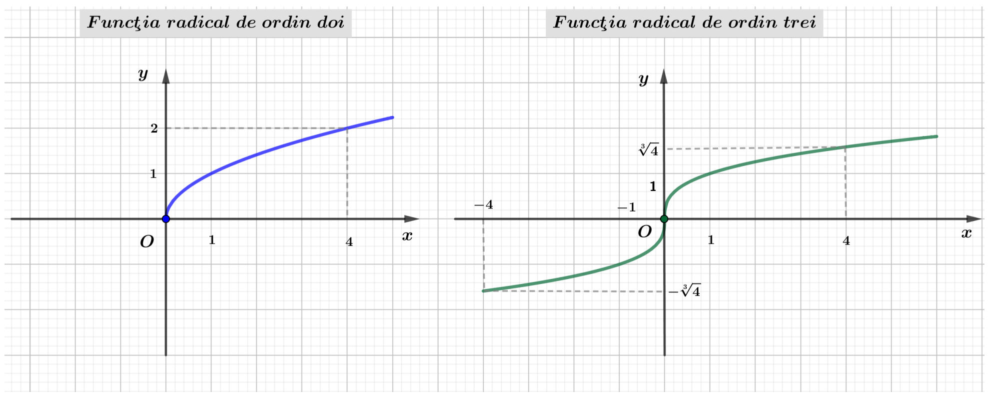
este pozitivă; prin urmare $\sqrt{4} = +2$. Exprimarea $\sqrt{4} = \pm 2$ este greşită în contextul extragerii rădăcinii reale.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[2n+1]{x} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n+1$ a numărului real a este unica soluţie reală a ecuaţiei $z^k = a$ şi se notează prin $\sqrt[2n+1]{a}$:

$$\sqrt[2n+1]{a} = z \iff z^{2n+1} = a.$$

Definiţia rădăcinii de ordinul k poate fi extinsă şi în cazul numerelor negative dacă indicele k este impar, $k = 2n+1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.



Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este tangentă vericală la graficul funcţiei radical. Originea $O\,(0,0)$ este punct de inflexiune cu tangenta verticală la graficul funcţiei radical de ordin impar.

Proprietăţile puterilor şi radicalilor

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{de\ "n"\ \ ori} \qquad (n \in \mathbb{N}^* \ , \quad a \in \mathbb{R})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \qquad (k \in \mathbb{Z} \ , \quad a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad (p \in \mathbb{Z}^* \ , \quad q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \ , \quad a \in \mathbb{R}_+ \ )$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad , \qquad \sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad , \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Funcţia exponenţială

$$f:\mathbb{R}\to(0,\infty)\,,\ \ f(x)=a^x \qquad \big(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}=(0,1)\cup(1,\infty)\big)$$

Funcţia exponenţială cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$a\in(1,\infty) \qquad\qquad x_1<x_2 \ \ \Rightarrow\ \ a^{x_1}<a^{x_2}\ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$\begin{array}{lll} x<0 & \qquad 1<a<b & \Rightarrow\ \ a^x>b^x \\ x>0 & \qquad 1<a<b & \Rightarrow\ \ a^x<b^x\ . \end{array}$$

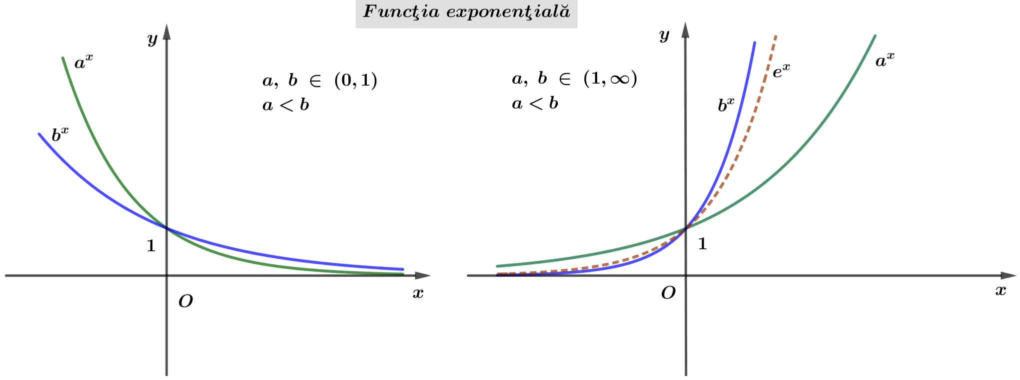
Funcţia exponenţială cu *baza subunitară* este *strict descrescătoare*:

$$a\in(0,1) \qquad\qquad x_1<x_2 \ \ \Rightarrow\ \ a^{x_1}>a^{x_2}\ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$\begin{array}{lll} x<0 & \qquad 0<a<b<1 & \Rightarrow\ \ a^x>b^x \\ x>0 & \qquad 0<a<b<1 & \Rightarrow\ \ a^x<b^x\ . \end{array}$$

Funcţia exponenţială



Proprietăţile funcţiei exponenţiale

(i) Proprietăţi de calcul

$$\begin{array}{lllllll} a^x\cdot a^y & = & a^{x+y} & ; & \dfrac{a^x}{a^y} & = & a^{x-y} \ \ ; \\ (a\cdot b)^x & = & a^x\cdot b^x & ; & \left(\dfrac{a}{b}\right)^x & = & \dfrac{a^x}{b^x} \ \ ; \\ (a^x)^y & = & a^{x\cdot y} & ; & a^{-x} & = & \dfrac{1}{a^x} \ \ . \end{array}$$

(ii) Funcţia exponenţială este *bijectivă* deoarece este injectivă

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} \neq a^{x_2} \quad (\text{echivalent } a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2)$$

şi surjectivă

$$(\forall)\, y \in (0, +\infty) \qquad (\exists)\, x \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad y = a^x.$$

Prin urmare funcţia exponenţială este *inversabilă* iar *inversa* ei este funcţia logaritmică cu aceeaşi bază (vezi paragraful ce urmează).

(iii) Dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la graficul funcţiei exponenţiale. În cazul funcţiei exponenţiale cu baza $e = 2,\, 718\,281\,...$, limitele la extremităţi sunt

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty.$$

Funcţia logaritmică

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \log_a x \qquad \big(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, \infty)\big)$$

Logaritmul unui număr pozitiv x calculat în baza a $\big(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\big)$ se notează $\log_a x$ şi reprezintă puterea la care trebuie ridicată baza a pentru a obţine x.

Conform acestei definiţii, pentru numerele strict pozitive x şi a, $a \neq 1$, are loc echivalenţa

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x.$$

Logaritmii cel mai des întâlniţi în practică sunt *logaritmul zecimal* ($\log_{10}$) pentru calcule numerice şi *logaritmul natural* ($\log_e$), cu baza $e = 2,\, 718\,281\,...$, la capitolul de Analiză matematică. Pentru simplitatea scrierii se utilizează notaţiile

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{şi} \quad \log_e x = \ln x\ .$$

Funcţia logaritmică cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$a \in (1, \infty) \qquad\qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \log_a x_1 < \log_a x_2\ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$0 < x < 1 \qquad\qquad 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad \log_a x < \log_b x$$
$$x > 1 \qquad\qquad 1 < a < b \quad \Rightarrow \quad \log_a x > \log_b x\ .$$

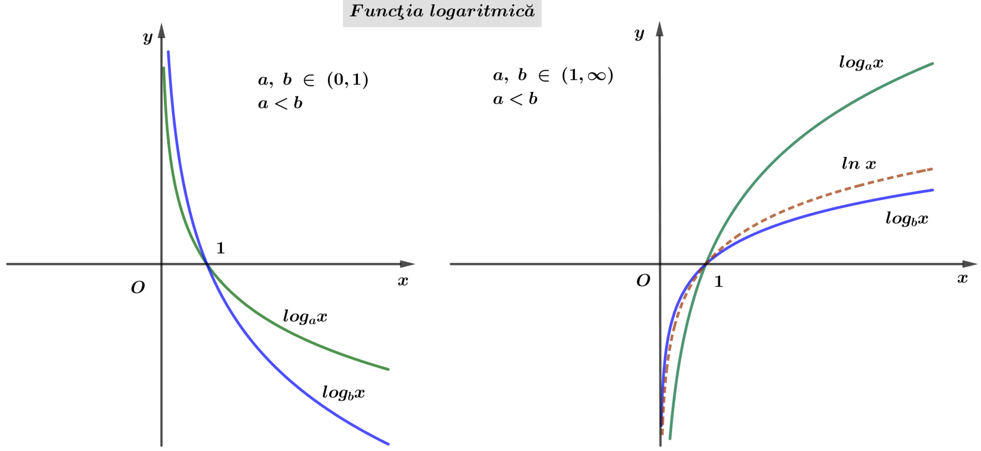
Funcţia exponenţială cu *baza subunitară* este *strict descrescătoare*:

$$a \in (0,1) \qquad\qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \ .$$

În plus, au loc relaţiile:

$$\begin{array}{lll} 0 < x < 1 & \qquad 0 < a < b < 1 & \Rightarrow \quad \log_a x < \log_b x \\ x > 1 & \qquad 0 < a < b < 1 & \Rightarrow \quad \log_a x > \log_b x \ . \end{array}$$

Funcţia logaritmică



Proprietăţile funcţiei logaritmice

(i) Proprietăţi de calcul

$$\begin{array}{lllllll} \log_a xy & = & \log_a x + \log_a y & ; & \log_a \dfrac{x}{y} & = & \log_a x - \log_a y \quad ; \\ \log_a 1 & = & 0 & ; & \log_a a & = & 1 \quad ; \\ \log_a x^r & = & r \log_a x & ; & \log_{a^r} x & = & \dfrac{1}{r} \log_a x \quad ; \\ \log_a \sqrt[n]{x} & = & \dfrac{1}{n} \log_a x & ; & \log_a \dfrac{1}{x} & = & -\log_a x \quad . \end{array}$$

(ii) Funcţia logaritmică este *bijectivă* deoarece este injectivă

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2 \quad (\text{echivalent } \ \log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

şi surjectivă

$$(\forall)\, y \in \mathbb{R} \qquad (\exists)\, x \in (0, +\infty) \quad \text{a.î.} \quad y = \log_a x.$$

Prin urmare funcţia logaritmică este *inversabilă* iar *inversa* ei este funcţia exponenţială cu aceeaşi bază.

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x \qquad (\forall)\, x \in (0, +\infty) \\ \log_a a^y &= y \qquad (\forall)\, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La pagina 4, figura din partea dreaptă, funcţiile exponenţială cu baza e şi inversa ei, logaritmul natural, sunt reprezentate în acelaşi sistem de coordonate. Graficele celor două funcţii sunt simetrice faţă de prima bisectoare.

(iii) Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul funcţiei logaritmice. În cazul logaritmului natural, limitele la extremităţi sunt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty.$$

(iv) Formulele de schimbare a bazei logaritmilor

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \;\; ; \;\; \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \;\; ;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Polinoame şi ecuaţii algebrice

Împărţirea polinoamelor. Divizibilitate.

$f, g \in \mathbb{C}[X]$ polinoame având gradele $n = \text{grad}\,(f)$ şi respectiv $m = \text{grad}\,(g)$

$$n \geq m \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} f : g = c \text{ rest } r \quad \text{unde} \quad \text{grad}\,(r) < m \\ \text{grad}\,(c) = n - m \end{array}$$

Teorema împărţirii cu rest

$$f : g = c \text{ rest } r \quad \text{d.d.} \quad f = g \cdot c + r \qquad \text{(proba împărţirii)}$$

Polinomul f este *divizibil* prin g dacă şi numai dacă $r \equiv 0$ (citeşte: r este polinomul identic nul sau, mai precis, coeficienţii restului r sunt toţi nuli).

Polinoamele f şi g sunt *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1 (se notează: $(f, g) = 1$).

Teorema lui Bézout

Restul împărţirii lui f prin $(x - a)$ este $r = f\,(a)\,.$

Consecinţe

a) f este divizibil prin $(x - a) \Longleftrightarrow f(a) = 0$

b) f este divizibil prin $g \Longleftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini (cu multiplicităţi identice) pentru f.

Teorema fundamentală a algebrei

Orice polinom cu coeficienţi complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

Consecinţă

Orice polinom $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{C}[X]$ are exact n rădăcini complexe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (distincte sau nu) şi prin urmare se descompune în factori primi de gradul întâi:

$$f = a_0(X - x_1)^{n_1} \cdot (X - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (X - x_k)^{n_k}$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ reprezintă multiplicităţile rădăcinilor distincte $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Relaţiile lui Viète

$gr\,(f) = 2 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^2 + a_1X + a_2$

$f = a_0(X - x_1)(X - x_2) = a_0X^2 - a_0(x_1 + x_2)X + a_0x_1x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\,x_2 & = & \dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

$$gr\,(f) = 3 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) =$$

$$= a_0X^3 - a_0(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_0\,(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)\,X - a_0x_1x_2x_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\,x_2 + x_2\,x_3 + x_3\,x_1 & = & \dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1\,x_2\,x_3 & = & -\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$$gr\,(f) = 4 \quad \Rightarrow \quad f = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) =$$

$$= a_0X^4 - a_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)X^3 + a_0(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_2x_4 + x_1x_3 & = & \dfrac{a_2}{a_0} & \heartsuit \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 & = & -\dfrac{a_3}{a_0} & \diamondsuit \\ x_1x_2x_3x_4 & = & \dfrac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

$\heartsuit$ se scrie mai convenabil: $\quad x_1\,x_2 + x_3\,x_4 + (x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) = \dfrac{a_2}{a_0}$

$\diamondsuit$ se scrie mai convenabil: $\quad x_1\,x_2\,(x_3 + x_4) + x_3\,x_4\,(x_1 + x_2) = -\dfrac{a_3}{a_0}$

Tipuri speciale de ecuaţii de grad superior

a) Ecuaţii binome

$$x^n - a = 0$$

- se scrie a sub formă trigonometrică: $\quad a = r(\cos t + i \sin t)$
- se extrage rădăcina complexă de ordinul n:

$$x_k \in \left\{ \sqrt[n]{r}(\cos\frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{t + 2k\pi}{n}) \mid k \in \{0, 1, 2, ..., (n-1)\} \right\}$$

b) Ecuaţii bipătrate şi tripătrate

$$x^4 + a\,x^2 + b = 0 \qquad \text{substituţia} \qquad x^2 = y$$

$$x^6 + a\,x^3 + b = 0 \qquad \text{substituţia} \qquad x^3 = y$$

c) Ecuaţii reciproce

• Ecuaţia reciprocă de gradul 3

$$a\,x^3 + b\,x^2 + b\,x + a = 0$$

admite rădăcina $x_1 = -1$.
Se aplică schema lui Horner şi se obţine o ecuaţie de gradul doi.

• Ecuaţia reciprocă de gradul 4

$$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

Prin împărţirea cu x^2 rezultă $a\,x^2 + b\,x + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, echivalent, după gruparea termenilor

$$a\,(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b\,(x + \frac{1}{x}) + c = 0.$$

Se face substituţia $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.
Se rezolvă ecuaţia redusă: $a\,(t^2 - 2) + bt + c = 0$.
Se revine la variabila x rezolvând ecuaţiile de gradul al doilea: $x + \dfrac{1}{x} = t_1$ şi $x + \dfrac{1}{x} = t_2$.

• Ecuaţia reciprocă de gradul 5

$$a\,x^5 + b\,x^4 + c\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

admite rădăcina $x = -1$.
Se aplică schema lui Horner şi se obţine o ecuaţie reciprocă de gradul 4:

	a	b	c	c	b	a
-1	a	$b-a$	$-b+a+c$	$b-a$	a	0

$$a\,x^4 + (b-a)\,x^3 + (a-b+c)\,x^2 + (b-a)\,x + a = 0$$

d) Ecuaţii cu coeficienţi întregi

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{Z}[X]$

$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + ... + a_n = 0$

Rădăcinile întregi se află printre divizorii termenului liber a_n

Rădăcinile raţionale $\dfrac{p}{q}$ se află printre fracţiile $\dfrac{p}{q}$ cu

p, divizor al termenului liber a_n
q, divizor al coeficientului director a_0

e) Ecuaţii cu coeficienţi raţionali

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{Q}[X]$

$a + b\sqrt{q} \qquad (a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0,\ q$ nu este pătrat perfect$)$

Dacă $x_1 = a + b\sqrt{q}$ este rădăcină pentru f atunci $x_2 = a - b\sqrt{q}$ este de asemenea rădăcină pentru f, caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - b\sqrt{q})\,(X - a + b\sqrt{q}) = (X - a)^2 - b^2 q.$$

f) Ecuaţii cu coeficienţi reali

$f = 0 \qquad f \in \mathbb{R}[X]$

$a + i\, b \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$

Dacă $x_1 = a + i\, b$ este rădăcină pentru f atunci $x_2 = a - i\, b$ este de asemenea rădăcină pentru f, caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - i\, b)\,(X - a + i\, b) = (X - a)^2 + b^2.$$

Matrici şi determinanţi

Matricea este un tabel de numere (reale sau complexe), numite elementele matricii, identificate prin poziţia pe care acestea le ocupă: elementul notat a_{ij} se găseşte la intersecţia liniei i cu coloana j.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{ij} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj-1} & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}\,.$$

Matricea A este o matrice dreptunghiulară de tipul $m \times n$ deoarece are m linii şi n coloane. Dacă numărul de linii coincide cu numărul de coloane $(m = n)$, spunem că A este o matrice pătrată de ordinul n.

Operaţii cu matrici

- *adunarea* matricilor de acelaşi tip: $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$;
- *înmulţirea cu un scalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$): $\alpha \cdot [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$;
- *înmulţirea matricilor* se realizează după regula "*linie pe coloană*" şi este posibilă doar dacă numărul coloanelor primului termen $[a_{ik}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ este egal cu numărul liniilor celui de-al doilea termen $[b_{kj}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$:

$$[a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right].$$

Spre exemplu, produsul matricii A având trei linii şi două coloane $(m = 3, p = 2)$ cu matricea B formată din două linii şi patru coloane $(p = 2, n = 4)$ este matricea $C = A \cdot B$ cu trei linii şi patru coloane $(m = 3, n = 4)$:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}.$$

Chiar dacă se poate calcula $A \cdot B$, în general $B \cdot A$ nu are sens. Mai mult, în cazul matricilor pătrate, deşi produsele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ au ambele sens, în general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Cu alte cuvinte, produsul matricelor pătrate nu este o operaţie comutativă.

Matricea nulă $\mathbf{0}$, matricea cu toate elementele egale cu 0, este element neutru la adunare.

Matricea pătrată de ordinul n, notată I_n şi numită *matricea unitate* de ordinul n, având toate elementele nule cu excepţia celor situate pe diagonala principală, care sunt egale cu 1, este element neutru la înmulţirea matricilor.

Determinantul unei matrici pătrate este numărul (real sau complex) calculat după regula:

$$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

unde σ parcurge toate permutările mulţimii $\{1, 2, 3, ..., n\}$ iar $sgn\,(\sigma)$ desemnează signatura permutării σ (adică numărul inversiunilor din σ). Reamintim că numărul de permutări al unei mulţimi cu n elemente este egal cu $n!$, deci suma din definiţie are $n!$ termeni.

Calculul unui determinant cu formula din definiţie este laborioasă, nepractică.

Determinantul matricelor de ordinul 2

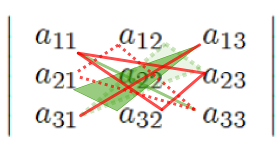
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \overset{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

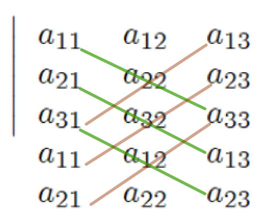
Determinantul matricelor de ordinul 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \overset{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

În aplicaţii, pentru calculul determinantului de ordinul al treilea se utilizează regula triunghiurilor sau regula lui Sarrus, reguli ilustrate în figura ce urmează.





Se numeşte *complement algebric* al elementului a_{ij} din matricea A, numărul

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ce rezultă multiplicând $(-1)^{i+j}$ cu *minorul* corespunzător elementului a_{ij}, adică determinantul matricii obţinute prin eliminarea liniei i şi coloanei j din A).

Dezvoltarea determinantului după linia i :

$$\det A = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \cdots + a_{in}\Gamma_{in}.$$

Dezvoltarea determinantului după coloana j :

$$\det A = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{\ 2j} + \cdots + a_{nj}\Gamma_{nj}.$$

Proprietăţile determinanţilor

1. Dacă într-o matrice A -toate elementele unei linii (coloane) sunt nule, sau
-două linii (coloane) sunt egale, sau
-două linii (coloane) sunt proporţionale
atunci $\det A = 0$.

2. Dacă la o linie (coloană) a unui determinant se adună elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) multiplicate cu un scalar, valoarea determinantului rămâne neschimbată.

Spre exemplu, în determinantul de ordinul trei ce urmează, la linia întâi este adunată linia a treia multiplicată cu α :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{31} & a_{12}+\alpha a_{32} & a_{13}+\alpha a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Dacă se înmulţesc elementele unei linii (sau coloane) din matricea A cu un scalar α atunci determinantul noii matrici este $\alpha \det A$.

4. Determinantul produsului dintre un scalar α şi o matrice A de ordinul n : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

5. Determinantul produsului a două matrici este egal cu produsul determinaţilor acestora: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

6. O matrice de ordinul n se numeşte matrice triunghiulară dacă toate elementele situate dedesubtul (sau deasupra) unei diagonale sunt nule. Determinantul unei matrici triunghiulare este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală sau $(-1)^n$ multiplicat cu produsul elementelor de pe diagonala secundară, după caz.

7. Descompunerea determinantului relativ la o linie (coloană) o ilustrăm în cazul particular al determinantului de ordinul trei, relativ la linia întâi:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(Trebuie subliniat că această proprietate este valabilă în cazul determinanţilor de orice ordin, indiferent de linia (sau coloana) luată în considerare.)

8. Matricile pătrate de ordinul al doilea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ verifică următoarea identitate remarcabilă (Cayley-Hamilton):

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})\, A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, I_2 = \mathbf{0}.$$

Rangul unei matrici

Rangul unei matrici arbitrare este *ordinul* celui mai mare (în sensul numărului de linii/coloane) determinant nenul ce se poate forma cu elementele matricii date (fără a modifica poziţia lor din liniile/coloanele matricii). *Rangul matricii* este egal cu r, notat $r = rang\ A$, dacă matricea admite un minor nenul de ordin r, iar toţi minorii de ordin $r+1$, dacă există, sunt nuli.

Matricea cu toate elementele nule are rangul 0.

Dacă cel puţin un element al matricii A (cu m linii şi n coloane) este nenul atunci rangul verifică inegalitatea

$$1 \leq rang\ A \leq \min\{m, n\}.$$

Cum se calculează rangul unei matrici?

Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n şi $\det A \neq 0$ atunci $rang\ A = n$.

Dacă A este o matrice arbitrară sau una pătrată cu $\det A = 0$, se procedează în felul următor:

- se fixează un element nenul a_{ij} (dacă este posibil chiar a_{11}, elementul din colţul de NV);

- se bordează elementul a_{ij} cu o nouă linie şi o nouă coloană astfel încât determinantul de ordinul al doilea rezultat să fie nenul şi se trece la etapa următoare ($rang\ A \geq 2$); dacă prin bordarea lui a_{ij} toţi determinanţii de ordinul doi rezultaţi sunt nuli atunci $rang\ A = 1$ şi calculul s-a încheiat;

- se repetă procedeul descris prin bordarea submatricii de ordinul 2 cu determinant nenul obţinută la etapa precedentă: se caută acum un determinant nenul de ordinul 3; dacă a fost găsit un astfel de determinant, se trece la etapa următoare ($rangA \geq 3$), iar dacă toţi determinanţii de ordinul 3 construiţi sunt nuli, $rangA = 2$ şi calculul s-a încheiat;

- procedeul poate fi repetat cel mult până se atinge rangul $\min\{m, n\}$ (respectiv $n - 1$ în cazul matricilor pătrate).

Inversabilitatea matricilor pătrate. Calculul inversei.

O matrice pătrată A este *inversabilă* dacă şi numai dacă există o matrice (de acelaşi ordin), notată A^{-1}, pentru care $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Condiţia necesară şi suficientă ca matricea A să fie inversabilă este

$$\det A \neq 0.$$

Cum se determină inversa unei matrici A?

- se calculează $\det A$: $\det A = 0 \Rightarrow A$ nu este inversabilă;
$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

- se calculează *transpusa* matricei $A = [a_{ij}]$, matricea $A^t = [a_{ji}]$ formată cu elementele lui A prin schimbarea liniilor în coloane (păstrând ordinea lor). (Este de remarcat identitatea $\det A = \det A^t$.)

- se calculează reciproca (adjuncta) matricei $A = [a_{ij}]$, matricea $A^* = [\Gamma_{ji}]$ formată din complemenţii algebrici ai elementelor transpusei $A^t = [a_{ji}]$.

- se determină matricea inversă $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$.

Sisteme de ecuaţii liniare

Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} .$$

Echivalent, sistemul poate fi exprimat sub forma matricială $A \cdot X = B$, unde $A = [a_{ij}]$ reprezintă matricea sistemului şi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ respectiv } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Este posibilă numai una dintre următoarele situaţii:

· Sistemul are soluţie unică şi se numeşte *compatibil determinat*;

· Sistemul admite o infinitate de soluţii şi se numeşte *compatibil nedeterminat*;

· Sistemul nu are soluţii şi se numeşte *incompatibil*.

Cazuri particulare

Sistemul Cramer: dacă A este o matrice pătrată ($m = n$, numărul necunoscutelor coincide cu cel al ecuaţiilor) şi $\det A \neq 0$ atunci sistemul este compatibil determinat, unica sa soluţie, exprimată matricial fiind $X = A^{-1} \cdot B$. Acelaşi rezultat se obţine aplicând regula lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A},$$

unde determinanţii Δ_k, $k = \overline{1,n}$ rezultă din $\Delta = \det A$ prin înlocuirea coloanei k cu cea a termenilor liberi B.

Sistemul omogen, sistemul în care toţi termenii liberi sunt nuli $b_i = 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Sistemele omogene sunt compatibile deoarece admit cel puţin soluţia $(0, 0, \ldots, 0)$, numită soluţia banală.

Matricea extinsă a sistemului este matricea obţinută prin completarea matricii A cu termenii liberi:

$$\overline{A} = (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & |\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema Kronecker-Capelli

Un sistem algebric liniar este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse a sistemului: $rang\ A = rang\ \overline{A}$.

Odată calculat rangul matricii A se evidenţiază *determinantul principal* Δ_p adică "cel mai mare determinant" nenul ce se poate forma cu elementele matricii A. Liniile determinantului principal indică ecuaţiile principale iar coloanele sale, necunoscutele principale; toate celelalte ecuaţii şi necunoscute sunt secundare. Subsistemul format de ecuaţiile principale este un sistem de tip Cramer iar soluţiile sale sunt chiar soluţiile sistemului iniţial.

Determinantul principal poate fi bordat, pe linie, cu coeficienţi situaţi în ecuaţiile secundare şi pe coloană, cu coeficienţi ai necunoscutelor secundare (evident, dacă există ecuaţii şi necunoscute secundare). Determinanţii obţinuţi prin bordare poartă numele de *determinanţi (minori) caracteristici.*

Teorema lui Rouché

Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli ($rang\ A < m$) sau dacă nu există asemenea minori ($rang\ A = m$).

Gradul de nedeterminare al unui sistem compatibil este dat de numărul de necunoscute secundare $n - rang\ A > 0$; dacă $rang\ A = n$ atunci sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare).

Un *sistem omogen* admite soluţii nebanale d.d. dacă rangul matricii sistemului este inferior numărului de necunoscute ($rang\ A < n$).

Un *sistem omogen* în care numărul ecuaţiilor coincide cu numărul necunoscutelor ($m = n$) admite soluţii nebanale dacă şi numai dacă determinantul matricii sistemului este nul ($\det A = 0$).

Structuri algebrice

Definiţie

Fie M o mulţime nevidă; o lege de corespondenţă ce asociază oricărei perechi de elemente din M, în mod unic, un element din M

$$(x, y) \mapsto x * y : M \times M \to M$$

se numeşte *lege de compoziţie* pe M.

Simbolul $*$ utilizat pentru a desemna elementul compus $x*y$ este inspirat de cele două tipuri de legi de compoziţie întâlnite din zorii educaţiei matematice, adunarea $(+)$ şi înmulţirea $(\cdot)$. În notaţie aditivă, elementul compus se notează prin $x + y$ şi se numeşte sumă iar în notaţie multiplicativă, se notează $x \cdot y$ (uneori scris pe scurt chiar xy) şi se numeşte produs.

Submulţimea $M_0 \subset M$ este *parte stabilă a lui M la legea de compoziţie* $*$ dacă şi numai dacă oricărei perechi de elemente (x_0, y_0) din $M_0 \times M_0$ îi corespunde un element situat de asemenea în M_0:

$$(\forall)\, x_0, y_0 \in M_0 \Rightarrow x_0 * y_0 \in M_0.$$

Legea de compoziţie $*$ este *asociativă* d.d.

$$(\forall)\, x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,.$$

Legea de compoziţie $*$ este *comutativă* d.d.

$$(\forall)\, x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x.$$

Elementul $e \in M$ se numeşte *element neutru pentru legea* $*$ dacă

$$(\forall)\, x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$$

Elementul neutru pentru o lege de compoziţie, dacă există, este unic.

Elementul neutru al unei legi de compoziţie de tip aditiv este notat prin 0 şi este numit *element de efect nul* (sau, mai simplu, *zero*).

Elementul neutru al unei legi de compoziţie de tip multiplicativ este notat prin 1 şi este numit *element unitate*.

Un element x se numeşte *simetrizabil în raport cu legea* $*$ dacă

$$(\exists)\, x' \in M \quad \text{a.î.} \quad x * x' = x' * x = e.$$

Elementul notat prin x' este *simetricul lui* x.

Dacă elementele x y şi z sunt simetrizabile atunci $x * y$ şi z' sunt şi ele simetrizabile. În plus, sunt verificate identităţile

$$(x * y)' = y' * x' \quad \text{şi} \quad (z')' = z.$$

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziţie de tip aditiv este notat prin $-x$ şi este numit *opusul lui* x.

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziţie de tip multiplicativ este notat prin x^{-1} şi este numit *inversul lui* x.

Definiţie

Mulţimea nevidă M, înzestrată cu legea de compoziţie $*$, este *monoid* dacă şi numai dacă legea $*$ este asociativă şi are element neutru:

$(\forall)\, x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,;$

$(\exists)\, e \in M$ a.î. $(\forall)\, x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$

Dacă legea de compoziţie este comutativă atunci M este un *monoid comutativ*.

Definiţie

Mulţimea nevidă G, înzestrată cu legea de compoziţie $*$, este *grup* dacă legea $*$ este asociativă, are element neutru şi toate elementele din G sunt simetrizabile.

Aşadar, $(G, *)$ este grup d.d. sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(\forall)\, x, y, z \in G \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)\,;$

$(\exists)\, e \in G$ a.î. $(\forall)\, x \in G \Rightarrow x * e = e * x = x;$

$(\forall)\, x \in G$ $(\exists)\, x' \in G$ a.î. $x * x' = x' * x = e.$

Dacă legea de compoziţie este comutativă atunci $(G, *)$ este un *grup comutativ* sau *abelian*.

Teoremă

Fie $(G,*)$ un grup şi $a,b\in G$ două elemente arbitrare în G. Ecuaţiile $a*x=b$ şi $y*a=b$ au soluţii unice în G, mai precis

$$\begin{aligned} a*x &= b \iff x=a'*b \quad \text{respectiv} \\ y*a &= b \iff y=b*a'. \end{aligned}$$

Dacă $(G,+)$ este un grup în care legea de compoziţie este de tip aditiv atunci pentru orice $a\in G$ şi orice numere întregi m, n, au loc identităţile:

$$ma+na=(m+n)\,a,\quad m\,(na)=(mn)\,a,\quad -(na)=n\,(-a)\,,\quad 0a=0.$$

Dacă $(G,\cdot)$ este un grup în care legea de compoziţie este de tip multiplicativ atunci pentru orice $a\in G$ şi orice numere întregi m, n, au loc identităţile

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},\qquad (a^n)^{-1}=a^{-n}\quad a^0=1.$$

Definiţie

O submulţime $H\subset G$ a unui grup $(G,*)$ se numeşte subgrup al lui G dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii

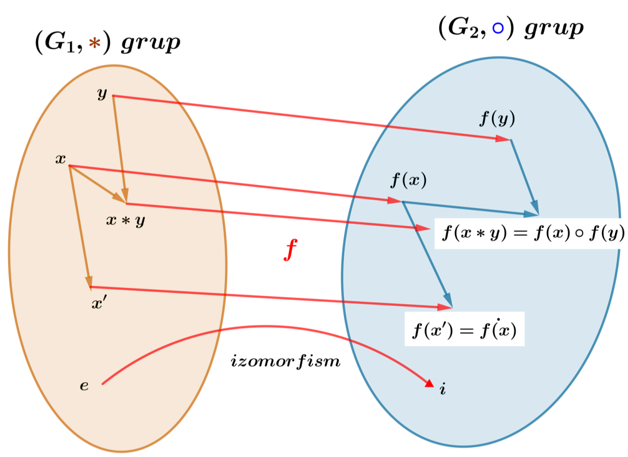
$(\forall)\,x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$;

$(\forall)\,x\in H\Rightarrow x'\in H$.

Definiţie

Fie $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ două grupuri; funcţia bijectivă $f:G_1\to G_2$ se numeşte *izomorfim* de grupuri dacă

$$f\,(x*y)=f\,(x)\circ f\,(y)\qquad (\forall)\,x,y\in G_1.$$



Exemplu

Funcţia logaritm natural $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ realizează un izomorfism între $((0, +\infty), \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor pozitive şi $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale. Într-adevăr, ln este bijectivă şi satisface condiţia

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Definiţie

O mulţime nevidă A înzestrată cu două legi de compoziţie, una aditivă şi una multiplicativă, notate tradiţional $+$ şi $\cdot$, se numeşte inel dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(A, +)$ este grup comutativ,
$(A, \cdot)$ este monoid,
înmulţirea $(\cdot)$ este distributivă faţă de adunare $(+)$, mai precis
$(\forall)\, x, y, z \in A \quad x(y+z) = xy + xz \quad$ şi $\quad (y+z)\, x = yx + zx.$

Dacă înmulţirea elementelor din A este o lege de compoziţie comutativă atunci inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel *comutativ.*

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel fără divizori ai lui zero dacă

$$x \neq 0 \quad \text{şi} \quad y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \neq 0.$$

Un inel comutativ (format din cel puţin două elemente) fără divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate.*

Elementele <u>nenule</u> $u, v \in A$ sunt divizori ai lui zero dacă $uv = 0$.

Exemplu

Inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate. Singurele elemente inversabile (adică simetrizabile faţă de operaţia multiplicativă $\cdot$) sunt 1 şi -1.

Definiţie

Fie $(A_1, +, \cdot)$ şi $(A_2, +, \cdot)$ două inele (fiecare înzestrată cu propriile sale legi de compoziţie, deşi acestea sunt notate similar); funcţia bijectivă $f : A_1 \to A_2$ se numeşte *izomorfim* de inele dacă

$$\begin{matrix} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \end{matrix} \qquad (\forall)\, x, y \in A_1.$$

Definiţie

Un inel $(K, +, \cdot)$ se numeşte corp dacă $0 \neq 1$ şi orice element nenul x este inversabil.

Exemple

Mulţimile numerice $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt corpuri comutative.

$\mathbb{Z}_p$, inelul claselor de resturi modulo p

Fie n un număr întreg arbitrar şi p un număr natural fixat; conform teoremei împărţirii cu rest, există doi întregi, q şi r unic determinaţi, astfel încât

$$n = qp + r \quad \text{cu} \quad 0 \leq r < p.$$

Numărul q se numeşte *cât* al împărţirii $n : p$ iar r se numeşte *rest.* Resturile posibile la împărţirea $n : p$ sunt 0, 1, 2, ..., $p-1$. Astfel mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se poate descompune în p submulţimi disjuncte:

$$\begin{aligned}
\left\{\ldots, -p, \boxed{0}, p, 2p, \ldots\right\} &= \{kp \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{0}, \\
\left\{\ldots, -p+1, \boxed{1}, p+1, 2p+1, \ldots\right\} &= \{kp+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{1}, \\
&\vdots \\
\{\ldots, -p+r, \boxed{\text{r}}, p+r, 2p+r, \ldots\} &= \{kp+r \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{r}, \\
&\vdots \\
\left\{\ldots, -p+(p-1), \boxed{\text{p-1}}, p+(p-1), \ldots\right\} &= \{kp+(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{not}{=} \widehat{p-1},
\end{aligned}$$

numite clase de resturi modulo p. Mulţimea tuturor claselor de resturi modulo p se notează $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \ldots, \widehat{p-1}\right\}.$$

Pe această mulţime se introduc două legi de compoziţie după cum urmează:

adunarea claselor modulo p, $\quad \widehat{a} + \widehat{b} \overset{def}{=} \widehat{a+b}$ şi

înmulţirea claselor modulo p, $\quad \widehat{a} \cdot \widehat{b} \overset{def}{=} \widehat{a \cdot b}$.

Adunarea şi înmulţirea sunt corect definite deoarece, conform definiţiei claselor de resturi, dacă întregul $k \in \widehat{r}$ şi $0 \leq r < p$ atunci $\widehat{k} = \widehat{r}$.

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel comutativ în care elementul neutru la adunare este $\widehat{0}$ iar elementul neutru la înmulţire este $\widehat{1}$.

Orice clasă de resturi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ are opus: $-\widehat{a} = \widehat{p-a}$.

Nu toate clasele de resturi din $\mathbb{Z}_p$ sunt inversabile: elementul $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ este inversabil d.d. singurul divizor comun al lui a şi p este 1.

În consecinţă, dacă a este divizor propriu al lui p ($a \neq 1$ şi $a \neq p$) atunci $p = ab$ iar $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{p} = \widehat{0}$ deci $\widehat{a}$ este divizor al lui zero.

i) Dacă <u>p este neprim</u> atunci $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ *este inel cu divizori ai lui zero.*

ii) Dacă <u>p este un număr prim</u> atunci toate elementele din $\mathbb{Z}_p \backslash \left\{\widehat{0}\right\}$ sunt inversabile ceea ce conferă lui $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ o structură de *corp comutativ.*

iii) Dacă <u>p este un număr prim</u> atunci $\widehat{a}^{p-1} = \widehat{1}$ oricare ar fi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p \backslash \left\{\widehat{0}\right\}$.

TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE

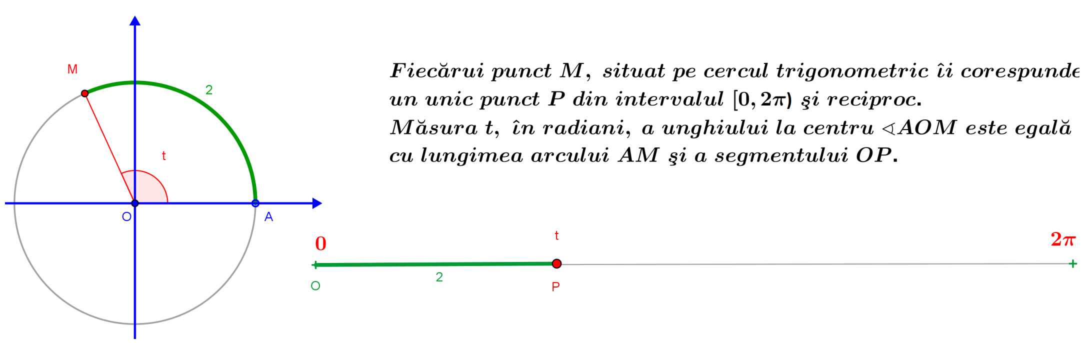
Funcţiile trigonometrice

$\mathcal{C}(O;1) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ -cercul trigonometric (centrat în originea axelor de coordonate cu raza 1).

$M(x,y)$ -punctul curent pe cercul trigonometric.

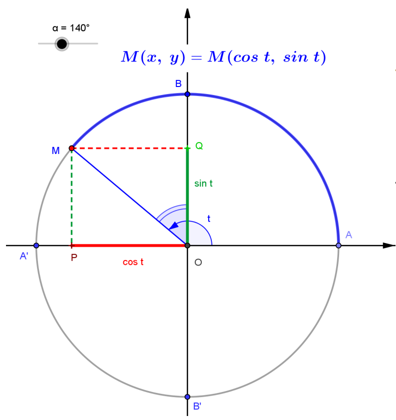
$t \in [0, 2\pi)$ -măsura în radiani a unghiului la centru format de semiaxa Ox_+ cu raza vectoare OM.

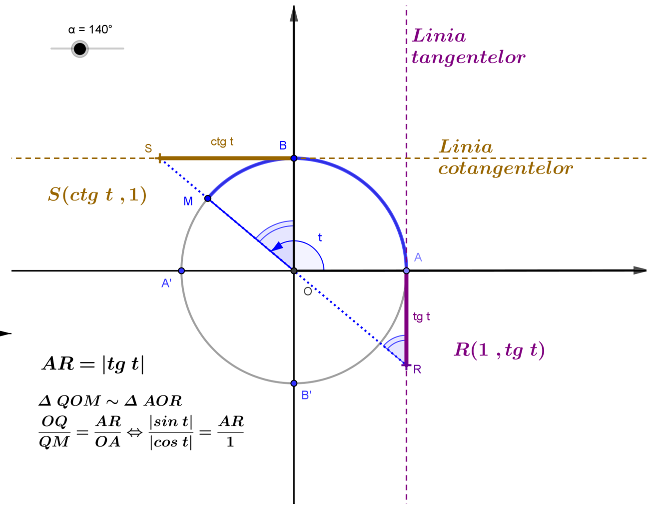
Corespondenţa $t \longleftrightarrow M(x,y)$ este bijectivă .



Fiecărui punct M, situat pe cercul trigonometric îi corespunde un unic punct P din intervalul $[0, 2\pi)$ şi reciproc.
Măsura t, în radiani, a unghiului la centru $\sphericalangle AOM$ este egală cu lungimea arcului AM şi a segmentului OP.

Definiţii $\boxed{\cos t = x, \quad \sin t = y, \quad \operatorname{tg} t = \dfrac{y}{x} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg} t = \dfrac{x}{y}.}$





Definiţia se poate extinde de la intervalul $[0, 2\pi)$ la $\mathbb{R}$ prin procedeul numit "*reducerea la perioada principală*":

$$(\forall)\, t \in \mathbb{R} \quad (\exists!)\, t^* \in [0, 2\pi) \ \text{ a.î. } \ t = t^* + 2k\pi, \quad \text{unde} \quad k \in \mathbb{Z}\ , \ k = \left[\frac{t}{2\pi}\right]$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad \cos t = \cos t^* \quad \text{şi} \quad \sin t = \sin t^*$$

Proprietăţile funcţiilor cos şi sin

cos şi sin sunt *mărginite*: $\quad |\cos t| \leq 1 \quad$ şi $\quad |\sin t| \leq 1 \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}$.

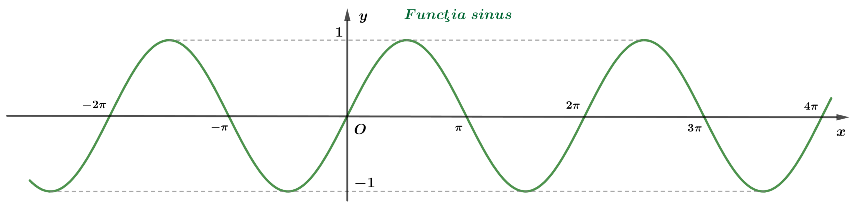
cos şi sin sunt *periodice* cu *perioada* 2π : $\begin{array}{ll} \cos(t + 2k\pi) = \cos t & (\forall)\, t \in \mathbb{R} \\ \sin(t + 2k\pi) = \sin t & (\forall)\, k \in \mathbb{Z} \end{array}$

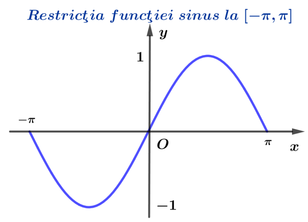
$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ este o funcţie *pară*, adică $\ \cos(-t) = \cos t$.

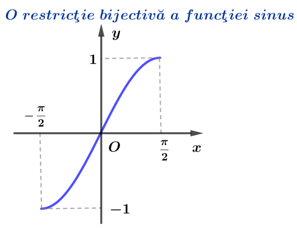
Funcţia cos este *pozitivă* în cadranele I şi IV, resp. *negativă* în II şi III.

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ este o funcţie *impară*, adică $\ \sin(-t) = -\sin t$.

Funcţia sin este *pozitivă* în cadranele *I* şi *II* resp. *negativă* în *III* şi *IV*.



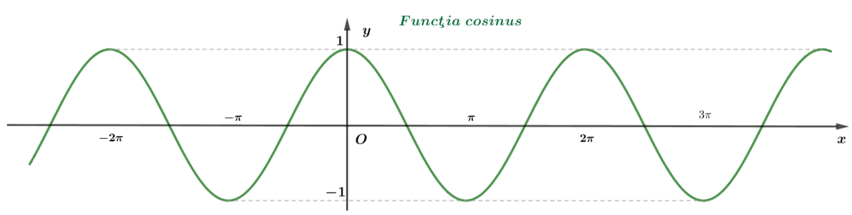


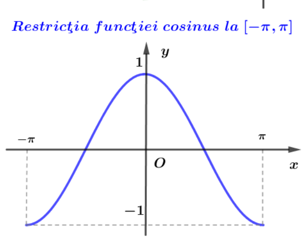


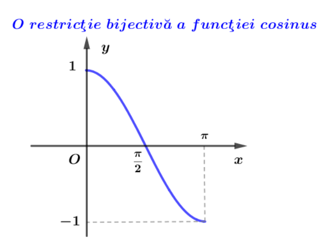
Tabelul de valori al funcţiilor sin şi cos

^{o}	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

^{o}	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1







Proprietăţile funcţiilor tg şi ctg

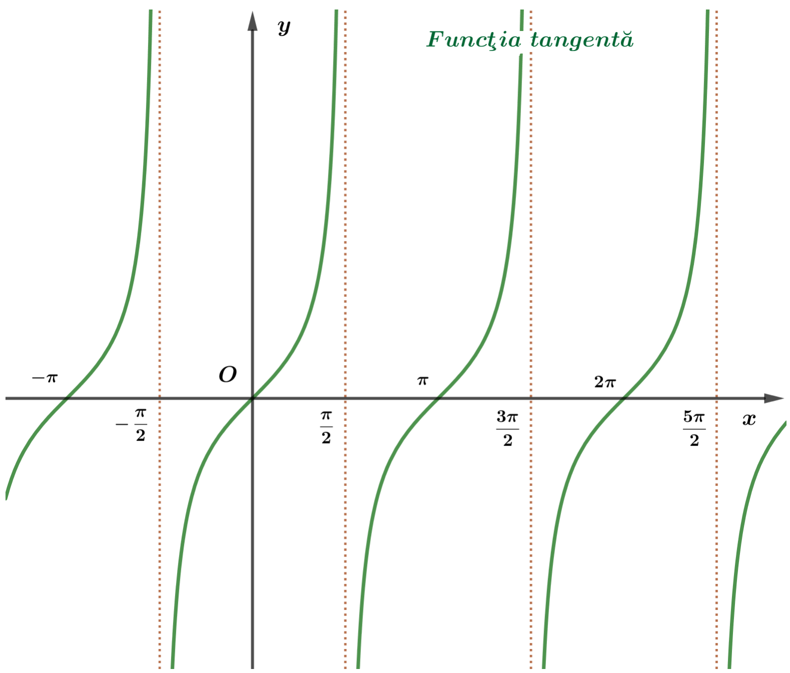
$$\operatorname{tg}(t+k\pi)=\operatorname{tg} t \qquad (\forall)\, t\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\operatorname{ctg}(t+k\pi)=\operatorname{ctg} t \qquad (\forall)\, t\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

$\operatorname{tg}:\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\,\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ este o funcţie *impară*: $\operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg} t$
.

$\operatorname{ctg}:\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$ este o funcţie *impară*: $\operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg} t$.

Funcţiile tg şi ctg sunt *pozitive* în *I* şi *III* resp. *negative* în *II* şi IV.

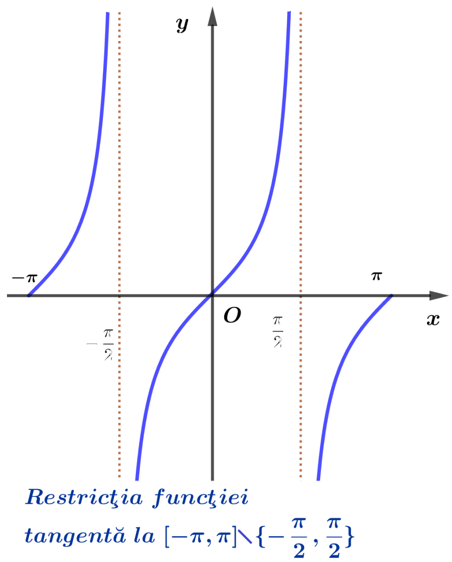


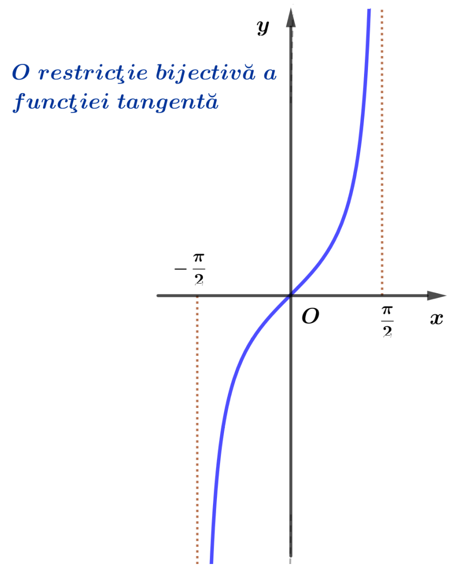
Dreptele $x=(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ sunt asimptote verticale la graficul funcţiei tangentă.

$$\lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t<\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} t=+\infty, \qquad \lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{2}\\ t>\frac{\pi}{2}}}\operatorname{tg} t=-\infty.$$

Dreptele $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ sunt asimptote verticale la graficul funcţiei cotangentă.

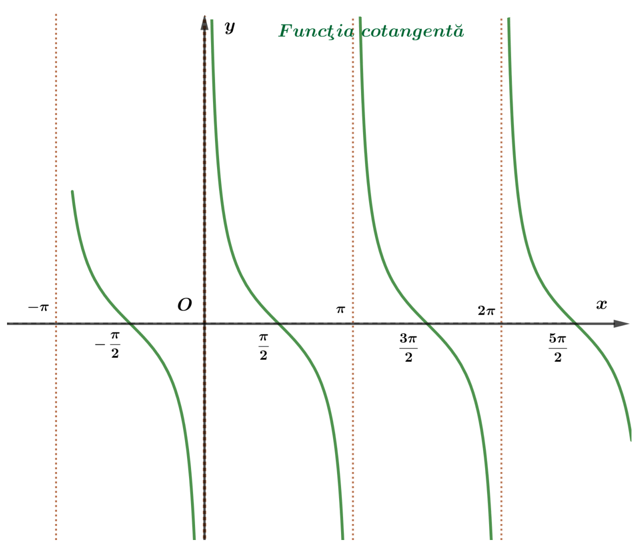
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\operatorname{ctg} t=+\infty, \qquad \lim_{\substack{t\to\pi\\ t<\pi}}\operatorname{ctg} t=-\infty.$$





Tabelul de valori al funcţiilor tg şi ctg

^{0}	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$



Relaţii între funcţiile trigonometrice

Formule fundamentale

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad ; \quad 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \quad ; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \quad .$$

Funcţiile trigonometrice ale complementului

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t \quad ; \quad \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{ctg}\, t \quad ; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \quad ; \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \mathrm{tg}\, t \quad . \end{aligned}$$

Funcţiile trigonometrice ale sumei şi diferenţei de arce

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b; \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b;$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b;$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\, a + \mathrm{tg}\, b}{1 - \mathrm{tg}\, a \mathrm{tg}\, b}; \quad \mathrm{tg}(a-b) = \frac{\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b}{1 + \mathrm{tg}\, a \mathrm{tg}\, b}.$$

Funcţiile trigonometrice ale dublului şi triplului unui arc

$$\sin 2t = 2\cos t \sin t; \qquad \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t;$$

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t = \cos^2 t - \sin^2 t; \qquad \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t;$$

$$\mathrm{tg}\, 2t = \frac{2\mathrm{tg}\, t}{1 - \mathrm{tg}^2 t}; \qquad \mathrm{tg}\, 3t = \frac{3\mathrm{tg}\, t - \mathrm{tg}^3 t}{1 - 3\mathrm{tg}^2 t}.$$

Exprimarea funcţiilor trigonometrice cu ajutorul arcului dublu

$$\sin t = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{2}}; \quad \cos t = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}}; \quad \mathrm{tg}\, t = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}};$$

Semnul din faţa radicalului $\Big\langle$ se stabileşte cadranul ce îl conţine pe t;
se alege semnul funcţiei din cadranul lui t.

Exprimarea raţională a funcţiilor trigonometrice

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}};\quad \cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}};\quad \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}.$$

Transformarea sumei/diferenţei în produs

$$\begin{array}{ll}
\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}; & \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2};\\
\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}; & \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2};\\
\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}; & \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}.
\end{array}$$

Transformarea produsului în sumă/diferenţă

$$\begin{aligned}
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b);\\
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b);\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b).
\end{aligned}$$

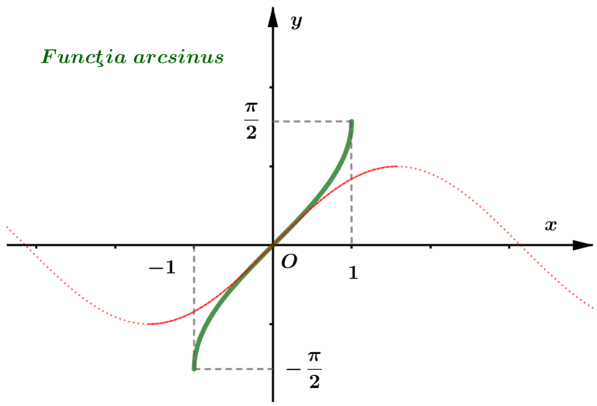
Funcţiile trigonometrice inverse

Restricţia $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiţie

$\arcsin a =$ ”arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{\pi}{2}$ al cărui sinus este a” $\quad (-1 \le a \le 1)$

$$\boxed{\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \begin{array}{lcl} \arcsin x = y & \Leftrightarrow & x = \sin y\\ x \in [-1,1] & , & y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$



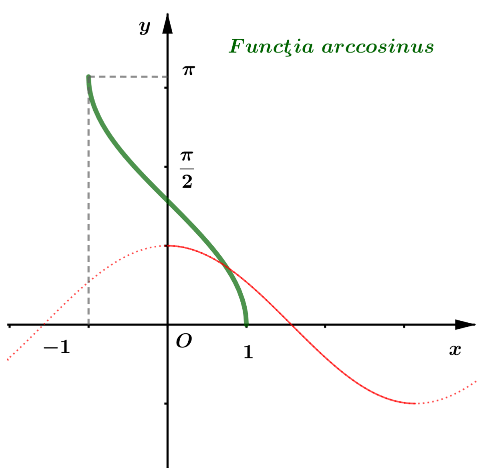
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
(arcsin este impară)

Restricţia $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiţie

$\arccos a =$ "arcul cuprins între 0 şi π al cărui cosinus este a" $(-1 \leq a \leq 1)$

$$\boxed{\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad \begin{array}{ccc} \arccos x = y & \Leftrightarrow & x = \cos y \\ x \in [-1,1] & , & y \in [0,\pi] \end{array}}$$



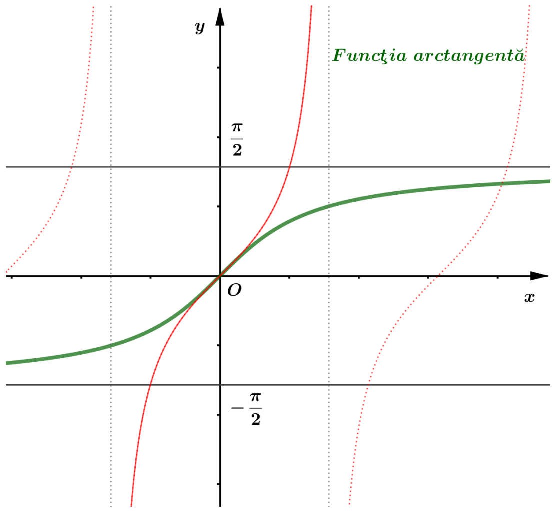
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Restricţia $\operatorname{tg} : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiţie

$\operatorname{arctg} a =$ "arcul cuprins între $-\dfrac{\pi}{2}$ şi $\dfrac{\pi}{2}$ a cărui tangentă este a" $(a \in \mathbb{R})$

$$\boxed{\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \quad \begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} x = y & \Leftrightarrow & x = \operatorname{tg} y \\ x \in \mathbb{R} & , & y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}}$$



$\text{arctg}\,(-x) = -\text{arctg}\,x$
(arctg este impară)

Dreptele $y = -\dfrac{\pi}{2}$ şi $y = \dfrac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale la graficul funcţiei arctangentă.

$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg}\,x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to\infty} \text{arctg}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Relaţii remarcabile între funcţiile trigonometrice inverse

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\ &\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right. \qquad (x \in [-1,1])$$

$$\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,\frac{1}{x} = sgn\,(x)\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

$$\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\text{arctg}\,x + \text{arctg}\,y = \text{arctg}\,\frac{x+y}{1-xy}}$$

Ecuaţiile trigonometrice elementare

1. Ecuaţia $\sin x = a$ are soluţie d.d. $a \in [-1,1]$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\left\{(-1)^k \arcsin a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

În particular, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Ecuaţia $\cos x = a$ are soluţie d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Ecuaţia $\operatorname{tg} x = a$ *are soluţie* $(\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

Mulţimea soluţiilor sale este $\{\operatorname{arctg} a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia liniară

$$a\cos t + b\sin t = c \ \left(a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0\right)$$

are soluţii dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Metode de rezolvare a ecuaţiei liniare

· Substituţia $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ conduce la sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

· Substituţia $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ conduce la ecuaţia de gradul al doilea

$$a\left(1 - z^2\right) + 2bz = c\left(1 + z^2\right).$$

Această metodă are neajunsul de a pierde (eventual) soluţiile de forma $(2k+1)\pi$.

· Metoda unghiului auxiliar constă în transformarea expresiei din membrul stâng al ecuaţiei.

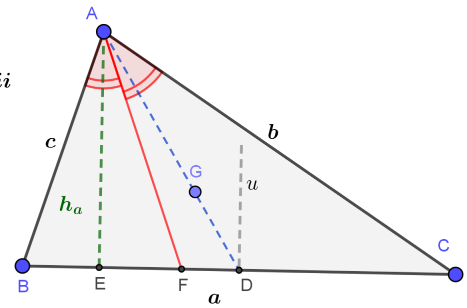
$$a\cos t + b\sin t = c \Leftrightarrow \cos t + \frac{b}{a}\sin t = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos t + \operatorname{tg}\varphi \sin t = \frac{c}{a}\ ,$$

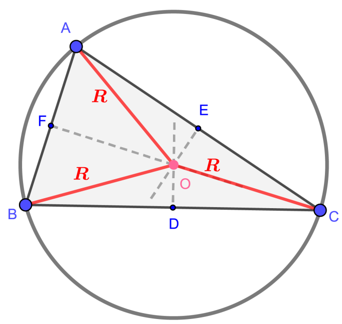
unde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numit unghi auxiliar este unicul cu proprietatea $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Rezultă imediat

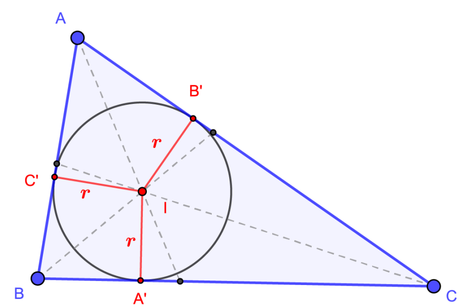
$$\begin{aligned} \cos(t - \varphi) &= \frac{c}{a}\cos\varphi \Leftrightarrow \\ t &\in \left\{\varphi \pm \arccos\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Aplicaţiile trigonometriei în geometrie

$AE \perp BC,\ h_a$ – *lungimea înălţimii*
$\widehat{BAF} \equiv \widehat{CAF},\ AF$ – *bisectoare*
$BD \equiv DC,\ AD$ – *mediană*
$G,$ *centrul de greutate*
$AG = \frac{2}{3}AD$ *şi* $GD = \frac{1}{3}AD$
$|Du \perp BC,\ |Du$ – *mediatoare*







Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Aria triunghiului

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

$$S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ca\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$$

$$S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

$$
\begin{aligned}
S &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C \\
S &= r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} \\
S &= pr \\
S &= \frac{abc}{4R}
\end{aligned}
$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(formula lui Heron)}$$

Numere complexe

Aplicaţiile trigonometriei în algebră

$\mathbb{C} = \{\ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\ ,\ i^2 = -1\}$ -mulţimea numerelor complexe

$z = x + iy$	, forma algebrică a numărului complex z
$\operatorname{Re} z = x$	, partea reală a numărului complex z
$\operatorname{Im} z = y$	, partea imaginară a numărului complex z
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	, modulul numărului complex z
$\overline{z} = x - iy$	, conjugatul numărului complex z
$z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$	

Numărul complex $z = x + iy$ este *afixul* punctului $M(x, y)$ iar conjugatul său , $\overline{z} = x - iy$, este *afixul* simetricului punctului $M(x, y)$ faţă de axa Ox.

- se notează prin t unghiul format de dreapta OM $(M \neq O)$ cu semiaxa pozitivă Ox (*argumentul* lui z);
- se notează prin r lungimea segmentului OM (*modulul* lui z);
- din definiţia funcţiilor trigonometrice rezultă

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \ (r > 0 \text{ iar } t \in [0, 2\pi)) .$$

$$z = r(\cos t + i \sin t) \ \textit{forma trigonometrică a lui } z$$

Numerele r şi t sunt cordonatele polare ale punctului $M(x,y)$: r este *raza polară*, O este *polul* iar t este *argumentul* lui z.

$$\begin{aligned} r = & \sqrt{x^2+y^2} \\ t = & \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k\pi \end{aligned}$$

$(k=0$ pt. $M\in CadrI,\quad k=1$ pt. $M\in CadrII-III,\quad k=2$ pt. $M\in CadrIV)$.

Înmulţirea şi împărţirea numerelor complexe $z_j=r_j(\cos t_j+i\sin t_j),\quad j=\overline{1,2}$

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(t_1-t_2)+i\sin(t_1-t_2)\right]$$

Formula lui Moivre

$$z \;=\; r(\cos t+i\sin t)\Rightarrow z^n=r^n\left[\cos nt+i\sin nt\right]$$

Rădăcina complexă de ordinul n *a numărului complex* $z=r(\cos t+i\sin t)$:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{t+2k\pi}{n}+i\sin\frac{t+2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{0,n-1}$$

Elemente de geometrie analitică

Vectori

Versorii axelor de coordonate: $\bar{\mathbf{i}}=(1,0)$ şi $\bar{\mathbf{j}}=(0,1)$.

Vectorul de poziţie al punctului $M(x,y)$: $\overline{OM}=x\bar{\mathbf{i}}+y\bar{\mathbf{j}}$.

Lungimea vectorului $\overline{OM}$ (distanţa dintre M şi origine): $\begin{aligned} \|OM\|^2 &= x^2+y^2 \\ OM^2 &= x^2+y^2 \end{aligned}$.

Vectorul cu originea $T(a,b)$ şi extremitatea $M(x,y)$:

$$\overline{TM}=(x-a)\,\bar{\mathbf{i}}+(y-b)\,\bar{\mathbf{j}}.$$

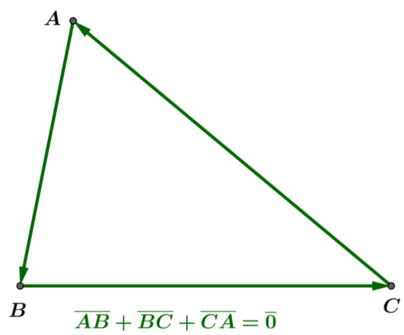
Lungimea vectorului $\overline{TM}$ (distanţa dintre punctele $T(a,b)$ şi $M(x,y)$):

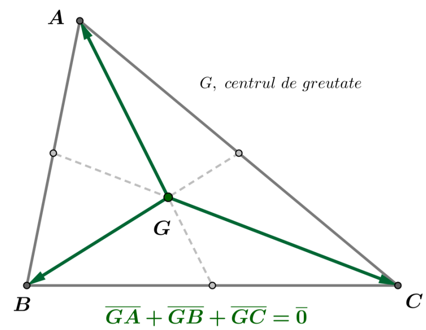
$$\left\|\overline{TM}\right\| = TM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Împărţirea segmentului PQ în raportul $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\overline{PM} = k\overline{MQ}$

$$P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2) \Rightarrow M(x,y) \quad cu \quad x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} \text{ şi } y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}.$$

Caz particular $k = 1$, mijlocul segmentului PQ : $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.





Dreapta în plan

1. Ecuaţia generală explicită : $y = mx + n$

   (m, panta dreptei : $m = tg\varphi$, unde φ este unghiul dintre dreaptă şi semiaxa pozitivă Ox).

2. Ecuaţia generală implicită : $Ax + By + C = 0$ $(m = -\frac{A}{B})$.

3. Ecuaţia dreptei prin tăieturi : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (dreapta taie Ox în a şi Oy în b).

4. Ecuaţia dreptei ce trece prin $T(a,b)$ şi are panta m : $y - b = m(x-a)$.

5. Ecuaţia dreptei ce trece prin $T(a,b)$ şi $S(u,v)$: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Aria triunghiului ABC cu $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix},$$

(adică modulul determinantului)

A, B, C sunt coliniare$\Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$.

Distanţa de la punctul $T(a,b)$ la dreapta (d) $Ax + By + C = 0$

$$dist\,(d,T) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unghiul ascuţit al dreptelor (d_1) $y = m_1x + n_1$ şi (d_2) $y = m_2x + n_2$ este ψ cu

$$tg\,\psi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}\right|.$$

$(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

$(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ (relaţie utilă la determinarea normalei !).

Cercul

Cercul este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit centru).

1. Ecuaţia cercului de rază r şi centru $C(u,v)$
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2.$$
2. Ecuaţia generală a cercului : $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.
3. Ecuaţia cercului ce trece prin punctele $A(m,n), B(s,t)$ şi $C(p,q)$
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ m^2+n^2 & m & n & 1 \\ s^2+t^2 & s & t & 1 \\ p^2+q^2 & p & q & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersecţia dreptei cu cercul = soluţia sistemului: $\begin{cases} x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Şiruri de numere reale

O funcţie reală f definită pe mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ (sau, echivalent, pe o secţiune $\mathbb{N}_m$ a sa ce cuprinde toate numerele naturale ce depăşesc o valoare fixată m) se numeşte *şir de numere reale*. Este convenabilă precizarea şirului prin intermediul termenului său general: $f(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ utilizând simplu notaţia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *monoton* dacă şi numai dacă $sgn\,(a_{n+1} - a_n)$ este constant oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll} a_{n+1} - a_n > 0 \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N} & \Rightarrow & (a_n) \text{ este } \textit{strict crescător} \\ a_{n+1} - a_n < 0 \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N} & \Rightarrow & (a_n) \text{ este } \textit{strict descrescător} \end{array}$$

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă şi numai dacă toţi termenii săi se găsesc într-un interval mărginit:

$$(\exists)\, M > 0 \ \text{ a. î. } \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}\,, \quad |a_n| \le M\ .$$

Definiţie

Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent* dacă există un număr real l cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε astfel încât, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|a_n - l| < \varepsilon$; spunem că numărul real l este *limita* şirului cu termenul general a_n şi notăm aceasta prin $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ sau $a_n \to l$.

Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ $(-\infty)$ dacă pentru orice număr $M > 0$ se poate preciza un rang n_M astfel încât, pentru orice $n \ge n_M$, are loc inegalitatea $a_n > M$ $(a_n < -M)$.

Şirurile care au limita infinită sau cele pentru care limita nu există se numesc *divergente*.

Teoremă

Fie $(a_n)_n$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri convergente având aceeaşi limită l iar $(x_n)_n$ este un alt şir care verifică dubla inegalitate:

$$a_n \le x_n \le b_n \ \text{ oricare ar fi } n \ge n',$$

atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Consecinţa 1

Fie $(b_n)_n$ un şir convergent având limita 0 şi $(x_n)_n$ un alt şir pentru care există numărul real l cu proprietatea

$$|x_n - l| < b_n \quad \text{pentru orice rang } n \geq n'$$

atunci şi $(x_n)_n$ este convergent iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Consecinţa 2

Fie şirul $(x_n)_n$ cu termenul general de forma $x_n = a_n \cdot b_n$; dacă $(a_n)_n$ este un şir mărginit iar $(b_n)_n$ unul convergent cu limita 0 atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Proprietăţile şirurilor convergente

i) Limita unui şir convergent de numere reale este unică.

ii) Orice şir convergent de numere reale este mărginit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \;\Rightarrow\; (\exists)\, A, B \in \mathbb{R} \text{ a.î. } (\forall)\, n \geq n',\; a_n \in [A, B]\,.$$

Teoremă

Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Reciproca este falsă: şirul $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent (cu limita 0) dar nu este monoton.

Limite remarcabile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ 1, & r = 0 \end{cases} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p\right) = \begin{cases} -\infty, & a_0 < 0 \\ +\infty, & a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \infty \cdot sgn\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right), & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0 \quad (|a|>1) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^r}=0 \quad (r>0) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

Şirul cu termenul general $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi mărginit în intervalul $[2,3]$.

Şirul cu termenul general $E_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ este crescător şi verifică inegalităţile

$$2<e_n<E_n<e<3.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Numărul $e\simeq 2,718\,281...$ este baza logaritmului natural: $\ln e=1$.

B. Limite de funcţii şi funcţii continue

Fie $D\subset\mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ un *punct de acumulare* al acesteia adică un punct pentru care există şiruri $(x_n)_n$ din D, $x_n\neq a$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Definiţie

Funcţia $f:D\to\mathbb{R}$ *are limita* l (finită sau infinită) *în punctul* a dacă pentru orice şir $(x_n)_n$ din D, $x_n\neq a$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ este verificată egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. Notăm aceasta prin $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

Limita unei funcţii într-un punct (de acumulare al domeniului de definiţie), dacă există, este unică.

Dacă există două şiruri $(x'_n)_n$ şi $(x''_n)_n$ în D, x'_n, $x''_n\neq a$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=a$ dar $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)$ atunci funcţia f nu are limită în punctul a.

Exemple

- $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ nu există deoarece pentru şirurile $(n\pi)_n$ şi $\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}n\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(4n+1)\frac{\pi}{2}=\infty$, şirurile valorilor funcţiei au limite diferite,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, în timp ce

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(4n+1\right)\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

• $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nu există deoarece pentru şirurile $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_n$ şi $\left(\frac{2}{\left(4n+1\right)\pi}\right)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\left(4n+1\right)\pi} = 0$, şirurile valorilor funcţiei au limite diferite, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi = 0$, în timp ce

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\frac{2}{(4n+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(4n+1\right)\frac{\pi}{2} = 1.$$

Limite laterale:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f\left(x\right) \overset{not}{=} f\left(a-0\right)$ (limita la stânga) şi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f\left(x\right) \overset{not}{=} f\left(a+0\right)$ (limita la dreapta).

Dacă f are limite laterale egale $f\left(a-0\right) = f\left(a+0\right) = l$ atunci f are limită în a şi $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = l$.

Dacă f are limite laterale diferite $f\left(a-0\right) \neq f\left(a+0\right)$ atunci f nu are limită în a ($\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ nu există).

Teoremă

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ două funcţii, a un punct de acumulare al domeniului D, V_a o vecinătate a lui a şi l un număr real.

Dacă i) $\lim_{x\to a} g\left(x\right) = 0$
ii) $\left|f\left(x\right) - l\right| \le \left|g\left(x\right)\right| \ \left(\forall\right) x \in V_a \cap D$
atunci f are limită în a şi $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = l$.

Exemplu

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ deoarece $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le \left|x\right|\cdot 1 = \left|x\right|.$

Limite remarcabile

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p\right) = a_0\cdot\left(\pm\infty\right)^p$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \cdots + b_q} = \begin{cases} 0, & p<q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p=q \\ \dfrac{a_0}{b_0}\left(\pm\infty\right)^{p-q}, & p>q \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} xa^{-x} = 0 \quad (a > 1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^r}{\ln x} = 0 \quad (r > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $a \in D$ un *punct de acumulare* al domeniului de definiţie.

Definiţie

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *continuă* în a dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ există şi coincide cu valoarea funcţiei în a, mai precis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este *continuă pe mulţimea* $D_0 \subset D$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii D_0.

Punctele de acumulare ale domeniului în care funcţia nu este continuă se numesc *puncte de discontinuitate.*

Funcţia f prezintă o *discontinuitate de speţa întâi* în $x = a$ dacă are limite laterale finite şi diferite în a $(f(a-0) \neq f(a+0))$ sau acestea sunt finite egale dar diferite de $f(a)$. Orice punct de discontinuitate care nu este de speţa întâi este clasificat de speţa a doua.

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este discontinuă în $a = 0$; punctul $a = 0$ este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Proprietăţi ale funcţiilor continue

• Orice funcţie continuă pe un interval mărginit şi închis este mărginită şi îşi atinge marginile. Mai precis, oricare ar fi $x \in [a, b]$ toate valorile $f(x)$ se găsesc în intervalul $[m, M]$ (m şi M reprezintă minimul, respectiv maximul funcţiei) şi în plus, există $x_m \in [a,b]$ şi $x_M \in [a,b]$ aşa încât $m = f(x_m)$ şi respectiv, $M = f(x_M)$.

• Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă şi ia valori de semne diferite în capetele intervalului $[a,b]$ atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o rădăcină în intervalul (a,b).

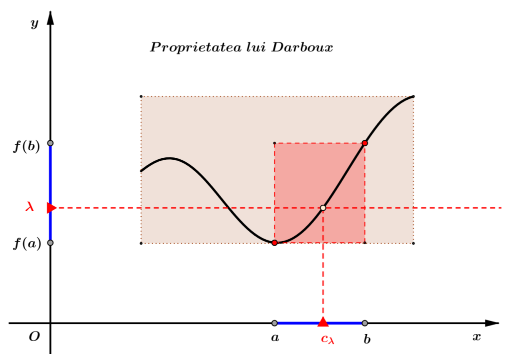
• Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I atunci imaginea acestuia $J = f(I)\,(= \mathrm{Im}\,(f))$ este de asemenea un interval.

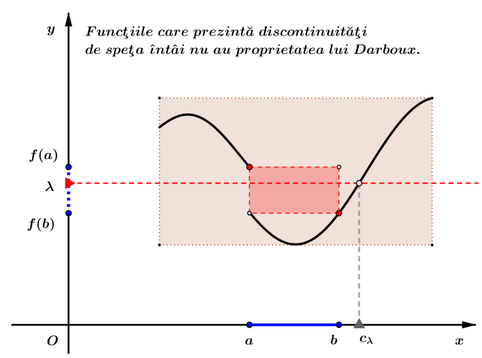
Observaţii asupra proprietăţii lui Darboux

O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux* dacă oricare ar fi $a, b \in I$ $(a < b)$ şi λ situat între $f(a)$ şi $f(b)$ există cel puţin un punct $c_\lambda \in (a,b)$ pentru care $\lambda = f(c_\lambda)$.

Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Funcţiile discontinue care prezintă o discontinuitate de speţa întâi nu au proprietatea lui Darboux.



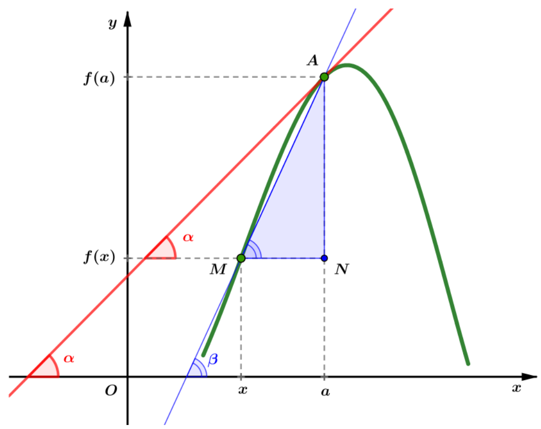


Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux deşi este discontinuă (discontinuitatea este de speţa a doua!).

C. Funcţii derivabile

Definiţie

O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este *derivabilă* în punctul a (situat în intervalul I) dacă limita $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ există şi este finită.



Interpretarea geometrică a derivatei

Din punct de vedere geometric, raportul $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ este tangenta unghiului $\widehat{AMN}$ (vezi figura) şi urmare a trecerii la limită după $x \to a$, $f'(a)$ nu reprezintă altceva decât panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(a, f(a))$. Cu alte cuvinte, $f'(a)$ este tangenta (trigonometrică a) unghiului pe care dreapta tangentă în punctul A îl face cu semiaxa pozitivă Ox. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă a este

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

Uneori, pentru a pune în evidenţă şi variabila independentă a funcţiei, numărul $f'(a)$, derivata lui f în $x = a$ se notează prin $\dfrac{df}{dx}(a)$ iar derivata $f'(x)$ într-un punct arbitrar pur şi simplu prin $\dfrac{df}{dx}$.

O interpretare fizică a derivatei

Un mobil aflat în mişcare rectilinie parcurge în t unităţi de timp (secunde / minute / ore) distanţa $s(t)$ (măsurată în metri / kilometri) sau, cu alte cuvinte, distanţa parcursă de mobil poate fi privită ca o funcţie $s : [0, T] \to \mathbb{R}$. Dacă s este derivabilă pe $[0, T]$ atunci viteza sa la momentul t se defineşte prin $v(t) = s'(t)$ iar dacă şi v este o funcţie derivabilă atunci acceleraţia mobilului la momentul t este $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Condiţia necesară de derivabilitate

Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca afirmaţiei este falsă: spre exemplu funcţia modul este continuă în origine fără a fi însă derivabilă.

Cum se studiază derivabilitatea unei funcţii într-un punct?

- se verifică proprietatea de continuitate în punctul precizat (dacă funcţia este discontinuă studiul derivabilităţii nu are sens),
- se calculează derivatele laterale

$$f'_s(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad \text{şi} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\ .$$

Dacă derivatele laterale în a există, sunt finite şi egale atunci funcţia f este derivabilă în a. (Pentru punctele situate la extremităţile -finite- ale domeniului de definiţie este suficient ca una singură din derivatele laterale să existe şi să fie finită). În toate celelalte situaţii, funcţia nu este derivabilă în punctul studiat.

Tabelul derivatelor

Identităţile din tabelele ce urmează se deduc cu formula

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

ce rezultă din definiţie prin schimbarea de variabilă $x - a = h$.

1.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(n\in\mathbb{N})$
	$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n\in\mathbb{N})$
		$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	
	$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^r$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(r\in\mathbb{R})$
		$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
		$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	

2.	$f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a>0,a\neq1)$
		$(e^x)'=e^x$	
3.	$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(a>0,a\neq1)$
		$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	
		$(\ln\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	$(x\neq0)$

4.	$f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
5.	$f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$
6.	$f:\mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg}x$	$(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
		$(\operatorname{tg}x)'=1+\operatorname{tg}^2x$
7.	$f:\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x$	$(\operatorname{ctg}x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

8.	$f:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right],\ f(x)=\arcsin x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x\neq\pm1)$
9.	$f:[-1,1]\to[0,\pi],\ f(x)=\arccos x$	$(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(x\neq\pm1)$
10.	$f:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ f(x)=\operatorname{arctg}x$	$(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$	

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

$(cf(x))'$	$=$	$cf'(x)$	
$(f(x)+g(x))'$	$=$	$f'(x)+g'(x)$	
$(f(x)\cdot g(x))'$	$=$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$=$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,	$g(x)\neq0$
$\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)'$	$=$	$\dfrac{-g'(x)}{g^2(x)}$,	$g(x)\neq0$
$(f(u(x)))'$	$=$	$f'(u(x))\cdot u'(x)$	

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe intervalul I atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I.

Derivate de ordin superior

O funcţie reală este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ dacă este derivabilă în fiecare punct din I şi în plus, derivata sa f' este continuă pe I. Mulţimea funcţiilor de clasă $\mathcal{C}^1$ pe I se notează cu $\mathcal{C}_I^1$ iar $\mathcal{C}_I^0$ desemnează în mod natural clasa funcţiilor continue pe intervalul I.

În general, pentru un indice $n \in \mathbb{N}$ fixat, se spune că f este o funcţie de clasă $\mathcal{C}^n$ (notaţie $f \in \mathcal{C}_I^n$) dacă f e derivabilă de n ori pe I cu derivata $f^{(n)}$ continuă.

Funcţiile elementare cum ar fi e^x, $\cos x$, $\sin x$, polinoamele de orice grad, logaritmul (indiferent de bază) sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe domeniul lor maxim de definiţie I.

Tabelul derivatelor de ordinul n

$(x^p)^{(n)}$	$=$	$p\,(p-1)\cdots(p-n+1)\,x^{p-n}$	$p \geq n, \quad (p \in \mathbb{N})$
	$=$	0	$p < n, \quad (p \in \mathbb{N})$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}$	$=$	$\dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$	$(x \neq 0)$
$(e^x)^{(n)}$	$=$	e^x	
$(\sin x)^{(n)}$	$=$	$\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$(\cos x)^{(n)}$	$=$	$\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$((1+x)^r)^{(n)}$	$=$	$r\,(r-1)\cdots(r-n+1)\,(1+x)^{r-n}$	$(x > -1, \quad r \in \mathbb{R})$

Aplicaţiile derivatei

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct al domeniului de definiţie D.

Punctul a este *punct de extrem local* pentru f dacă există o vecinătate a sa V_a în care creşterea funcţiei $f(x) - f(a)$ are semn constant; cu alte cuvinte, există $r > 0$ a.î.

$$sgn\left(f\left(x\right) - f\left(a\right)\right) = const. \qquad (\forall)\, x \in (a - r, a + r) \cap D.$$

Mai precis,

$$\left.\begin{array}{lll} a \text{ este } \textit{minim local} & \text{d.d.} & f\left(x\right) - f\left(a\right) \geq 0, \\ a \text{ este } \textit{maxim local} & \text{d.d.} & f\left(x\right) - f\left(a\right) \leq 0 \end{array}\right. \quad (\forall)\, x \in (a - r, a + r) \cap D.$$

Teorema lui Fermat

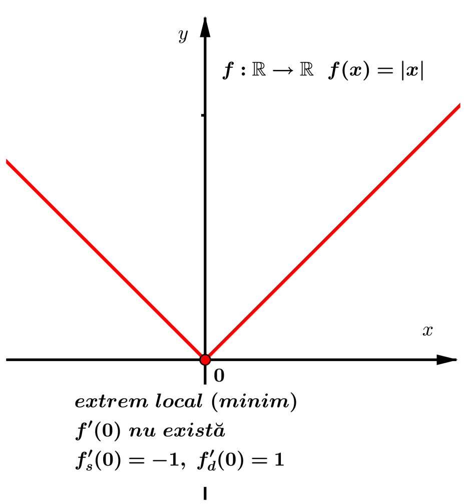
Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie şi a un punct din domeniul de definiţie D.

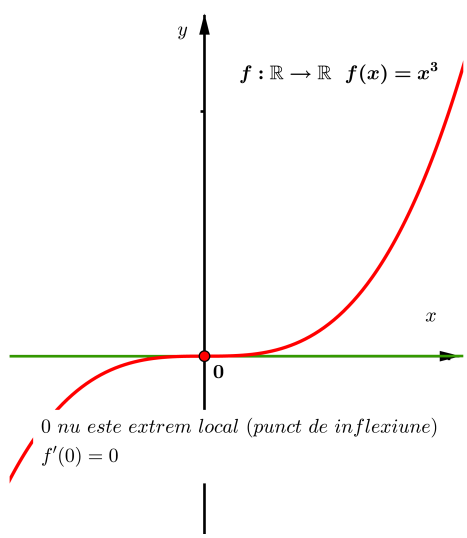
$$\text{Dacă} \left\{\begin{array}{l} a \text{ este interior lui } D \\ a \text{ este punct de extrem local} \\ f \text{ este derivabilă în } a \end{array}\right. \quad \text{atunci} \quad f'\left(a\right) = 0.$$

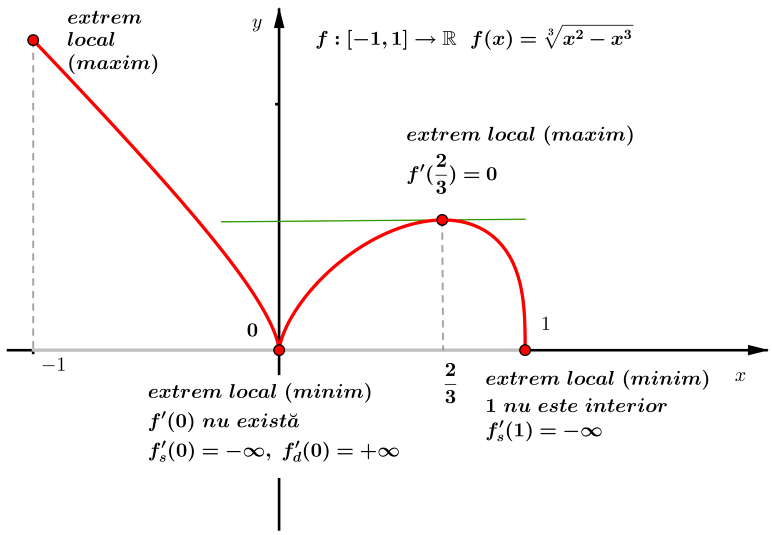
Interpretarea geometrică

Tangenta la graficul funcţiei într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de definiţie al unei funcţii derivabile, este paralelă cu axa Ox.

Punctul x_0 este un *punct critic* (*staţionar*) al funcţiei derivabile f dacă $f'\left(x_0\right) = 0$, deci conform teoremei lui Fermat, punctele critice sunt posibile puncte de extrem ale funcţiei.

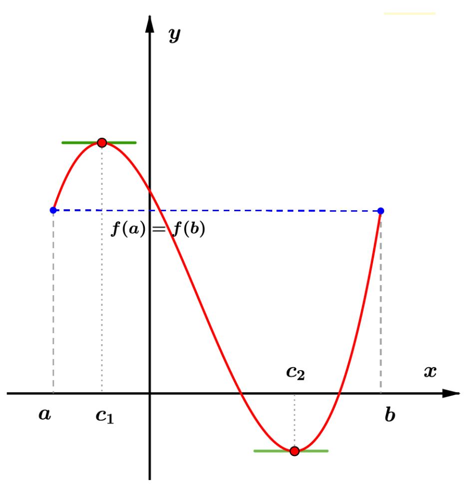




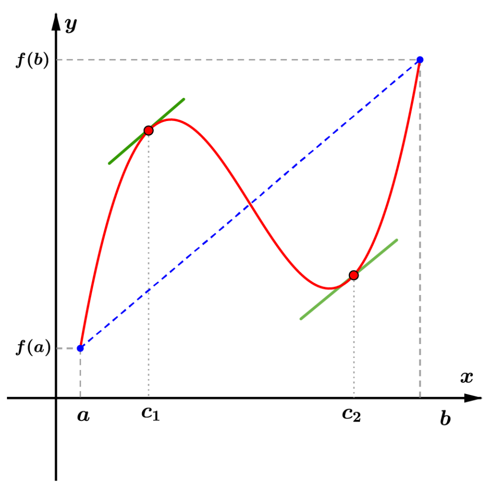


Teorema lui Rolle

$$\text{Dacă}\begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a,b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{cases} \quad \text{atunci} \quad (\exists)\, c\in(a,b) \text{ a.î. } f'(c)=0.$$



Teorema lui Rolle



Teorema lui Lagrange

În particular, dacă $f(a)=f(b)=0$, teorema afirmă că între două rădăcini ale ecuaţiei $f(x)=0$ există cel puţin o rădăcină a derivatei.

Reciproc, între două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă funcţia îşi schimbă semnul, există o singură rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Aplicaţie

Separarea rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$ cu ajutorul şirului lui Rolle

Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ este continuă şi derivabilă (extremităţile intervalului pot fi infinite) şi $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$ atunci orice schimbare a semnului în şirul lui Rolle

x	a	c_1	c_2	$\cdots$	c_k	b
$\mathrm{sgn}(f(x))$	$\mathrm{sgn}(f(a))$	$\mathrm{sgn}(f(c_1))$	$\mathrm{sgn}(f(c_2))$		$\mathrm{sgn}(f(x_k))$	$\mathrm{sgn}(f(b))$

indică intervalele ce conţin câte o rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$.

Teorema lui Lagrange

Dacă $\begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \end{cases}$ atunci $(\exists)\, c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretarea geometrică

Există cel puţin un punct $(c, f(c))$, situat pe graficul funcţiei, în care tangenta este paralelă cu coarda ce uneşte extremităţile $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

Consecinţe

Orice funcţie derivabilă pe un interval cu derivata pozitivă (negativă) este crescătoare (descrescătoare) pe acel interval.

Dacă derivata unei funcţii este nulă pe un interval atunci funcţia este constantă pe acel interval:

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ derivabilă pe } \underline{\text{intervalul}}\ I \subset D$$

$$f'(x) = 0 \quad (\forall)\, x \in I \Rightarrow f(x) = c \text{ (constantă) pe } I.$$

Teorema lui Cauchy

Dacă $\begin{cases} f, g \text{ sunt continue pe } [a,b] \\ f, g \text{ sunt derivabile pe } (a,b) \\ g'(x) \neq 0 \text{ pe } (a,b) \end{cases}$ atunci $(\exists)\, c \in (a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Limite de funcţii (completări)

Calculul limitelor de funcţii conduce cel mai adesea la situaţii exceptate de la regulile de calcul algebric, cum ar fi $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, şi este nevoie de multă îndemânare pentru evitarea lor. În condiţii rezonabile de derivabiltate a termenilor, *regula lui l 'Hospital* poate fi de mare ajutor dacă este aplicată corect şi cu discernământ. Pe scurt, *regula lui l 'Hospital* reduce calculul limitei $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (a, finit sau infinit) aflată într-una din situaţiile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, la calculul limitei (uneori mai simple) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mai precis, dacă $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finit sau infinit) atunci şi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Exemple

a) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2+x-5)}{x^2-4} = \frac{0}{0}$, nedeterminare.

Se calculează

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\ln(x^2+x-5))'}{(x^2-4)'} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x-5}}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x(x^2+x-5)} = \frac{5}{4}.$$

Conform regulii lui l 'Hospital rezultă $L = \frac{5}{4}$.

b) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4+\sin^2 x^2}{\ln\left(1+\sin^4 x\right)} = \frac{0}{0}$, nedeterminare.

Limita raportului derivatelor este dificil de calculat

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\ln\left(x^4+\sin^2 x^2\right)\right)'}{\left(\ln\left(1+\sin^4 x\right)\right)'} = ...$(dar nu imposibil de calculat).

Este recomandată metoda directă, bazată pe utilizarea limitelor remarcabile evidenţiate mai sus.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + \sin^2 x^2}{\ln\left(1+\sin^4 x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} \frac{1 + \left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^2}{\frac{\ln\left(1+\sin^4 x\right)}{\sin^4 x}} = 1 \cdot \frac{1+1^2}{1} = 2.$$

c) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \dfrac{0}{0}$, nedeterminare. (Am văzut că $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.)
Limita raportului derivatelor nu există
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există.

Totuşi limita există: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\left(x \sin \dfrac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$

d) $L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, nedeterminare.

Utilizarea (fără discernământ) a regulii lui l'Hospital nu duce la niciun rezultat: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Totuşi limita poate fi calculată cu metoda factorului forţat:
$L = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$

Ghid pentru reprezentarea grafică a funcţiilor

Etapele reprezentării grafice a funcţiilor reale de variabilă reală
$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ...$

$\boxed{1.}$ *Stabilirea domeniului maxim de definiţie* E

Domeniul maxim de definiţie E este alcătuit din toate numerele reale x pentru care expresia $f(x)$ are sens şi este finită: $E = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Mulţimea E este de regulă o reuniune de intervale şi eventual, de puncte "izolate".

$\boxed{2.}$ *Limitele funcţiei la extremităţile (finite şi infinite) ale intervalelor din* E

Domeniului de continuitate: $E_c = \{x \mid x \in E$ şi f este continuă în $x\}$

este o reuniune de intervale deschise sau închise.

Asimptote verticale:

a, extremitate de interval al domeniului E_c, $a \neq \pm\infty$;

$x = a$ este *asimptotă verticală* dacă cel puţin una dintre limitele laterale

$f(a-0)$ sau $f(a-0)$ este infinită.

Asimptote oblice (sau, în particular, *orizontale*):

$y = n$ este *asimptotă orizontală* dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = n$ sau $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = n$;

$y = mx + n$ este *asimptotă oblică* dacă $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ este infinită sau nu există, dar $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ există şi sunt finite.

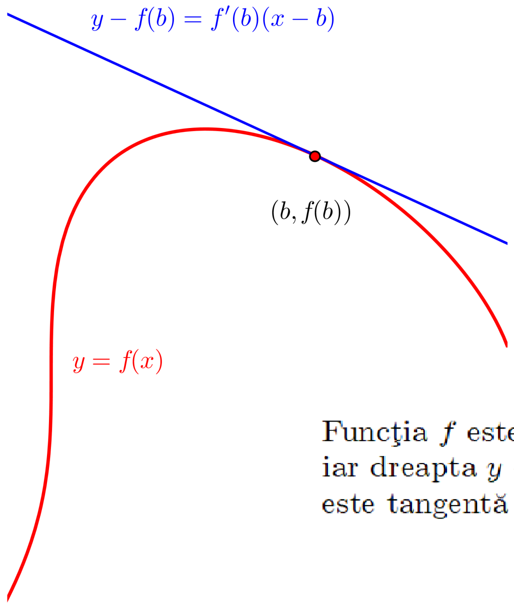
$\boxed{3.}$ *Studiul derivatei întâi*

Calculul derivatei întâi $f'(x)$.

Domeniului de derivabilitate este domeniul maxim de existenţă al expresiei $f'(x)$: $E_d = \{x \mid x \in E_c$ şi f este derivabilă în $x\}$.

Practic, pentru precizarea domeniului E_d, se calculează derivatele laterale $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ în acele puncte b ale domeniului de continuitate E_c în care există dubii asupra existenţei expresiei $f'(x)$.

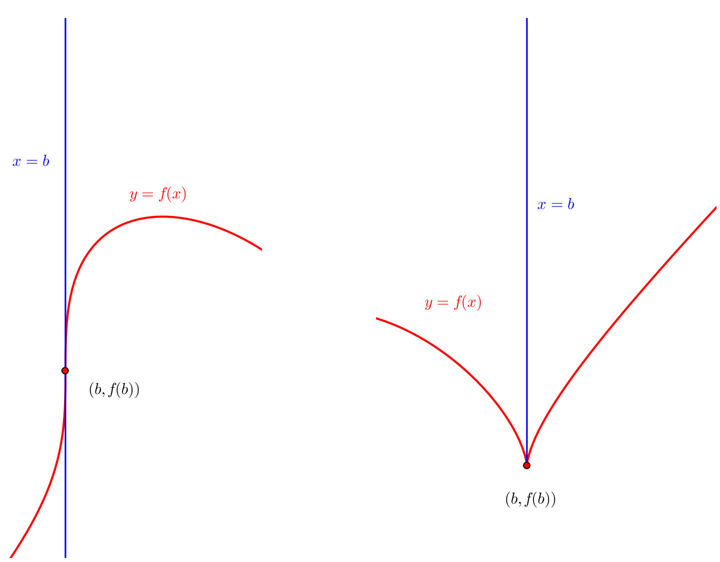
• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt finite şi egale atunci b aparţine domeniului de derivabilitate E_d.



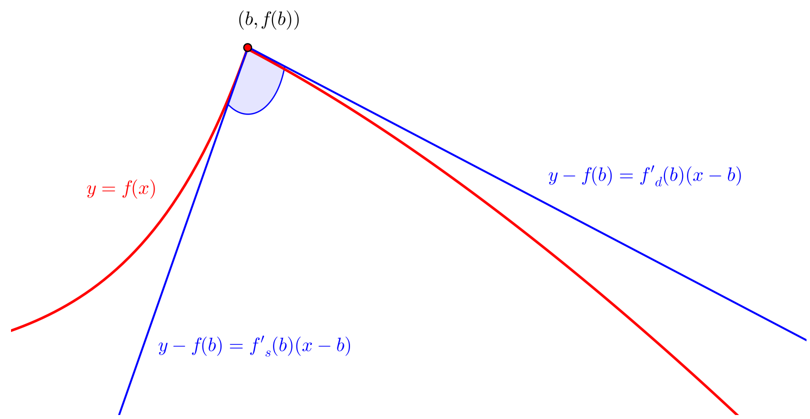
Funcţia f este derivabilă în punctul b iar dreapta $y - f(b) = f'(b)(x - b)$ este tangentă în punctul $(b, f(b))$.

• Dacă $f_s'(b)$ şi $f_d'(b)$ sunt infinite, egale atunci f <u>nu</u> este derivabilă în b, $(b, f(b))$ este un *punct de inflexiune cu tangentă verticală* al graficului iar dreapta $x = b$ este tangentă verticală.

• Dacă $f_s'(b)$ şi $f_d'(b)$ sunt infinite, diferite atunci f <u>nu</u> este derivabilă în b, $(b, f(b))$ este un *punct de întoarcere* al graficului iar semidreapta $x = b$ (cu $y \geq f(b)$ sau cu $y \leq f(b)$, după caz) este semitangentă verticală.



• Dacă $f'_s(b)$ şi $f'_d(b)$ sunt finite şi diferite sau cel puţin una dintre derivatele laterale este finită atunci funcţia **nu** este derivabilă în b, $(b, f(b))$ este un *punct unghiular* al graficului.



Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$. Rădăcinile derivatei sunt *punctele critice* sau *staţionare* ale funcţiei.

Importanţa studiului amănunţit al derivatei întâi constă în următoarele:

-*punctele de extrem* ale funcţiei se găsesc printre punctele sale critice, unghiulare sau de întoarcere;

-*semnul* derivatei întâi oferă informaţii despre intervalele de monotonie:

$f'(x) \geq 0$ pe intervalul $I \subset E_d \Rightarrow f$ este crescătoare pe I,

$f'(x) \leq 0$ pe intervalul $I \subset E_d \Rightarrow f$ este descrescătoare pe I.

$\boxed{4.}$ *Studiul derivatei a doua*

Calculul derivatei a doua $f''(x)$.

Precizarea domeniului maxim de existenţă al expresiei $f''(x)$.

Se determină rădăcinile ecuaţiei $f''(x) = 0$.

Punctele de inflexiune ale funcţiei se găsesc printre rădăcinile derivatei a doua. Semnul derivatei a doua stabileşte intervalele pe care funcţia este concavă sau convexă:

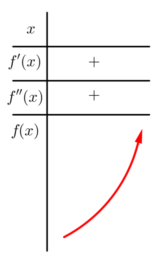
$f''(x) \geq 0$ pe intervalul $I \Rightarrow f$ este convexă pe I,

$f''(x) \leq 0$ pe intervalul $I \Rightarrow f$ este concavă pe I.

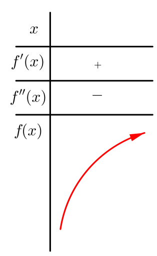
Dacă expresia $f'(x)$ are o formă complicată (calculul lui $f''(x)$ ia mult timp) sau ecuaţia $f''(x) = 0$ este dificil de rezolvat, se poate renunţa la studiul derivatei a doua.

$\boxed{5.}$ *Tabelul de variaţie al funcţiei*

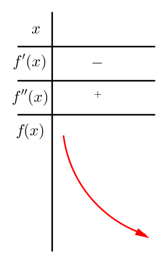
x	Se aşază crescător punctele importante determinate mai sus.
$f'(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidenţiat la rubrica x.
$f''(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidenţiat la rubrica x.
$f(x)$	Pe fiecare interval se trasează săgeţile ce indică monotonia şi forma ramurilor ce alcătuiesc graficul funcţiei, respectând următoarele reguli:



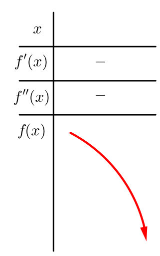
Crescătoare, convexă



Crescătoare, concavă



Descrescătoare, convexă



Descrescătoare, concavă

$\boxed{6.}$ *Valori importante*

Se calculează coordonatele punctelor în care funcţia nu este continuă, nu este derivabilă, ale punctelor critice şi ale punctelor de inflexiune. Valorile găsite se trec în tabelul de variaţie al funcţiei.

Se calculează coordonatele punctelor de intersecţie cu axele:

$\cap Ox \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ (se reţin doar valorile $x \in E$).

$\cap Oy \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0)$ (doar dacă $0 \in E$).

$\boxed{7.}$ *Reprezentarea grafică*

-se trasează axele de coordonate,

-se stabileşte unitatea de măsură pe fiecare axă în parte,

-se trasează asimptotele şi tangentele verticale,

-se aşează pe grafic punctele importante ale căror coordonate au fost calculate mai sus,

-se trasează graficul funcţiei conform tabelului de variaţie.

$\boxed{8.}$ *Observaţii*

Se studiază eventualele simetrii ale graficului.

• Dacă f este o funcţie *pară*, adică $f(-x) = f(x)\ \ (\forall)\, x \in E$, atunci graficul funcţiei este *simetric faţă de axa Oy*.

• Dacă f este o funcţie *impară*, adică $f(-x) = -f(x)\ \ (\forall)\, x \in E$, atunci graficul funcţiei este *simetric faţă de origine*.

Se studiază periodicitatea.

Funcţia f este *periodică cu perioada T* dacă $f(x+T) = f(x)\ \ (\forall)\, x \in E$; cel mai mic număr pozitiv T cu această proprietate (dacă există) se numeşte *perioada principală*.

Se precizează imaginea funcţiei: $\operatorname{Im} f = \{y \mid (\exists)\, x \in E \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

D. Integrabilitate şi aplicaţii

Definiţie

Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, interval) este *primitivabilă* dacă există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$, numită *primitiva* lui f , având proprietăţile:

(i) F este derivabilă pe D

(ii) $F'(x) = f(x), (\forall)x \in D$.

Mulţimea tuturor primitivelor lui f este notată prin simbolul "$\int f(x)dx$" ce se citeşte "*integrala nedefinită a lui f în raport cu x*". Întrucât orice două primitive ale aceleaşi funcţii primitivabile diferă printr-o constantă (f este definită pe un interval !), pentru determinarea integralei nedefinite este suficientă găsirea unei singure primitive F. Are loc egalitatea de mulţimi

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde $\mathcal{C}$ reprezintă mulţimea funcţiilor reale constante definite pe D.

Proprietatea (ii) din definiţie permite alcătuirea unui tabel cu integrale nedefinite a cărui consultare atentă reprezintă o primă metodă de primitivare. În plus, din (ii) rezultă şi proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

oricare ar fi $f, g : D \to \mathbb{R}$, primitivabile şi α, β numere reale.

Tabelul primitivelor elementare[2]

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}_+^*, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + \mathcal{C}\,, \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}, \qquad \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C} \qquad x \in I \subset (-a, a)$$

[2] I reprezintă intervalul de integrare.

În practică îşi dovedesc utilitatea şi următoarele trei formule de integrare ce se pot verifica imediat prin derivarea membrului drept:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2} + \mathcal{C};$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} + \mathcal{C}.$$

Problema A

Cum se poate decide dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, *interval*) *este sau nu primitivabilă?*

Direct, problema poate fi rezolvată intuind (de exemplu cu ajutorul tabelului) forma pe care ar trebui s-o aibă primitiva F şi verificând dacă sunt sau nu îndeplinite condiţiile (i) şi (ii) din definiţie.

Posibilitatea rezolvării indirecte a problemei **A** se bazează pe următoarele rezultate:

• Orice funcţie reală continuă pe intervalul $D \subset \mathbb{R}$ este primitivabilă pe D.

• Dacă f este o funcţie reală primitivabilă pe intervalul $D \subset \mathbb{R}$ atunci din identitatea $f = F'$ rezultă imediat că f are proprietatea lui Darboux pe D.

i) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul D atunci f nu este primitivabilă pe D.

ii) Dacă f are în punctul x_0 al intervalului D o discontinuitate de speţa I (adică limitele laterale $f(x_0 - 0)$ şi $f(x_0 + 0)$ sunt finite dar diferite) atunci f nu este primitivabilă pe D.

Astfel, pentru a dovedi primitivabilitatea unei funcţii este suficient (nu şi necesar) să se verifice continuitatea sa, ceea ce este mult mai comod în comparaţie cu verificarea condiţiilor i) şi ii) ale definiţiei.

Pentru a dovedi neprimitivabilitatea unei funcţii este suficient (nu şi necesar) să se verifice că f nu posedă proprietatea lui Darboux, adică faptul că există un interval $D_0 \subset D$ a cărui imagine prin f,

$$f(D_0) = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ (\exists)x_0 \in D_0 : y = f(x_0)\}\ ,$$

nu este interval.

Problema B

Cum poate fi determinată integrala nedefinită $\mathcal{I} = \int f(x)dx$ *a funcţiei primitivabile* $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}$, *interval*)?

O primă metodă o constituie, aşa cum remarcam înainte, consultarea atentă a tabelului cu primitivele unor funcţii elementare. Descriem în continuare câreva procedee de calcul a integralei nedefinite utile în rezolvarea problemelor.

METODA INTEGRĂRII PRIN PĂRŢI

Dacă f se poate exprima sub forma

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

cu $u, v : D \to \mathbb{R}$ derivabile, atunci

$$\mathcal{I} = \int f(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx = ... = F(x) + C$$

(cu alte cuvinte, calculul integralei iniţiale $\int u(x) \cdot v'(x)dx$ se reduce la cel al integralei $\int u'(x) \cdot v(x)dx$ care, la o alegere judicioasă a funcţiilor u şi v, poate fi mai simplă).

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (1)

Dacă f se poate exprima sub forma:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

unde $\varphi : D \to E$ ($E \subseteq \mathbb{R}$ interval) este derivabilă iar $f : E \to \mathbb{R}$ este primitivabilă cu primitiva G, atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx,$$

prin schimbarea de variabilă $t = \varphi(x)$, se reduce la calculul integralei nedefinite:

$$\mathcal{I}_t = \int g(t)dt = ... = G(t) + C$$

şi în final

$$\mathcal{I} = G(\varphi(x)) + C.$$

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (2)

Dacă $\Psi : E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R},$ interval) este bijectivă şi derivabilă iar $(f \circ \Psi) \cdot \Psi'$ este primitivabilă pe E cu primitiva H atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x)dx$$

se reduce prin schimbarea de variabilă (substituţia) $x = \Psi(t)$ la cel al integralei

$$\mathcal{I}_t = \int f(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t)dt = ... = H(t) + C,$$

iar în final, revenind la variabila iniţială (în baza bijectivităţii lui Ψ, $t = \Psi^{-1}(x)$), se obţine:

$$\mathcal{I} = H(\Psi^{-1}(x)) + C.$$

SUBSTITUŢII REMARCABILE

Utilizarea formei canonice a trinomului de gradul al-II-lea

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{4a}{4a}\left(ax^2 + bx + c\right) = \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2 + 4abx + 4ac\right) = \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 + \Delta\right] \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_x = \int f\left(ax^2 + bx + c\right) dx \quad \text{cu} \quad f \text{ integrabilă}$$

$$t = 2ax + b \Rightarrow \mathcal{I}_t = \frac{1}{2a}\int g\left(t\right) dt, \quad \text{unde} \quad g\left(t\right) = f\left(\frac{t^2 + \Delta}{4a}\right).$$

Primitivarea funcţiilor raţionale

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int R(x)\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx \\ & \begin{array}{lll} grP \geq grQ \Rightarrow & R = & C + \dfrac{\rho}{Q}\ (\rho,\text{restul}) \Rightarrow \mathcal{I} = \int C(x)\,dx + \int \dfrac{\rho(x)}{Q(x)}dx \\ grP < grQ \Rightarrow & Q & \text{se descompune în produs de factori} \\ & & \text{de gr.I şi II la diverse puteri} \\ & R = & \dfrac{P}{Q} \text{ se descompune în fracţii simple de forma} \\ & & \dfrac{A}{(ax+b)^n} \text{ respectiv } \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}\ (cu\ \Delta < 0) \\ & & \text{care se vor primitiva fiecare în parte} \end{array}\end{aligned}$$

Substituţii trigonometrice pentru eliminarea radicalului

$$\begin{array}{ll} \int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx & x = a\cdot\sin t \\ \int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)dx & x = a\cdot\operatorname{tg} t \\ \int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx & x = \dfrac{a}{\cos t} \end{array}$$

Substituţiile lui Euler

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad \text{cu } R,\ \text{raţională}$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow & t \pm \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c} \\ \Delta > 0 \Rightarrow & t = \sqrt{a\dfrac{x-x_1}{x-x_2}} \end{cases}$$

Integrale reductibile la integrale de funcţii raţionale

$$\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad R,\ \text{raţională}$$

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{unde } m = [p, .., q]$$

[3]

[3] $m = [p, ..., q]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor $p, ..., q$.

$$\int R\left(e^x\right)dx \quad R,\ \text{raţională} \qquad t = e^x$$

$$\int R\left(\cos x, \sin x\right)dx \quad R,\ \text{raţională} \quad \begin{cases} & t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ R\left(u,-v\right) = -R\left(u,v\right) \Rightarrow & t = \cos x \\ R\left(-u,v\right) = -R\left(u,v\right) \Rightarrow & t = \sin x \\ R\left(-u,-v\right) = R\left(u,v\right) \Rightarrow & t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Precizăm în încheiere că alegerea schimbării de variabilă ţine de imaginaţia şi experienţa rezolvitorului care poate aborda o aceeaşi problemă prin două sau chiar mai multe modalităţi. Este interesant să comparaţi în asemenea situaţii rezultatele obţinute şi să explicaţi diferenţele remarcate. De asemenea este util ca la integralele nedefinite întâlnite să reflectaţi asupra intervalelor maxime pe care sunt definite funcţiile de sub semnul integralei.

Construcţia integralei definite

Oricărei funcţii $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i se poate ataşa un număr real σ_f după cum urmează:

- se construieşte o *diviziune* a intervalului de definiţie:

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

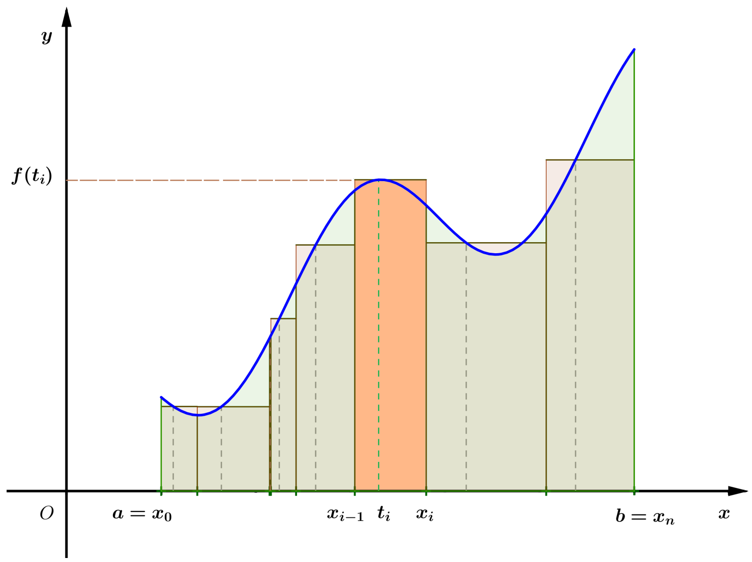
- se alege un *sistem de puncte intermediare* diviziunii:

$$(\tau) \ \ \{t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_n\}, \qquad t_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = \overline{1,n}),$$

- se defineşte

$$\sigma_f(\Delta,\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Numărul $\sigma_f(\Delta,\tau)$ se numeşte *suma integrală Riemann* a lui f relativ la diviziunea (Δ) şi sistemul de puncte intermediare (τ). Din punct de vedere geometric, pentru funcţii pozitive, acest număr reprezintă o aproximare a ariei "de sub grafic".



Definiţie

Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este *integrabilă* (în sens Riemann) d.d. există un număr real $\mathbb{I}$ care verifică următoarea proprietate:

"pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ aşa încât

oricare ar fi diviziunea (Δ) cu norma $\mu(\Delta) := \max\limits_i (x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon$ şi

oricare ar fi sistemul de puncte (τ), intermediare diviziunii $(\triangle)$,

are loc inegalitatea $|\sigma_f(\Delta, \tau) - \mathbb{I}| < \varepsilon$".

Numărul $\mathbb{I}$, dacă există, se notează $\int_a^b f(x)dx$ şi reprezintă "*integrala definită a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ în raport cu variabila x*".

În cazul particular al partiţiei uniforme cu noma $\dfrac{b-a}{n}$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k\,(b-a)}{n}\right) = \int\limits_a^b f\,(x)\,dx.$$

Problema C

Cum se poate decide dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este sau nu integrabilă?

Utilizarea definiţiei, deşi incomodă, este uneori inevitabilă.

Următoarele rezultate sunt utile pentru evitarea definiţiei în studiul integrabilităţii:

• Oricare funcţie integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.
• Funcţiile reale nemărginite nu sunt integrabile.
• Orice funcţie reală monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.
• Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ iar punctele de discontinuitate x_i $(i = \overline{1, k})$ sunt toate de speţa întâi ($f(x_i - 0)$ şi $f(x_i + 0)$ există, sunt finite dar diferite) atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Problema D

Cum poate fi calculată integrala definită $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx$?

Pentru a calcula integralele este bine să cunoaşteţi:
a) *Proprietatea de liniaritate:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) *Proprietatea de aditivitate la interval:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

g integrabilă iar $c \in [a, b]$.

FORMULA LUI LEIBNIZ-NEWTON

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrablă şi primitivabilă iar F este o primitivă a sa atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Există funcţii integrabile care nu sunt primitivabile ceea ce face ca formula să nu poată fi aplicată. Un caz aparte, în care nu se poate utiliza (direct) formula este acela al integralei unei funcţii, integrabile si primitivabile, a cărei primitivă nu este exprimabilă prin funcţii elementare. Asemenea funcţii sunt e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\dfrac{\sin x}{x}$.

METODE DE INTEGRARE

Integrarea prin părţi se aplică dacă $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = ...$$

Schimbarea de variabilă (1) se aplică dacă $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

$$t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x)\,dx$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{şi} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

Schimbarea de variabilă (2) se aplică dacă $f(x)$ are o formă specială (vezi lista substituţiilor remarcabile)

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$t = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(t) \qquad (\psi = \varphi^{-1})$$

$$x = \psi(t) \Rightarrow dx = \psi'(t)\,dt$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{şi} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

Proprietăţile integralei definite

Teoremă

Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă atunci

i) f este integrabilă pe $[a, b]$,

ii) f este primitivabilă pe $[a, b]$ iar $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ este o primitivă a lui f.

Pentru orice funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Observaţie

Integrarea şi derivarea sunt operaţii ”*inverse*” una celeilalte în sensul că

$$\int g'(x)\,dx = g(x) + \mathcal{C} \quad \text{şi} \quad \left(\int_a^x g(t)dt\right)'_x = g(x)$$

Teoremă

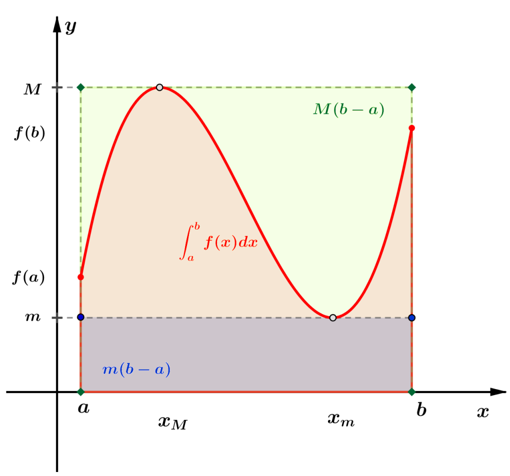
Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile atunci

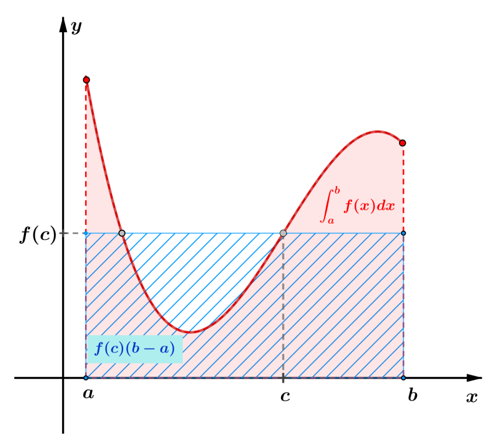
$$f(x) \le g(x), \quad (\forall)x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Teoremă

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ respectiv $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$





Teoremă (formula de medie)

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă atunci există un punct c situat între a şi b aşa încât

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

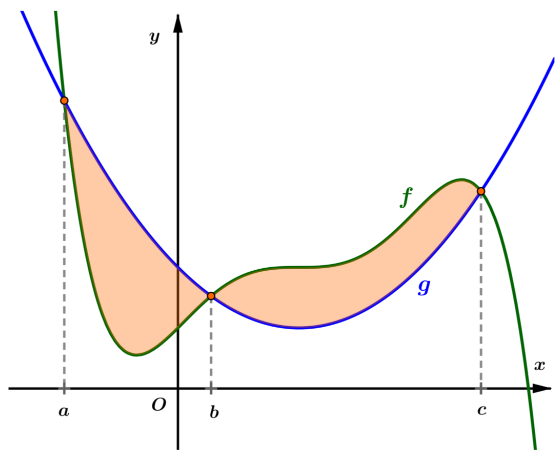
Numărul $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ se numeşte *valoarea medie a funcţiei f pe intervalul* $[a,b]$.

Aplicaţii ale integralei definite în geometrie

i) *Aria domeniilor mărginite cuprinse între graficele a două funcţii*

Dacă $f,g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue ale căror grafice se intersectează în punctele de abscise $a < b < c$ determină un domeniu mărginit a cărui arie este

$$A_{f,g} = \int_a^c |g(x) - f(x)|\, dx.$$



Exemplu

Aria discului circular de rază r (centrat în origine)

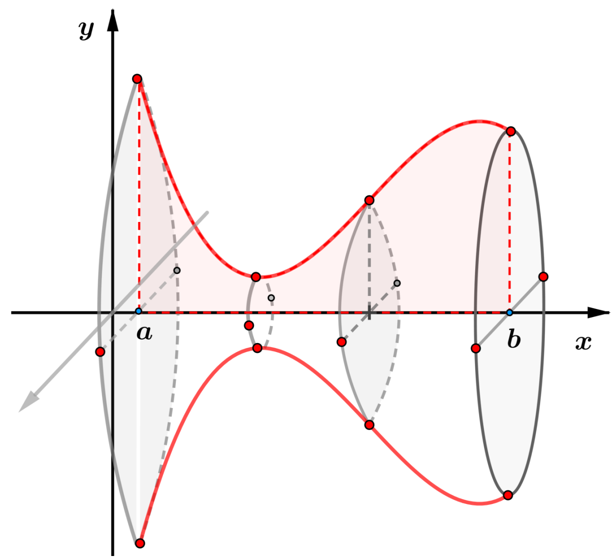
$$D = \{(x,y) \ | \ x^2+y^2 \le r^2\} = \left\{(x,y) \ | \ -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\right\}$$

$$\begin{aligned} Aria\,(D) &= \int_{-r}^{r} \left|\sqrt{r^2-x^2} - \left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right| dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}dx = \\ &= 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx = \left|2r^2 \arcsin\frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2-x^2}\right|_0^r = r^2\pi. \end{aligned}$$

ii) *Volumul corpurilor generate prin rotirea graficului funcţiei în jurul axei Ox*

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă atunci corpul generat prin rotirea porţiunii de grafic cuprinsă între punctele $x = a$ şi $x = b$ în jurul axei Ox are volumul

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze

$$\{3,3\} + \{-3,3\}\ ,$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

a) 0 b) $0,3$ c) $0,6$ d) $6,6$ e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}\ , 100 - \sqrt{2}\ )$ şi $B = (\sqrt{5}\ , 100 + \sqrt{5}\ )$. Câte numere naturale conţine mulţimea $A \cap B$?

a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$|x| + |x+2| = 3.$$

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \leq 6\}\ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

a) $(-\infty,-1)\cup[0,1)$ b) $(-\infty,-1)$ c) $\mathbb{R}$
d) $\emptyset$ e) $(1,+\infty)$ f) $(-\infty,-2)$

AL 6 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8}\leq x+2.$$

a) $[1,\infty)$ b) $[-8,-4]\cup[1,\infty)$ c) $[-8,-4]$
d) $(-\infty,-4]\cup[1,\infty)$ e) $(-\infty,-4]$ f) $[-2,\infty)$

AL 7 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuaţia

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{ax^2-2x-\frac{1}{a}}=0,$$

să aibă cel puţin o soluţie reală.

a) 2 b) $1\pm\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$
d) $-2,\ 1\pm\sqrt{2}$ e) $2\pm\sqrt{2}$ f) $0,\ 1\pm\sqrt{2}$

AL 8 Să se găsească mulţimea tuturor valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2-3x+2}>x+1.$$

a) $\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{5},+\infty\right)$ c) $\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right]$
d) $[-1,+\infty)$ e) $\emptyset$ f) $(-1,+\infty)$

AL 9 Fie ecuaţia

$$x^2+|x|=mx\,(x+3)\,,\quad m\in\mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuaţie să aibă exact trei soluţii reale diferite.

a) $\mathbb{R}$	b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	c) $\emptyset$
d) $(-\infty, 1]$	e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

AL 10 Să se găsească mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

a) $\{1\}$	b) $\{0, -1\}$	c) $\{0, 2\}$
d) $\{-1\}$	e) $\emptyset$	f) $\{0\}$

AL 11 Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

a) $\{-1, 0, 1\}$	b) $\{-1, 1, 2\}$	c) $\{-1, 0, 2\}$
d) $\{0, 1, 2\}$	e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$	f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 12 Andrei şi Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câştigă prima rundă, iar Cristian o câştigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârşitul celei de-a doua runde?

a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 13 Valer pleacă la şcoală având suma de x lei cu el, unde x este un număr natural din intervalul $(2, 6]$ şi cheltuieşte $\frac{2}{x-2}$ din aceasta. Să se determine mulţimea tuturor valorile pe care le poate lua x, dacă el se întoarce acasă fără datorii.

a) $\{3, 4, 5, 6\}$	b) $\{3, 4, 5\}$	c) $(2, 6]$
d) $\{3, 4\}$	e) $\emptyset$	f) $\{4, 5, 6\}$

AL 14 Maria cheltuieşte $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie şi $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câştigă dublu faţă de Maria, cheltuieşte un sfert din salariul său pe chirie şi jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată şi suma pe care o câştigă fetele împreună?

a) $\frac{17}{72}$ b) $\frac{17}{24}$ c) $\frac{17}{48}$ d) $\frac{23}{24}$ e) $\frac{23}{72}$ f) $\frac{23}{48}$

AL 15 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent creşte b?

a) $56,25\%$ b) 40% c) 20%
d) $0,025\%$ e) $0,5\%$ f) 60%

AL 16 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se măreşte de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor creşte suma medie depusă în fiecare cont?

a) 2 b) 8 c) $9,8$ d) 12 e) $12,5$ f) 13

AL 17 Preţul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depăşesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depăşeste p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este preţul transportului?

a) $s + 0,05x$ b) $s + 0,05p$ c) $0,05(s - p + x)$
d) $s + 0,05(x - p)$ e) $s + 0,05(p - x)$ f) $s + 0,05(x + p)$

AL 18 Fie propoziţiile p şi q. Să se precizeze în câte cazuri din cele prezentate în următoarele tabele de adevăr se poate trage concluzia că propoziţia q este adevărată:

p	$p \to q$
1	1

p	$p \vee q$
0	1

p	$\bar{q} \to \bar{p}$
1	1

p	$\bar{q} \to p$
0	1

p	$p \vee q$
1	1

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 19 Care dintre următoarele variante reprezintă negaţia afirmaţiei

$$"\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\ "?$$

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

b) $\nexists \varepsilon > 0,\ \nexists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

d) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| \geq \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

e) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$

f) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| < \eta$ şi $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

AL 20 A demonstra prin contrapoziţie afirmaţia

$$p \to q$$

înseamnă a demonstra că este adevărată implicaţia

$$\bar{q} \to \bar{p}$$

Care dintre enunţurile de mai jos trebuie argumentat pentru a demonstra prin contrapoziţie proprietatea

$$"\ \forall\ m \in M,\quad \forall\ n \in N,\quad p(m,n) \wedge q(m,n)\ \to\ r(m,n)\ "\quad ?$$

a) $\forall\ m \in M,\quad \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

b) $\exists\ m \in M,\quad \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

c) $\exists\ m \in M,\quad \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

d) $\forall\ m \in M,\quad \exists\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

e) $\forall\ m \in M,\quad \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \wedge \bar{q}(m,n)$

f) $\exists\ m \in M,\quad \forall\ n \in N,\quad \bar{r}(m,n)\ \to\ \bar{p}(m,n) \vee \bar{q}(m,n)$

AL 21 Despre mulţimile A, B, C, D, E se ştie că: toate elementele lui A sunt şi în B, toate elementele lui B sunt şi în C, există elemente ale lui C care nu sunt în B, toate elementele lui D sunt şi în C, dar nu toate elementele din C sunt în D, nu există elemente comune mulţimilor A şi D, există elemente care aparţin atât lui B, cât şi lui D, unele elemente ale lui E sunt şi elemente ale lui D, dar nu sunt elemente ale lui B. Care din următoarele afirmaţii rezultă din ipotezele anterioare?

a) există elemente ale lui E care aparţin lui A

b) mulţimea E este inclusă în mulţimea B

c) toate elementele lui E aparţin şi lui C

d) există elemente ale lui B care sunt şi în A şi în E

e) unele elemente ale lui E sunt elemente ale lui C

f) mulţimile C şi E nu au elemente comune

AL 22 Să se calculeze expresia $E = x_1^4 - x_2^4$, ştiind că x_1 şi x_2, cu $x_1 > x_2$, sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - ax - a^2 = 0$, unde $a \in (0, \infty)$.

a) $E = 3a^4\sqrt{5}$ b) $E = a^3$ c) $E = 3a^4\sqrt{5}$

d) $E = a^4\sqrt{5}$ e) $E = 4a^3$ f) $E = 3a^4$

AL 23 Fie ecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + a^2 = 0,\ a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluţiile x_1 şi x_2. Să se determine o relaţie independentă de a între x_1 şi x_2.

a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$

c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$

e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$

AL 24 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real nenul a ştiind că inecuaţia

$$ax^2 - (a+1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(-\infty, 1]$ b) $[1, +\infty)$ c) $\{1\}$
d) $(0, 1]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 25 Fie mulţimile
$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.
Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\emptyset$

AL 26 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimile
$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}$.
Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a, ştiind că intersecţia $A \cap B$ are exact două elemente.

a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$
d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) $\emptyset$ f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 27 Se consideră un pătrat de arie S_1. Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2. În acelaşi mod, construim succesiv un şir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017 S_n \geq S_1$.

a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 28 Discriminantul unei ecuaţii de gradul II cu coeficienţi întregi nu poate fi

a) -2015 b) -2016 c) 112 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 29 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ conţin exact un număr impar?

a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 30 Câte dintre submulţimile lui $\{1, 2, \ldots, 10\}$ au produsul elementelor divizibil cu 10?

a) 512 b) 100 c) 1024

d) 45 e) 752 f) 256

AL 31 Se formează un număr alăturând, unul după altul, pătratele numerelor naturale diferite de zero, consecutive: 149162536... Să se determine în acest număr cifra aşezată pe poziţia 99.

a) 2 b) 1 c) 4 d) 0 e) 7 f) 3

5

AL 32 Fie $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ mulţimea cifrelor şi S_k mulţimea stringurilor binare formate din k biţi, adică

$$S_k = \{b_1 b_2 \cdots b_k : \, b_i \in \{0, 1\}, \, i = \overline{1, k}\}, \, k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze câte funcţii $h : S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_8 \to \{c_1 c_2 c_3 : \, c_1, c_2, c_3 \in C\}$ se pot defini.

a) 1000^{510} b) 900^{512} c) 512^{1000}

d) 1000^{256} e) 256^{1000} f) 256^{2}

AL 33 Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{2x + 5x^2 + 8x^3}{x^2} \quad \text{pentru} \quad x > 0.$$

a) 0 b) 2 c) 8 d) 13 e) 15 f) 22

AL 34 Fie a, b, c numere reale nenule. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

a) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ b) $\dfrac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$

c) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ d) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

e) $-\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ f) niciuna dintre acestea

AL 35 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuaţia

$$(a-1)(a-3) + (b-5)(b-7) + (c-9)(c-11) < 0\,?$$

a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 36 Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ şi } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \dfrac{5a^2+1}{a^2}\, y + a = 0$ b) $y^2 - \dfrac{1}{a^2}\, y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$ d) $y^2 + \dfrac{5a^2+5a+1}{a^2}\, y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$ f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 37 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = \frac{1}{[x]}\ ,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ b) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\left[k, k+\frac{1}{k}\right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\}$

d) $\{1\}$ e) $[0,1]$ f) $(0,1)$

AL 38 Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5} .$$

a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{20}{15}$ c) $\frac{14}{15}$ d) 1 e) $\frac{13}{15}$ f) $\frac{10}{15}$

AL 39 Să se calculeze media aritmetică a soluţiilor ecuaţiei

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

AL 40 Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$[a]^2 - (2a-1)[a] + 3a = 0.$$

a) $[-1,4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0,5)$

d) $\{-3,-2,0,4,5\}$ e) $(-1,4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0,4\}$

AL 41 Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor

$$a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5} \ , \quad b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4} \ , \quad c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} \ .$$

a) a, b, c b) a, c, b c) b, a, c d) b, c, a e) c, a, b f) c, b, a

AL 42 Se consideră şirul de numere raţionale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Să se determine al câtelea termen al şirului este numărul $\frac{2016}{2015}$.

a) 8120450	b) 8118435	c) 2015
d) 2016	e) 8000111	f) 8000

AL 43 O particulă se mişcă în sistemul cartezian de coordonate după următoarea schemă: porneşte din origine, după primul pas se mişcă o unitate la dreapta, la cel de-al doilea pas se mută 2 unităţi în sus, la al treilea pas 3 unităţi la stânga, la al patrulea pas 4 unităti în jos, la al cincilea 5 unităţi la dreapta, etc. În ce punct se va afla particula după 2022 de paşi?

a) $(1011, 1012)$	b) $(1021, 1020)$	c) $(1020, 1020)$
d) $(1001, -1020)$	e) $(1004, 1005)$	f) $(1010, 1011)$

AL 44 Care este numărul maxim de regiuni în care 2022 drepte coplanare pot împărţi planul?

a) $\dfrac{2022^2 + 2022 + 2}{2}$	b) $\dfrac{2022^2 + 4 \cdot 2022}{3}$
c) $\dfrac{2 \cdot 2022^2 - 2022 + 6}{3}$	d) $\dfrac{3 \cdot 2022^2 - 3 \cdot 2022 + 10}{4}$
e) $\dfrac{3 \cdot 2022^2 + 8}{5}$	f) $\dfrac{3 \cdot 2022^2 - 9 \cdot 2022 + 14}{2}$

AL 45 Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică relaţiile

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_n x_{n-2} + x_{n-1} = 2, \quad n \geq 3.$$

Să se calculeze $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2016}$.

a) 0 b) 1 c) 671 d) 672 e) 2016 f) 2017

AL 46 Fie n un număr natural nenul. Să se calculeze suma

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\ .$$

a) $1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ c) $1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

d) $1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e) $1-\dfrac{1}{n}$ f) $\dfrac{1}{n+1}$

AL 47 Într-un şir $a_1,\ a_2\ \ldots$, fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine mărind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 48 Fie $a_1, ..., a_n, ...$ termenii unei progresii aritmetice de raţie r. Ştiind că $a_{21} = 20$ şi $a_{101} = 60$, să se determine r şi formula termenului a_{n+1}.

a) $r=\dfrac{1}{4},\ a_{n+1}=n-1$ b) $r=1,\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{2}$

c) $r=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{2}$ d) $r=-\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=1+\dfrac{n}{2}$

e) $r=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=1+\dfrac{n}{4}$ f) $r=1,\ a_{n+1}=10+\dfrac{n}{6}$

AL 49 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăţi, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm f) 15 cm

AL 50 O rachetă este lansată în plan vertical şi parcurge în prima secundă 150 m. În fiecare din următoarele secunde parcurge cu 10 m mai puţin ca în secunda precedentă. Care este înălţimea maximă la care ajunge racheta? Cât durează până ajunge la înălţimea maximă?

a) $h_{max} = 1200\ m,\ t = 15\ s$ b) $h_{max} = 1000\ m,\ t = 10\ s$

c) $h_{max} = 1500\ m,\ t = 20\ s$ d) $h_{max} = 2000\ m,\ t = 25\ s$

e) $h_{max} = 800\ m,\ t = 7\ s$ f) $h_{max} = 1800\ m,\ t = 22\ s$

AL 51 Fie S_m şi S_n suma primilor m şi respectiv n termeni ai unei progresii aritmetice $(m \neq n)$ cu primul termen nenul. Ştiind că

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}\ ,$$

să se determine $\dfrac{a_m}{a_n}$.

a) $\dfrac{2m-1}{2n-1}$ b) $\dfrac{2m+1}{2n+1}$ c) $\dfrac{m}{n}$

d) $\dfrac{m-1}{n-1}$ e) $\dfrac{2m-3}{2n-3}$ f) $\dfrac{m+1}{n+1}$

AL 52 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$, ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-2\}$

AL 53 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ ştiind că numerele $9^x - 1,\ 6^x,\ 4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\emptyset$ f) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

AL 54 Fie n un număr natural mai mare decât 3. Să se calculeze suma

$$2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n\text{-ori}}.$$

a) $\frac{2}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$ b) $\frac{2}{81}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n-1\right)$

c) $\frac{1}{9}\left(\frac{20^{n+1}-20}{9}-n\right)$ d) $2\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$

e) $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$ f) $\frac{2}{81}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n+1\right)$

AL 55 O persoană trimite un e-mail la trei persoane şi le cere să continue, după o săptămână, să trimită fiecare la alte trei persoane acelaşi e-mail. Câte e-mailuri circulă în total în primele 10 săptămâni dacă nu se întrerupe lanţul?

a) 88572 b) 59049 c) 29524

d) 88573 e) 9841 f) 31

AL 56 O minge cade de la $1,5$ m înălţime, se loveşte de pământ şi sare din nou $1,35$ m. Când cade din nou, urcă doar $1,215$ m, şi aşa mai departe. Înălţimile formează o progresie geometrică. Care este înălţimea la care sare mingea a 6-a oară?

a) $1,5\cdot(0,9)^5$ b) $0,9\cdot(1,5)^5$ c) $1,5\cdot(0,9)^6$

d) $15[1-(0,9)^5]$ e) 0 f) $15[1+(0,9)^5]$

AL 57 Populaţia de amoebe dintr-o colonie se dublează după fiecare două zile. Dacă acum şase zile erau 200 de amoebe, câte vor fi peste patru zile?

a) 1600 b) 3200 c) 6400

d) 12800 e) 800 f) 25600

AL 58 Populaţia unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populaţia numără 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populaţia va atinge 24300 de bacterii?

a) 10 min b) 15 min c) 20 min

d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 59 Fie $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ o progresie geometrică cu termeni nenuli şi raţie $q \neq 1$. Ştiind că $b_1 = 1$ şi $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q şi suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

a) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ b) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c) $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ d) $q = \frac{1}{2}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

e) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ f) $q = \frac{1}{4}$, $S_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

AL 60 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie q şi termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + ... + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}\ , \quad n \geq 2.$$

a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 61 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, ..., b_n, ...,$ de raţie $q \neq \pm 1$ şi termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n+1}^2 \quad \text{şi} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + ... + \frac{1}{b_{n+1}^2}\ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 62 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ şi trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc.

a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 63 Să se determine funcţia de gradul întâi, ştiind că graficul său taie axa Ox în $x = \sqrt{3}$ şi trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,x + 2$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,x - 2$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + 2$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}}\,x + 1$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,x - 1$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}\,x$

AL 64 În câte puncte taie axa Ox graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \text{ ?} \end{cases}$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 65 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P). Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 66 Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ şi este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$

d) $x^2 - 2x + 1$ e) nu există f) $-4x^2 + 3x + 1$

AL 67 Într-un recipient, presiunea variază în intervalul $[0, 10]$ după legea $p(t) = \dfrac{5}{108}t^2 - \dfrac{5}{12}t + 7$ (presiunea măsurată în Bar, iar timpul în minute). După câte minute presiunea este minimă?

a) $4,5$ b) $6,0625$ c) 0 d) 1 e) 9 f) $6,5$

AL 68 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}\ , \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a, ştiind că imaginea funcţiei f este un interval de lungime 1.

a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1)$ c) $\{2\}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 69 Fie funcţia $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m şi maximă M a funcţiei f.

a) $m = 0,\ M = 1$ b) $m = -4,\ M = 5$ c) $m = -4,\ M = 4$

d) $m \in \emptyset,\ M = 5$ e) $m = -4,\ M = 1$ f) $m = -4,\ M = +\infty$

AL 70 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a-2)x + 2a \ \text{ şi } \ g(x) = x^2 + (b+1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a şi b, ştiind că graficele funcţiilor f şi g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox.

a) $a = 0,\ b = -2$ b) $a = 1,\ b = -2$ c) nu există

d) $a = 0,\ b = 1$ e) $a = 1,\ b = 2$ f) $a = -1,\ b = -2$

AL 71 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} .$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) $\dfrac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\dfrac{1}{f(x)}$ f) $\dfrac{1}{f(-x)}$

AL 72 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m-1)x, & x \in [2, 4) \\ x+8, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

să fie strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

a) $[1, 2)$ b) $[0, 3]$ c) $(1, 4]$ d) $[0, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $[1, \infty)$

AL 73 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \text{ şi } g(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcţia compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x(x^2 - x)$ c) $(3x-1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 74 Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x-3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = x - 2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$ b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x-3, & x<2 \\ 2x-7, & x \geq 2 \end{cases}$ d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<-2 \\ 2x-7, & x \geq -2 \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+3, & x<0 \\ 2x-7, & x \geq 0 \end{cases}$

AL 75 Să se determine toate funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \text{ şi } g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ştiind că $f \circ g = g \circ f$.

a) $f(x) = x + 1, g(x) = x$ b) $f(x) = ax + 1, g(x) = x$

c) $f(x) = x + 1, g(x) = x + b$ d) $f(x) = ax + 1, g(x) = x + 1$

e) $f(x) = ax + 1, g(x) = x$ sau $f(x) = x + 1, g(x) = x + b$

f) $f(x) = x + 1, g(x) = x$ şi $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$

AL 76 O particulă se mişcă în sistemul de coordonate xOy după următoarea regulă: la fiecare pas, din punctul de coordonate (x, y) particula se mută în punctul de coordonate $(x + y, -x)$. Dacă particula pleacă din punctul (1,1), unde se va afla după 2022 paşi?

a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 0)$

d) $(0, -1)$ e) $(-1, 1)$ f) $(2, -1)$

AL 77 Dacă numerele reale x şi y satisfac relaţia $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

AL 78 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuaţia

$$|x| + |y| < 10?$$

a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

AL 79 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\}$ mulţimea soluţiilor sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right|.$$

a) 6 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{2}{5}$ e) 1 f) 2

AL 80 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluţie.

a) -2 b) 2 c) 4 d) 3 e) -1 f) -6

AL 81 Să se găsească toate valorile reale ale lui x şi y ştiind că $x + y = 2$ şi $x^3 + y^3 = 2$.

a) $x = y = 1$ b) $x = 2$, $y = 0$ c) $x = 1 + \sqrt[3]{2}$, $y = 1 - \sqrt[3]{2}$

d) $x = 0$, $y = 2$ e) $x = 4$, $y = -2$ f) $x = 3$, $y = -1$

AL 82 Fie mulţimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1,\ \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum\limits_{x \in M} x^2$.

a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

AL 83 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât

$$\frac{2002}{10^{-b}}$$

să aparţină intervalului $[1, 100]$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$

d) $\{-4, -3, -2\}$ e) $\emptyset$ f) $\{-3, -1\}$

AL 84 Să se rezolve ecuaţia $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

a) -1 b) 0 c) 1

d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\dfrac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

AL 85 Să se rezolve ecuaţia $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

a) $\left\{0\,, \dfrac{2\ln 2}{\ln 2 + 2\ln 3}\right\}$ b) $\left\{0\,, \dfrac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1\,, \dfrac{\ln 2}{2\ln 2 + \ln 3}\right\}$

d) $\left\{1\,, \dfrac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0\,, \dfrac{\lg 2}{\lg 2 + 2\lg 3}\right\}$ f) $\left\{0\,, \dfrac{\lg 3}{1 + 2\lg 2}\right\}$

AL 86 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ şi $c = \dfrac{1 - a - b}{2 - 2b}$. Să se determine 12^c.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

AL 87 Să se găsească produsul tuturor soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^{\log_2 x} = 16$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 88 Fie a şi b numere reale strict pozitive care satisfac relaţiile $a^b = b^a$ şi $b = 9a$. Să se determine valoarea lui a.

a) $1/9$ b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 89 Numerele reale strict pozitive x şi y verifică relaţiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y).$$

Să se determine raportul $\dfrac{y}{x}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ c) $\log_2 3$ d) $\dfrac{9}{4}$ e) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ f) $\log_3 2$

AL 90 Fie $x > 10$. Câte cifre are soluţia ecuaţiei $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10}+1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 91 Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 92 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $n \geq 2$. Să se calculeze

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \ldots + \frac{1}{\log_n a} .$$

a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\dfrac{1}{\log_{n^n} a}$

d) $\dfrac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \dfrac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

AL 93 Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia

$$\log_x\left(x^2 - x + 2\right) > 2\log_x(x+1).$$

a) $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ b) $x \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ c) $x \in (1, \infty)$

d) $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right]$ e) $x \in (0, 1)$ f) $x \in \left(\dfrac{1}{3}, \infty\right)$

AL 94 Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ şi notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

a) $x + y$ b) xy c) $\dfrac{1}{x+y}$ d) $\dfrac{1}{xy}$ e) $\dfrac{x+y}{xy}$ f) $\dfrac{xy}{x+y}$

AL 95 Fie $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ şi $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} a^x = bc \\ b^y = ca \\ c^z = ab. \end{cases}$$

Să se calculeze $xyz - x - y - z$.

a) abc b) 2

c) 0 d) $(a-b)(b-c)(c-a)$

e) $a + b + c$ f) 1

AL 96 Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 97 În ce interval se află soluţia strict pozitivă a ecuaţiei

$$(x^2+9)^{\frac{1}{\log_x (x^2+9)}} = \sqrt[3]{-x^2+6x} \ ?$$

a) $(2,3]$ b) $(0,1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ c) $(1,6)$

d) $(-1,0)$ e) $[-1,1]$ f) $(1,2)$

AL 98 Să se rezolve inecuaţia

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+2x+2\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3).$$

a) $x \in [-1,+\infty)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1,+\infty)$

c) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in \emptyset$

e) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, 0]$

AL 99 Să se determine mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3}+4)^x - 3(\sqrt{3}+1)^x + 2 < 0\}.$$

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}\right)$

d) $(0,+\infty)$ e) $(0,1)$ f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3}+1)}, +\infty\right)$

AL 100 Fie numerele reale $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1)$ sau $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 ... x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 ... x_n) + ... + \log_{x_n}(x_1 x_2 ... x_n) \ .$$

a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 101 Fie e baza logaritmului natural şi x_1, x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\dfrac{x_1}{x_2}$.

a) $e(e+1)$ b) e c) 1 d) e^3 e) 2 f) nu există

AL 102 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x-2, x < -1 \\ mx-3, \ x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă şi să se determine în acest caz funcţia ei inversă.

a) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

b) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

c) $m = 2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y \geq -1 \\ \dfrac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$

d) $m = -2,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \begin{cases} -2-y, & y > -1 \\ \dfrac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

e) $m=-3,\ f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\begin{cases}-2-y, & y>-1\\ \dfrac{-y-3}{2}, & y\le -1\end{cases}$

f) $m=-1,\ f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\begin{cases}2+y, & y>-1\\ \dfrac{-y-3}{2}, & y\le -1\end{cases}$

AL 103 Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+8}=3$. Să se determine suma modulelor soluţiilor reale ale ecuaţiei.

a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

AL 104 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $a\in\mathbb{R}$, ştiind că ecuaţia

$$\sqrt[3]{x^4-6x^2+9}-3a\sqrt[3]{x^2-3}+2a^2=0$$

are patru soluţii reale distincte.

a) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2},2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3},+\infty)$ c) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2},-\sqrt[3]{3}\right)$

d) $(1,2]$ e) $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$ f) $(0,1]$

AL 105 Să se calculeze

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 5 f) -4

AL 106 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x astfel încât se poate calcula $C_{7x}^{x^2+10}$.

a) $\{2,3,4,5\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{0,1,2,3,4,5\}$

d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AL 107 Să se calculeze suma

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + 100\cdot 100!\ .$$

a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$

d) $101!-1$ e) $200!+1$ f) $200!-1$

AL 108 Să se calculeze suma $\sum\limits_{i=1}^{100}\left(\sum\limits_{j=1}^{i} j\right)$.

a) 171700 b) $\dfrac{5050}{3}$ c) 17

d) 206040 e) 2550 f) $\dfrac{51}{2}$

AL 109 Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right),\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}.$$

Să se determine mulţimea $\left\{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}\ \middle|\ \frac{1}{2}\le x_n\le\frac{2}{3}\right\}$.

a) $\{3,4\}$ b) $\{5,6,7\}$ c) $\{2,3,4\}$

d) $\emptyset$ e) $\{2,3,4,5,6\}$ f) $\{2,4,6\}$

AL 110 Un păianjen trebuie să încalţe câte o şosetă şi un pantof pe fiecare din cele 8 picioare ale sale. În câte ordini posibile poate el încălţa cele 16 articole ştiind că, pe fiecare picior, el trebuie să ia şoseta înainte de a lua pantoful?

a) $8!$ b) $2^8 \cdot 8!$ c) $(8!)^2$ d) $\dfrac{16!}{2^8}$ e) $16!$ f) $64!$

AL 111 Să se calculeze

$$\frac{C_{2017}^1 \cdot C_{2017}^3 \cdot \ldots \cdot C_{2017}^{2017}}{C_{2017}^2 \cdot C_{2017}^4 \cdot \ldots \cdot C_{2017}^{2016}}\ .$$

a) 1 b) 2 c) 2017 d) $\dfrac{2017 \cdot 2016}{2}$ e) 2016 f) 2018

AL 112 Să se calculeze suma

$$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7.$$

a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

AL 113 Fie

$$A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \ldots + 100C_{100}^{100}\ .$$

Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată.

a) A este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$

d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $A = 100 \cdot 2^{99}$

AL 114 Câte numere de 10 cifre conţin 4 cifre de 3 şi 6 cifre de 7?

a) 24 b) 120 c) 210 d) 240 e) 256 f) 720

AL 115 Câte din submulţimile de trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 116 Care este cel mai mare factor prim de două cifre al numărului C_{200}^{100}?

a) 31 b) 47 c) 61 d) 67 e) 97 f) 24

AL 117 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele $1, 2, 3, 4, 5$.

a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$

d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 118 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuaţia

$$x + y + z = 10 \ ?$$

a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 119 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 120 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete şi 7 băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete şi 2 băieţi pentru a participa la un concurs?

a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 121 Alfabetul unui limbaj este format din literele A, B, E, L, R, T, aceasta fiind şi ordinea lor alfabetică. Dicţionarul acestui limbaj conţine doar cuvinte de 6 litere, fiecare literă din alfabet fiind luată o singură dată în oricare cuvânt. Dacă aşezarea în dicţionar se face ţinând cont de ordinea alfabetică a cuvintelor, atunci cuvântul aflat pe poziţia 538 în acest dicţionar este:

a) *REBLTA* b) *LERBAT* c) *TBERLA*

d) *RABLET* e) *TRABLE* f) *ALBERT*

AL 122 Un tren este format din 5 vagoane notate cu literele A, B, C, D, E. În câte moduri pot fi aşezate aceste vagoane astfel încât vagonul A să se afle mereu înaintea vagonului B?

a) 60 b) 20 c) 40 d) 80 e) 30 f) 45

AL 123 Un examen de matematică are două părţi. Partea A conţine 5 probleme, iar partea B conţine 4 probleme. Fiecare student trebuie să rezolve în total 5 probleme, dintre care cel puţin două trebuie să fie din partea A şi cel puţin 2 din partea B a examenului. Să se determine numărul de moduri diferite în care se pot alege cele 5 probleme pentru rezolvare.

a) 100 b) 60 c) 40 d) 224 e) 2400 f) 120

AL 124 Cinci prietene îşi fac una alteia cadouri astfel încât fiecare din ele oferă un cadou şi primeşte un cadou (desigur, niciuna nu primeşte propriul cadou). În câte moduri diferite îşi pot oferi cadouri?

a) 44 b) 10 c) 5 d) 120 e) 70 f) 20

AL 125 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^{1}A_{n+1}^{2} \geq \left(C_{n+1}^{3}\right)^{2}.$$

a) $\{2,3,4\}$ b) $\{1,2,3,4\}$ c) $\emptyset$
d) $\{2\}$ e) $[2,+\infty)$ f) $\{2,3,4,5\}$

AL 126 Câţi termeni raţionali conţine dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[4]{3}\right)^{99}$?

a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 127 Fie $x > 0$. Câţi termeni din dezvoltarea

$$\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$$

nu-l conţin pe x, ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 1024?

a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 128 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 5x + 4x^3)^{10}$.

a) $40 \cdot C_{10}^2$ b) $200 \cdot C_{10}^2$ c) $5^4 \cdot C_{10}^4$
d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$ e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$ f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$

AL 129 Fie binomul

$$\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n, \ x > 0.$$

Ştiind că termenul T_{13} este de forma $c_1 x$, să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma $c_2 x^{-22}$, unde c_1 şi c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x.

a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 130 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x + 2y + 3)^8$.

a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

AL 131 Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5 + 2x)^{16}$ este cel mai mare.

a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 3)$
d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e) $(-2, 2)$ f) $(-1, 1)$

AL 132 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a astfel încât între soluţiile complexe z_1 şi z_2 ale ecuaţiei $z^2 + (2a - 1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relaţia

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$

d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

AL 133 Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^2 - (6 - i)z + 5 - i = 0.$$

a) $2 + \sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1 + \sqrt{26}$.

AL 134 Să se determine suma modulelor soluţiilor ecuaţiei

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 135 Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot ... \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + ... + i^{2013}} \; .$$

a) 2013 b) $2013i$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 136 Se consideră numerele complexe z şi w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{şi} \quad |z+w| = \sqrt{2013}\ .$$

Să se determine valoarea lui $|z-w|$.

a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 137 Fie mulţimea $A = \{z \in \mathbb{C}, |z|^2 + z = 1+i\}$ şi $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulţimea $\{z^{4n},\ z \in A\}$.

a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
d) $\emptyset$ e) $\{(i-1)^n\}$ f) $\{(i(i-1))^n\}$

AL 138 Ştiind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)^9$.

a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 139 Numărul complex z satisface condiţiile $|z-i| = |z-1| = |z+5|$. Să se determine $|z|$.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 140 Se ştie că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x,y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1+2i$, $-2-2i$ şi $3+i$. Care este cel de-al patrulea număr?

a) $3-2i$ b) $-2+3i$ c) $2-3i$
d) $-3+2i$ e) $2-2i$ f) $3-3i$

AL 141 Fie numărul complex z care verifică ecuaţia $z+|z|=2+8i$. Să se determine $|z|^2$.

a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 142 Numărul complex z are proprietăţile $|z+2|=|z-6(1+i)|=5$. Să se determine $|z|$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 143 Care este valoarea expresiei

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{24} \quad ?$$

a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^8 f) -2^8

AL 144 Se dau numerele complexe $z_1=-1$ şi $z_2=-2+i$. Să se determine numerele complexe z cu proprietăţile

$$|z-z_1|=|z-z_2|=|z_1-z_2|.$$

a) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

c) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{4}$

e) $-\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$

AL 145 Fie numerele complexe z şi w. Să se calculeze

$$\frac{1+|z\cdot w|^2}{|\overline{z}\cdot w+1|^2+|z\cdot\overline{w}-1|^2}\ .$$

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\overline{z}w+z\overline{w}$ e) $Re(zw)$ f) $Im(\overline{zw})$

AL 146 Fie mulţimea $A=\{z\in\mathbb{C}\mid z^2+z+1=0\}$. Ştiind că $z\in A$, să se calculeze

$$\frac{z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^3-4}{z^{2013}+2}\ .$$

a) z b) z^2 c) $-\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 147 Să se determine suma soluţiilor ecuaţiei

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\frac{z-i}{z+i}+1=0\ .$$

a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 148 Se consideră numerele complexe z_1,z_2,z_3 care îndeplinesc condiţiile

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\quad z_1+z_2+z_3\neq 0\ \text{ şi }\ z_1^2+z_2^2+z_3^2=0.$$

Să se determine $|z_1+z_2+z_3|$.

a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 149 Care este probabilitatea p, respectiv q, ca alegând una din soluţiile ecuaţiei $(x+2)\left(x^2-x-1\right)=0$ aceasta să fie reală, respectiv întreagă ?

a) $p=\dfrac{1}{3},\ q=0$ b) $p=1,\ q=\dfrac{1}{3}$ c) $p=q=\dfrac{1}{3}$

d) $p=1,\ q=0$ e) $p=\dfrac{1}{3},\ q=\dfrac{2}{3}$ f) $p=q=\dfrac{1}{2}$

AL 150 Care este probabilitatea p, respectiv q, ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n\in\mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101 ?

a) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{4}{101}$ b) $p = \dfrac{51}{101}, q = \dfrac{4}{101}$ c) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{5}{101}$

d) $p = \dfrac{51}{101}, q = \dfrac{5}{101}$ e) $p = \dfrac{50}{101}, q = \dfrac{3}{101}$ f) $p = \dfrac{49}{100}, q = \dfrac{3}{101}$

AL 151 Din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ se aleg aleator şase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{6}$ e) $\dfrac{1}{8}$ f) $\dfrac{1}{10}$

AL 152 Considerăm un alfabet format din simbolurile $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $*$ şi $\sharp$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

AL 153 Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\dfrac{A_4^2}{52}$ e) $\dfrac{C_4^2}{52}$ f) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$

AL 154 Câte secvenţe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

AL 155 Simona Halep şi Serena Williams joacă finala Turneului Winbledon după regula cel mai bun din 3 seturi. Se presupune că cele două jucătoare au şanse egale de a câştiga un set şi că rezultatul unui set este independent de alte rezultate. Dacă Simona Halep a câştigat deja primul set, care este probabilitatea ca ea să câştige finala?

a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4}$

AL 156 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obţinem suma punctelor 6?

a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 157 Care este probabilitatea ca aruncând de două ori succesiv două zaruri, să obţinem în ambele cazuri suma punctelor 7?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{49}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{6}{49}$

AL 158 O şesime din cantitatea de pizza vândută de un restaurant este cu brânză, iar o cincime din restul celor vândute este cu pepperoni. Andrei cumpără la întâmplare o pizza. Care este probabilitatea ca aceasta să fie cu pepperoni?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{30}$ f) $\frac{3}{5}$

AL 159 Andrei invită 12 prieteni la cină, din care jumătate sunt bărbaţi. Dintre prieteni, exact o femeie şi un bărbat aduc câte un desert. Selectăm la întâmplare o persoană dintre invitaţi. Care este probabilitatea ca aceasta să fie un bărbat care nu a adus desert sau să fie o femeie?

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{35}{36}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 160 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba şi 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziţionează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus şi unul Sony?

a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 161 Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se determine probabilitatea să se obţină aceeaşi faţă de exact 2 ori?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 162 Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\4 & -5 & -6\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A\cdot B-C$.

a) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 3 & 2\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & -7 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\2 & 3 & 2\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & 2\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-5 & 0 & -1\\2 & 3 & 2\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}-5 & 0 & -1\\2 & -7 & 3\\0 & -2 & -1\end{pmatrix}$

AL 163 Se consideră matricele:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & x\\x & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}y & 1\\2y & y\end{pmatrix} \text{ şi } C=\begin{pmatrix}y & 6\\2x+4y & 2y\end{pmatrix}.$$

Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $xA+yB=C$.

a) $x=1,\ y=2$ b) $x=2,\ y=1$ c) $x=-2,\ y=-2$

d) $x=2,\ y=-1$ e) $x=1,\ y=-2$ f) $x=2,\ y=2$

AL 164 Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

a) 10 b) e c) nu există

d) 1 e) 2 f) 5

AL 165 Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi funcţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_2$. Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ şi $f(B)$.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, 2B$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, -2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AL 166 Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

P_1 : Dacă A^2 se poate calcula, atunci A este o matrice pătratică;

P_2 : Dacă AB şi BA se pot calcula, atunci A şi B sunt matrice pătratice;

P_3 : Dacă AB şi BA se pot calcula, atunci AB şi BA sunt matrice pătratice;

P_4 : Dacă $AB = B$, atunci A este matricea identitate ?

a) P_1, P_2, P_3 b) P_2, P_3

c) P_1, P_2 d) P_1, P_3

e) P_2, P_3, P_4 f) nici o afirmaţie nu este corectă

AL 167 Fie A şi B două matrice pătratice. Care dintre următoarele matrice sunt întotdeauna egale cu $(A-B)^2$?

$M_1 = A^2 - B^2$

$M_2 = (B-A)^2$

$M_3 = A^2 - 2AB + B^2$

$M_4 = A(A-B) - B(A-B)$

$M_5 = A^2 - AB - BA + B^2$

a) M_2, M_4, M_5 b) M_1, M_2, M_3 c) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

d) M_2, M_3 e) M_2, M_3, M_5 f) M_1, M_2, M_3, M_4

AL 168 Să se determine numărul matricelor din mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & c \\ b & 0 & b \\ c & 1 & a-1 \end{pmatrix} \,\middle|\, M^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & x \end{pmatrix},\ a,b,c,x,y \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) 0 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4 f) 2

AL 169 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz}, dacă matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relaţia

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) 4 b) x c) 8 d) 2 e) e f) 1

AL 170 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a+b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

a) -2 b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) -1

AL 171 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$\mathrm{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A)\dots(I_2 + 2018A)],$$

unde $\mathrm{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X.

a) 0 b) $2018!$ c) $1 + 2017!$

d) $2019!$ e) $1 + 2018!$ f) $1 + 2019!$

AL 172 Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

astfel încât $AB \neq O_2$ şi $BA = O_2$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B.

a) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Z}$

d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$

AL 173 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută prin înmulţire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

a) $x_{11} = x_{22},\ x_{12} = x_{21} = 0$ b) $x_{11} = -x_{22},\ x_{12} + x_{21} = 1$

c) $x_{11} = x_{12} = 0,\ x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$

e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$

AL 174 Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AL 175 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2018}.$$

a) $\dfrac{2019^{2018}+1}{2018}A$ b) $\dfrac{2018^{2016}+1}{2017}A$ c) $\dfrac{2019^{2018}-1}{2018}A$

d) $2018A$ e) $1009 \cdot 2019\ A$ f) $\dfrac{2018^{2016}-1}{2017}A$

AL 176 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

AL 177 Fie matricea

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

a) X b) I_2 c) O_2 d) $-X$ e) $-I_2$ f) X^2

AL 178 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j \ , \\ 0, & i > j \ , \\ (-1)^{i+j}\ C_j^i \ , & i < j \ . \end{cases}$$

Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcţie de matricea identitate I_3 şi de puterile matricei $B = A - I_3$.

a) $A^n = nB^n + 2I_3$

b) $A^n = \left(\dfrac{n^2-n}{2} + 1\right) B + nI_3$

c) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\ B^2 + nB + I_3$

d) $A^n = \dfrac{n^2-n}{2}\ B + nI_3$

e) $A^n = nB^2 + \dfrac{n^2-n}{2}\ B + I_3$

f) $A^n = \dfrac{n^2-n-1}{2}\ B^2 + nB + I_3$

AL 179 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Să se determine suma elementelor matricei A^n, $n \geq 2$.

a) $3^n + 2^{n+1}$

b) $4 \cdot 3^n - 2^n$

c) $4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} + 6^{n-1}$

d) $3^{n+1} + n \cdot 2^{n-1}$

e) $4 \cdot 3^n - 2^{n-1}$

f) $3^{n+1} - 2^n + 6^{n-1}$

AL 180 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \ x \neq \frac{1}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+4035^n & 0 & 1-4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-4035^n & 0 & 1+4035^n \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$ f) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1-4035^n \end{pmatrix}$

AL 181 Să se determine numerele reale a şi b pentru care soluţia ecuaţiei

$$X^{2017}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

a) $a=0,\ b=0$ b) $a=2017,\ b=\frac{1}{2017}$

c) $a=\frac{1}{2017},\ b=2017$ d) $a=0,\ b=\frac{1}{2017}$

e) $a=2017,\ b=0$ f) $a=\frac{1}{2017},\ b=\frac{1}{2017}$

AL 182 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$ad = bc \;\; \text{şi} \;\; a + d \neq 0.$$

Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) $\dfrac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$ b) $(a+b+c+d)^n + 2$

c) $\dfrac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\dfrac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$

e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

AL 183 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{36}.

a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36} I_2$ f) $3^{36} I_2$

AL 184 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017}.

a) $2^{2017} A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008} A$ e) $2^{2017} I_3$ f) $2^{1008} I_3$

AL 185 Se consideră mulţimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 6(2^n-1) \\ 2+2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$ b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}-6 \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n+1) \\ 2-2^{n+1} & 4-3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 6(2^n-1) \\ 2(1-2^n) & 4(1-3\cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2}+3 & 3\cdot 2^{n+1}+6 \\ 2(1-2^n) & 4+3\cdot 2^n \end{pmatrix}$

AL 186 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n, unde n este un număr natural nenul.

a) 2^{n+1} b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\frac{5^{n+1}}{3}$

d) $\frac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\frac{4^n + 5^n}{3} + 1$

AL 187 Să se determine suma tuturor elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) -2015 b) -2013 c) -2015 sau 2023

d) 2018 e) -2017 sau 2023 f) -2017 sau -2013

AL 188 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{2020}\begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$ f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 189 Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \ldots + A^n(a)$ şi să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\dfrac{1}{n}\ B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a impar b) $\begin{pmatrix} n & 5a\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a impar

c) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a par d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a par

e) $\frac{n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a impar f) $\begin{pmatrix} n & 5a\dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a par

AL 190 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 6

AL 191 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 192 * Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

să aibă rangul minim.

a) $\pm\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 193 Pentru câte valori ale parametrului real m, matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi?

a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 194 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$.

a) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ b) 1

c) $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$ d) 0

e) $-a_1 + b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3$ f) -1

AL 195 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1 + \log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\mathrm{tr}(A))^{\det A}$, unde $\mathrm{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A.

a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$ b) 1

c) 3 d) $\frac{1}{2}\log_2 3$

e) $\frac{3}{2}\log_3 2 + 3$ f) $\log_3 2 + \frac{1}{2}\log_2 3 + 3$

AL 196 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \sum\limits_{k=1}^{n} A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B.

a) $(2^{n+1} - 1)(3^n - 1)$ b) 1 c) 0

d) $3(2^n - 1)(3^n - 1)$ e) 6^n f) $\frac{1}{6^n}$

AL 197 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) $a + b + c$ b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $ab + bc + ca$ d) $(a + b)(a + c)(b + c)$

e) $-a - b - c$ f) $-4(b - a)(c - a)(c - b)$

AL 198 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietătea că $\det(A - I_2) = 2$. Să se calculeze

$$\det A + \det(A - 2I_2).$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL 199 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

a) 0 b) b c) c

d) a e) $a+b+c$ f) $(a+b+c)^3$

AL 200 Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a,b,c = \overline{1,9}$.

a) $99800\ (a-b)(b-c)(c-a)$ b) $998001\ (a^3+b^3+c^3-3abc)$

c) $10^6\ abc$ d) $9908\ (a+b+c)^3$

e) 0 f) $999\ \overline{abc}$

AL 201 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiţia $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i,j,k = \overline{1,3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A.

a) 2017 b) -2017 c) 1 d) -1 e) 0 f) 1009

AL 202 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-a-1 & ac-a & a^2-b^2-c \\ b^2+ab-a-1 & a^2-c^2-b & ab-a \\ b^2c+bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $1 \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ c) 1

d) $1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 203 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^3} & -\dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} \\ \\ \dfrac{1}{b^3} & -\dfrac{1}{b^2} & \dfrac{1}{b} \\ \\ \dfrac{1}{c^3} & -\dfrac{1}{c^2} & \dfrac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

a) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

b) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

c) $\dfrac{1}{abc}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)$

d) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

e) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

f) $\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)$

AL 204 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \leq i \leq n-1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 205 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $| x_1 | + | x_2 | + | x_3 |$.

a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) -3 f) 4

AL 206 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relaţiile $AA^t = A^tA = I_3$ şi are determinantul egal cu 1.

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 207 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A. Câte elemente are mulţimea $\{I_2, A, A^2, ..., A^{2018}\}$?

a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 208 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $AB \neq BA$ şi $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \operatorname{tr}(A + B),$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X.

a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 209 Să se determine mulţimea tututor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

să aibă soluţie nesingulară.

a) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\mathbb{R}$

d) $\emptyset$ e) $\{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

AL 210 Fie ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) 12 b) 5 c) -9 d) -4 e) 7 f) 3

AL 211 Să se determine mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}\right\}$ d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

e) $\left\{\begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}\right\}$ f) $\left\{\begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}\right\}$

AL 212 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibe loc relaţia

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

a) $2a + b = \det A$ b) $a = 1,\ b = 2,\ c = 0$

c) $a = 0,\ b = 2,\ c = -1$ d) $a = -1,\ b = 2,\ c = 0$

e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ f) $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$

AL 213 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \ \text{ sau } \ i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \ \text{ şi } \ i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 214 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A=\begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3},1\right\}$ b) $\left(\frac{2}{3},1\right)$ c) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

d) $\left(\frac{1}{3},2\right)$ e) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[2,+\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3},1\right]$

AL 215 Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc-1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A-aA^{-1})=\det(A-A^{-1})=4.$$

Să se determine abc.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 216 Fie matricea

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2\neq O_2$ şi

$$A^4-(a+d)^2A^2+(ad-bc)^2I_2=O_2.$$

Să se studieze existenţa inversei lui A şi în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1}.

a) $\dfrac{a+d}{ad-bc}\,I_2$ b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ d) $\dfrac{1}{a+d}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) A f) $\dfrac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 217 Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ două matrice de forma

$$A = \left[\ a \mid \ \ c_2 \mid \ \ c_3 \mid \ \ c_4\ \right], \quad \text{respectiv} \quad B = \left[\ b \mid \ \ c_2 \mid \ \ c_3 \mid \ \ c_4\ \right],$$

unde a, b, c_2, c_3, c_4 sunt coloanele acestor matrice. Dacă

$$\det(A) = 1 \quad \text{şi} \quad \det(B) = 4,$$

cât este determinantul matricei

$$C = \left[\ c_2 \mid \ \ a+b \mid \ \ c_3 \mid \ \ c_4\ \right]?$$

a) 5 b) 0 c) 4

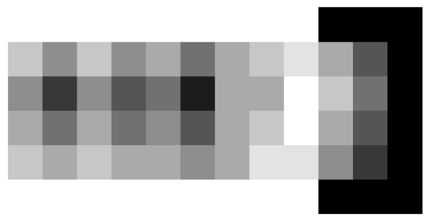
d) -5 e) 1 f) Nu se poate determina

AL 218 Imaginii de mai jos

îi asociem matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6,13},$$

unde 1 reprezintă un pixel alb, iar 0 un pixel negru. Pentru a blura această imagine, calculăm matricea $B \in \mathcal{M}_{6,13}$ care păstrează conturul matricei A, iar b_{ij}, $i \in \{2,5\}$, $j \in \{2,12\}$ este media aritmetică a elementelor matricei minorului de ordinul 3 al matricei A care îl are în centru pe a_{ij}. Dacă înlocuim fiecare element al matricei B cu câte un pixel în nuanţa de gri corespunzătoare valorii numerice b_{ij}, obţinem cea de-a doua imagine. Care este diferenţa între cel mai deschis (cel mai apropiat de 1) pixel şi cel mai închis (cel mai apropiat de 0) pixel de pe a doua coloană a matricei B?



a) 0 b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{7}{9}$

AL 219 Pentru a cripta o parolă formată din litere, punem fiecare literă întro matrice coloană, apoi înlocuim fiecare literă cu numărul corespunzător din alfabetul englez conform tabelului de mai jos şi obţinem matricea coloană B. Înmulţim matricea cheie A cu matricea coloană B şi obţinem matricea coloană C. Elementele matricei C le înlocuim cu literele corespunzătoare din tabel. Dacă în acest mod obţinem parola criptată "UPT", iar matricea cheie este

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -6 \\ 5 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

care a fost parola înainte de criptare?

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

a) UPT b) TIM c) AUT d) CIB e) TPU f) CTI

AL 220 O minigrilă Sudoku este o matrice 4×4 de numere întregi cu proprietatea că în fiecare linie, fiecare coloană şi fiecare bloc 2×2, numerele de la 1 la 4 apar exact o dată. Câte minigrile Sudoku distincte se pot construi?

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

a) 280 b) 288 c) 282 d) 285 e) 284 f) 290

AL 221 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4\ . \end{cases}$$

a) $(-24, 14, 19)$ b) $(-2, -3, 3)$ c) $(21, 10, -14)$

d) $(-5, -3, 6)$ e) $(-14, -21, 24)$ f) $(3, -2, -3)$

AL 222 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Care din următoarele relaţii este verificată de soluţiile sistemului?

a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$ b) $x + y + z = 3$ c) $x^2 + y - z^2 = -1$

d) $x + y^2 - z^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ f) $x^2 + y + z^2 = 4z.$

AL 223 Soluţia sistemului $(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, este $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se precizeze care din următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice valori posibile ale lui x_1, x_2 şi x_3.

a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$

d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 224 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}^* \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui a pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\mathbb{R}^*$ d) $\mathbb{R}^*_+$ e) $\mathbb{Q}^*$ f) $\{-1\}$

AL 225 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m-1)\,z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1 \ . \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

a) $\left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \dfrac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

AL 226 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui a pentru care soluţia sistemului verifică relaţia $3x + 3y - z = 0$.

a) $\{0\}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 227 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x+y+mz+4t=p \\ 2x+3y+z+6t=1 \\ -x-2y+3z+nt=2, \quad m,n,p\in\mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 228 Să se determine acele soluţii (x,y,z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 3x-y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

pentru care $x^2+y^2+z^2=1$.

a) $(0,1,0)$, $\left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},\frac{10}{13}\right)$ b) $(1,0,0)$, $\left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right)$

c) $\left(\frac{12}{13},\frac{7}{13},-\frac{3}{13}\right)$, $(0,0,-1)$ d) $(0,0,1)$, $\left(\frac{12}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right)$

e) $(0,0,1)$, $\left(-\frac{12}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13},\frac{4}{13},-\frac{3}{13}\right)$, $(0,0,1)$

AL 229 Fie sistemul

$$\begin{cases} x+3y+4z=m \\ 2x+4y+6z=-1 \\ -2x+6y+4z=5, \quad m\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $-\dfrac{1}{10}$ b) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{10}\right\}$

d) $\dfrac{1}{10}$ e) $-\dfrac{1}{20}$ f) $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{20}\right\}$

AL 230 Fie sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+9y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$$

şi (x_0, y_0, z_0) o soluţie nebanală a sistemului. Să se determine valoarea raportului

$$\frac{5x_0-10y_0-z_0}{10x_0+5y_0+3z_0}\,.$$

a) $\dfrac{23}{5}$ b) 1 c) $\dfrac{7}{5}$ d) 2 e) -1 f) $-\dfrac{7}{5}$

AL 231 Fie sistemul de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} (a-2)x+ay+(a+1)z=0 \\ (b-2)x+by+(b+1)z=0 \\ (c-2)x+cy+(c+1)z=0,\ \ a,b,c\in\mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluţie.

a) $a=b=c$ b) $a,b,c\in\mathbb{R}$ c) $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$

d) $\nexists\ a,b,c\in\mathbb{R}$ e) $a=b\neq c$ f) $a\neq b=c$

AL 232 Să se determine mulţimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x+my+m^2z=0 \\ m^2x+y+mz=0 \\ m^2x+my+z=0 \end{cases}$$

să admită şi soluţii diferite de soluţia banală.

a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\left\{ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\}$ c) $\{\pm 1\}$

d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f) $\left\{ \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$

AL 233 Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$

d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

AL 234 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a + 3) = 0\ ,\ a \neq 0. \end{cases}$$

Să se determine parametrul real a astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat. Pentru această valoare, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este soluţia sistemului.

a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 235 Pentru care din următoarele cazuri de mai jos, sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b,\ \ a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este incompatibil?

a) $a-b+c=0$ b) $a,b,c\in\emptyset$ c) $a+b-c=0$

d) $a+b-c\neq 0$ e) $a+b+c=0$ f) $a+b+c\neq 0$

AL 236 Fie sistemul

$$\begin{cases} ax+by+cz=1 \\ cx+ay+bz=1 \\ bx+cy+az=1, \quad a,b,c\in\mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Care dintre următoarele propoziţii matematice este adevărată?

a) Dacă $a=b=c$ atunci sistemul este compatibil determinat

b) Dacă $a=1, b=2, c=-3$ atunci sistemul este incompatibil

c) Dacă $a=1, b=3, c=2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat

d) Dacă $a=-1, b=3, c=-2$ atunci sistemul este compatibil determinat

e) Dacă $a=b=c$ atunci sistemul este incompatibil

f) Toate afirmaţiile sunt false

AL 237 Fie (x_t, y_t, z_t) soluţia sistemului

$$\begin{cases} x+y+2z=1+2^{t+1} \\ x+2y+z=2+2^t-\dfrac{1}{2^t} \\ 2x+y+z=1+2^t+\dfrac{1}{2^t}, \ t\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se determine

$$\lim_{t\to\infty} x_t y_t z_t.$$

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 238 Pe $\mathbb{Q}^*$ se defineşte operaţia „ $*$ “ care satisface următoarele proprietăţi:

(i) $(x * y) \cdot (z * t) = (x \cdot z) * (y \cdot t)$, pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{Q}^*$;

(ii) $x * x = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$;

(iii) $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$,

unde „ $\cdot$ “ este operaţia de înmulţire în $\mathbb{Q}^*$. Să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{2017} \left[\frac{1}{k} * (k+1) \right].$$

a) $\dfrac{2016}{2017}$ b) $\dfrac{1}{2017}$ c) 2017 d) $\dfrac{1}{2018}$ e) 2018 f) $\dfrac{2017}{2018}$

AL 239 Pe mulţimea funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definim legea de compoziţie

$$(f \star g)[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k] \cdot g[n-k] .$$

Să se determine $(f \star g)[n]$ pentru

$$f[n] = \frac{3^n}{n!} \quad \text{şi} \quad g[n] = \frac{(-2)^n}{n!} .$$

a) $\dfrac{1}{n!}$ b) $\dfrac{5^n}{n!}$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ d) $\dfrac{6^n}{n!}$ e) $\dfrac{(-6)^n}{n!}$ f) $n!$

AL 240 Pe mulţimea $(0, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = \frac{xy}{x+y}, \quad x, y \in (0, +\infty).$$

Să se calculeze

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{50} .$$

a) $\dfrac{1}{1225}$ b) $\dfrac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\dfrac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\dfrac{1}{1300}$

AL 241 Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie

$$x \circ y = (x-a)^2 (y-a) + a, \ a \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x \circ x = x$.

a) $\{a, a-1\}$ b) $\{a, a+1\}$ c) $\{a-1, a, a+1\}$
d) $\{-a, 1-a\}$ e) $\{-a, -a-1\}$ f) $\{-a, 1-a, -a-1\}$

AL 242 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v), $u, v > 0$, este soluţia sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ x \circ 2 + y \circ 3 = 2\sqrt{13} \end{cases},$$

să se determine $u + v$.

a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$.

AL 243 Se consideră $\mathbb{R}$ cu legea de compoziţie $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operaţia de înmulţire a matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia $f : \mathbb{R} \to M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relaţia $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, să se determine mulţimea valorilor lui a.

a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\emptyset$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 244 Se consideră mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Să se determine mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua $\det A$, ştiind că şi $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 245 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Să se determine valorile parametrilor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $(\mathcal{M}, \cdot)$ să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

a) $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ b) $\alpha = \beta,\ \gamma = 0$ c) $\beta = 2\alpha,\ \gamma = 1$

d) $\alpha = 2\beta\ ,\ \gamma = -1$ e) $\alpha = 2\beta,\ \gamma = 1$ f) $\alpha = -\beta,\ \gamma = 1$

AL 246 Pe mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziţie $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă şi comutativă?

a) $a \in \{-3, 2\},\ b = a$ b) $a \in \{-2, 3\},\ b = a$ c) $a \in \{-1, 2\},\ b = a$

d) $a = -2,\ b = 3$ e) $a = -1,\ b = 2$ f) $a = -3,\ b = 2$

AL 247 Să se determine o relaţie între parametrii reali a şi b astfel încât legea de compoziţie $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

a) $a^2 = a + b$ b) $a = a^2 + b$ c) $b^2 + a = a^2$

d) $a + a^2 = b$ e) $2a = b + a^2$ f) $2b + a = a^2$

AL 248 Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei

$$x * x = -2.$$

a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1, -1\}$ d) $\{2, -2\}$ e) $\{1, -2\}$ f) $\{-2\}$

AL 249 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i*i^2*i^3*i^4*i^5$.

a) $e = i,\ -1 + i$ b) $e = 1 + i,\ i$ c) $e = 1,\ 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ i$ e) $e = -i,\ 2 - i$ f) $e = 2 + i,\ 1 - i$

AL 250 Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 251 Pe mulţimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z} + 1$ se defineşte operaţia

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale monoidului $(2\mathbb{Z} + 1, *)$.

a) $\{-3,1\}$ b) $2\mathbb{N}+1$ c) $2\mathbb{Z}+1$
d) $\{-5,-3,1,3\}$ e) $\{-3,-1,1,3\}$ f) $\{-5,1\}$

AL 252 Fie mulţimea

$$\mathcal{M}=\left\{\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array}\right) \;\Big|\; a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului $(\mathcal{M},\cdot)$, unde "$\cdot$" reprezintă operaţia de înmulţire a matricelor.

a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 253 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + Im(z_1)Im(z_2).$$

Să se determine elementele inversabile în raport cu această lege.

a) $\{z\in\mathbb{C},\ Re(z)=0\}$ b) $\{z\in\mathbb{C},\ Re(z)\neq 0\}$
c) $\mathbb{C}$ d) $\mathbb{C}^*$
e) $\{z\in\mathbb{C},\ Im(z)=0\}$ f) $\{z\in\mathbb{C},\ Im(z)<0\}$

AL 254 Se consideră matricele

$$A=\left(\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{array}\right)$$

şi mulţimea $\mathcal{M}=\{xA+B \mid x\in\mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile din $\mathcal{M}$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

a) $\emptyset$ b) $\mathcal{M}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}A+B\right\}$ c) $\mathcal{M}\setminus\{I_2\}$
d) $\mathcal{M}\setminus\{-A+B\}$ e) $\mathcal{M}$ f) $\mathcal{M}\setminus\{2A+B\}$

AL 255 Fie $a \geq 0$ şi $M = (a, +\infty) \setminus \{a+1\}$ pe care se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = (x-a)^{\ln \sqrt[k]{y-a}} + a, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$.

a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}+a}$ b) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a} + a$ c) $\dfrac{e^{k^2}}{x-a}$

d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$ e) $e^{k^2} - x - 2a$ f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$

AL 256 Pe mulţimea $\mathbb{R}_+^*$ se introduce legea de compoziţie

$$x * y = a^{\sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b}},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, n impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziţie.

a) $\dfrac{b^{2^n}}{x}$ b) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}}$ c) $a^{\sqrt[n]{2\log_a^n b - \log_a^n x}}$

d) $\dfrac{b^2}{x}$ e) $a^{\sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}}$ f) $\dfrac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

AL 257 Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile faţă de legea $*$ din mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $(b, 1)$, $b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0)$, $b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1)$, $b \in \mathbb{Z}$

d) $(\pm 1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b)$, $b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b)$, $b \in \mathbb{Z}$

AL 258 Fie ecuaţia $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, care are toate rădăcinile reale. Ştiind că mulţimea tuturor acestor soluţii este un grup faţă de legea

$$x * y = x + y + 3, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

să se determine $a + b + c$.

a) -9 b) -27 c) 63 d) 27 e) 54 f) 28

AL 259 Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul al treilea. Ştiind că mulţimea rădăcinilor sale $\{x_1, x_2, x_3\}$ este grup de ordinul trei în raport cu înmulţirea numerelor complexe, să se calculeze $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

a) 0 b) -1 c) $-i$ d) 3 e) $3i$ f) 1

AL 260 Fie $f = X^4 + \widehat{a}X^3 + \widehat{b}X^2 + \widehat{c}X + \widehat{d}$ un polinom din $\mathbb{Z}_8[X]$. Să se calculeze $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d}$ ştiind că f are patru rădăcini distincte ce formează grup faţă de înmulţirea din $\mathbb{Z}_8$.

a) $\widehat{0}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{5}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{2}$ f) $\widehat{7}$

AL 261 Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 262 Fie mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ aX & 1 & 0 \\ na^2X^2 & aX & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

inclusă în mulţimea matricelor pătratice de ordinul 3 cu elemente din mulţimea polinoamelor de grad cel mult 2 având coeficienţi reali. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real n astfel încât $(G, \cdot)$ să fie grup.

a) $\{0\}$ b) $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ c) $\{1\}$ d) $\mathbb{R}$ e) $\emptyset$ f) $\mathbb{R}^*$

AL 263 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dat şi mulţimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C},\ A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are grupul G în raport cu înmulţirea matricelor?

a) $(n-1)^2$ b) n c) $n-1$

d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) n^2

AL 264 Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru. Ştiind că există $x, y \in G$ cu proprietăţile $x^2 = e$ şi $yx = xy^2$, să se determine $y^{2018}x$.

a) e b) y c) y^{2017} d) x^{2019} e) xy f) $y^{1009}x$

AL 265 Ştiind că o parte din tabla operaţiei unui grup $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ este

$*$	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y		
b	b					
x		z				a
y						
z						

,

să se determine $y * z$.

a) e b) x c) a d) z e) b f) y

AL 266 Câte dintre mulţimile:

$$\mathcal{M}_1 = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{M}_2 = \{x \cdot 3^{x-1} \mid x \in \mathbb{N}^*\},$$
$$\mathcal{M}_3 = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}^*\},$$
$$\mathcal{M}_4 = \{x \cdot 2^{y-1} \mid x, y \in \mathbb{N}^*\},$$
$$\mathcal{M}_5 = \{2^x \cdot 3^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{M}_6 = \{x \cdot 3^{y-1} \mid x \in \mathbb{Q}^*, y \in \mathbb{Z}\}$$

sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$?

a) 6 b) 1 c) 2 d) 4 e) 5 f) 3

AL 267 Fie matricea $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi mulţimea

$$G=\left\{M(x)=I_3+xA^2, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to G$, $f(x)=I_3+xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R},*)$ şi $(G,\cdot)$, unde relaţia " $*$ " este definită prin $x*y=x+y+axy$, $a\in\mathbb{R}$, iar " $\cdot$ " este înmulţirea matricelor, să se determine valoarea parametrului a.

a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25.

AL 268 Fie $\mathbb{R}^*$ dotată cu legea de compoziţie definită prin $a*b=kab$, $k\in\mathbb{R}$ şi mulţimea

$$M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}^*\right\}$$

dotată cu înmulţirea matricelor " $\cdot$ ". Ştiind că funcţia

$$f:\mathbb{R}^*\to M,\quad f(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*,*)$ şi $(M,\cdot)$, să se determine mulţimea valorilor lui k.

a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Q}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 269 Fie $G=(1,+\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia " $*$ " definită prin

$$x*y=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}.$$

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f:(0,+\infty)\to G,\quad f(x)=\sqrt{ax+b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0,+\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

a) $a = 0,\ b = 2$ b) $a = 1,\ b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0,\ b = 1$

d) $a = 0,\ b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1,\ b = 2$ f) $a = b = 1$

AL 270 Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ şi } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z}, \perp)$ şi $(\mathbb{Z}, \top)$.

a) $(1, -10)$, $(-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$

d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0)$, $(-1, -10)$ f) $(1, 0)$

AL 271 Fie mulţimea

$$M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a \in (0, \infty) \right\}.$$

Care din următoarele afirmaţii este adevărată?

a) $(M, \cdot)$ nu este grup;

b) $(M, \cdot)$ este grup comutativ izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$;

c) $(M, \cdot)$ este grup comutativ dar nu este izomorf cu $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$;

d) M nu este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricilor;

e) Există $a \in (0, \infty)$ astfel încât $A(a)$ să fie singulară;

f) $I_3 \notin M$.

a) a b) b c) c d) d e) e f) f

AL 272 Să se determine toate automorfismele f ale grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

a) $f(x) = nx, \forall\, n, x \in \mathbb{Z}$ b) $f(x) = \pm x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) = 2x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$ d) $f(x) = ax + b,\ a, b, x \in \mathbb{Z}$

e) $f(x) = \pm 2x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$ f) $f(x) = x, \forall\, x \in \mathbb{Z}$

AL 273 Să se determine numărul tuturor morfismelor de grupuri

$$f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$$

astfel încât $f(\widehat{2}) = \widehat{3}$.

a) 0 b) 1 c) 2

d) 3 e) 4 f) o infinitate

AL 274 Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5,\ f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5,\ f_{a,b}(x) = ax + b,\ a \neq \widehat{0}$. Să se găsească toate funcţiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f_{a,b}^4 = f_{\widehat{2},\widehat{0}}^{2018} \circ f_{\widehat{2},\widehat{2}}^{2020} \circ f_{\widehat{2},\widehat{4}}^{2022},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{de\ n-ori}$.

a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}$; $f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$

AL 275 Pe mulţimea numerelor complexe se consideră operaţiile algebrice

$$x \perp y = x + y - i \quad \text{şi} \quad x \top y = xy + ax + by + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$ pentru care operaţia "$\top$" este distributivă în raport cu operaţia "$\perp$".

a) $a = i,\ b = c = -i - 1$ b) $a = b = i,\ c = -i - 1$

c) $a = -i,\ b = i,\ c = i - 1$ d) $a = -i,\ b = c = i - 1$

e) $a = -i,\ b = i,\ c = -i - 1$ f) $a = b = -i,\ c = i - 1$

AL 276 Fie legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

a) $e_\perp = \widehat{10}$, $e_\top = \widehat{3}$ b) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{3}$ c) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{6}$

d) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{4}$ e) $e_\perp = \widehat{4}$, $e_\top = \widehat{3}$ f) $e_\perp = \widehat{3}$, $e_\top = \widehat{11}$

AL 277 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

a) $\mathbb{Z}[i]$ b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ c) $\{1, i\}$

d) $\{\pm 1, \pm i\}$ e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ f) $\emptyset$

AL 278 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{şi} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 17$ b) $a = b = 1$, $c = 56$ c) $a = b = c = 7$

d) $a = b = 1$, $c = 7$ e) $a = b = c = 1$ f) $a = b = c = -1$

AL 279 Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie

$$x * y = x + y - 2 \;\; \text{şi} \;\; x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \;\; f(x) = ax + b, \; a \neq 0, \; a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = -2$ f) $a = -1, b = 2$

AL 280 Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy - 2(x+y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \frac{1}{2}$ c) $a = 0$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ f) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$

AL 281 Fie mulţimea

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x + ay & by \\ cy & x - ay \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se determine o relaţie între parametrii reali a, b, c astfel încât

$$f : \mathbb{C} \to \mathcal{K} \quad f(x + yi) = \begin{pmatrix} x + ay & by \\ cy & x - ay \end{pmatrix}$$

să fie izomorfism între corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ şi corpul $(\mathcal{K}, +, \cdot)$.

a) $2a + bc = 1$ b) $a^2 + bc = 1$ c) $2a = bc - 1$

d) $a^2 + bc + 1 = 0$ e) $a^2 = bc - 1$ f) $a^2 - bc = 1$

AL 282 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în $\mathbb{Z}_{11}$ cu soluţia (x_0, y_0). Dacă y_0' este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my_0' = x_0$.

a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

AL 283 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluţia $(\widehat{3}, \widehat{2})$ şi să se specifice numărul total al soluţiilor.

a) $a = \widehat{2}$, 5 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii
b) $a = \widehat{4}$, 7 soluţii; $a = \widehat{6}$, 3 soluţii
c) $a = \widehat{1}$, 3 soluţii; $a = \widehat{5}$, 8 soluţii
d) $a = \widehat{3}$, 8 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii
e) $a = \widehat{1}$, 5 soluţii; $a = \widehat{5}$, 3 soluţii
f) $a = \widehat{3}$, 6 soluţii; $a = \widehat{7}$, 4 soluţii

AL 284 În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuaţia

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 285 Fie mulţimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluţiile ecuaţiei $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

a) $A(\widehat{7})$
b) $A(\widehat{3})$
c) $A(\widehat{2})$, $A(\widehat{5})$, $A(\widehat{8})$
d) $A(\widehat{1})$, $A(\widehat{4})$
e) $A(\widehat{0})$
f) nu are soluţii

AL 286 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

AL 287 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care A este inversabilă şi să se determine A^{-1}.

a) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ b) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

c) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ d) $m = \widehat{2}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

e) $m = \widehat{1}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ f) $m = \widehat{0}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$

AL 288 Fie polinomul $P = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Să se determine polinomul Q astfel încât să fie îndeplinită condiţia

$$P(x) = Q(x) + 2Q'(x) + 3Q''(x) + 4Q'''(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) $4X^3+3X^2+2X+1$ b) $4X^3-21X^2+2X+1$

c) $4X^3-21X^2+14X+3$ d) $4X^3-7X^2+21X+12$

e) $4X^3+2X^2+3X+1$ f) $-4X^3+12X^2+13X-1$

AL 289 Fie polinoamele $f=X^3+2X^2-X-5$ şi $g=X^2+1$. Să se determine câtul c şi restul r ale împărţirii lui f la g.

a) $c=X+2$, $r=0$ b) $c=X^2+1$, $r=X+2$

c) $c=X+2$, $r=-2X-7$ d) $c=-2X-7$, $r=X+2$

e) $c=X+1$, $r=-2$ f) $c=X-1$, $r=0$

AL 290 Fie polinomul $f=X^3-2X^2+aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărţirii lui f la X^2-X-2.

a) $a=1$, $b=4$, $X+1$ b) $a=-1$, $b=4$, $2X+2$

c) $a=1$, $b=4$, $2X+2$ d) $a=-1$, $b=2$, $2X+1$

e) $a=1$, $b=2$, $X+2$ f) $a=-1$, $b=4$, $X-1$

AL 291 Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât restul împărţirii polinomului $f=X^3+aX^2+bX+c$ la X^2+2 să fie $X+1$ şi restul împărţirii lui f la $X+1$ să fie 3.

a) $a=3$, $b=2$, $c=5$ b) $a,b,c\in\emptyset$

c) $a=-2$, $b=3$, $c=5$ d) $a=2$, $b=3$, $c=5$

e) $a=3$, $b=2$, $c=-5$ f) $b=3$, $c=2a+1$, $a\in\mathbb{R}$

AL 292 Se consideră polinomul $f=X^6+aX^5+bX^4+cX^3+aX^2+bX+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b,c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g=X^5-5X^3+4X$.

a) $a, b, c \in \emptyset$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $a = b = c = 0$ d) $a = c = 1$, $b = -1$

e) $a = c = -1$, $b = 1$ f) $a = 1$, $b = -5$, $c = 4$

AL 293 Să se determine polinomul cu coeficienţi raţionali de grad minim care împărţit la $X^2 + 2X - 3$ dă restul $3X + 11$ şi împărţit la $X^2 - 4X + 5$ dă restul $7X - 3$.

a) $-X^3 - 4X + 12$ b) $X^3 + 2X - 17$ c) $-X^3 + 4X + 11$

d) $X^3 - 4X + 17$ e) $X^3 + 3X + 15$ f) $-X^3 + 17X - 5$

AL 294 Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ şi } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) X b) 0 c) $X - 2000$

d) $X + 2014$ e) $2016 \cdot 2014$ f) $X - 2016$

AL 295 Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât polinomul $f = (X-1)^7 + a(X-1)^4 + bX + c$ să se dividă cu $(X+1)^3$.

a) $a = 28$, $b = 448$, $c = 128$ b) $a = 56$, $b = 448$, $c = 576$

c) $a = 56$, $b = 320$, $c = 81$ d) $a = 28$, $b = 448$, $c = 192$

e) $a = 84$, $b = 320$, $c = 81$ f) $a = 28$, $b = 320$, $c = 128$

AL 296 Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul $X^9 + mX^2 + n$ să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

a) $m = 0$, $n = 0$ b) $m = 0$, $n = -1$ c) $m = -1$, $n = 0$

d) $m = -1$, $n = -1$ e) $m = 1$, $n = 0$ f) $m = 0$, $n = 1$

AL 297 Să se determine restul împărţirii polinomului X^n la polinomul $X^2 + 2X - 3$.

a) $\frac{1-(-3)^n}{4}X + \frac{3+(-3)^n}{4}$ b) $\frac{1}{4}[(1+(-3)^n)X + 3 + (-3)^n]$

c) $\frac{1-(-3)^n}{4}X + \frac{3-(-3)^n}{4}$ d) $\frac{2-(-3)^n}{4}X + \frac{3+(-3)^n}{4}$

e) $\frac{1-(-3)^n}{4}X + \frac{3+3^n}{4}$ f) $\frac{1}{4}[(1+3^n)X + 3 + (-3)^n]$

AL 298 Să se determine restul împărţirii polinomului $(X^3 + X + 1)^{19}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

a) -1 b) X c) $X + 1$ d) 0 e) $X - 1$ f) 1

AL 299 Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0,$$

ştiind că are rădăcini opuse.

a) $a = -3$, $\{1, 2, \pm\sqrt{2}i\}$ b) $a = -1$, $\{\pm 1, \pm 2\}$

c) $a = 2$, $\{1, 2, \pm 2i\}$ d) $a = -2$, $\{1 \pm i, \pm 1\}$

e) $a = -1$, $\{\pm 2, \pm i\}$ f) $a = -3$, $\{\pm 1, \pm\sqrt{2}i\}$

AL 300 Fie polinomul $f = X^4 + a^2X^3 - 7X^2 + aX + 6$. Să se determine mulţimea tuturor valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left\{-1, \frac{8}{9}\right\}$

d) $\left\{-1, 0, \frac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1, 0\}$ f) $\{-1\}$

AL 301 Fie polinomul $f = X^3 + X^2 - 2X - 2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

a) $(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ b) $(X-1)(X^2+2)$

c) $(X+1)(X^2-2)$ d) $(X-1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$

e) $(X+1)(X-2)(X+2)$ f) $(X+1)(X^2+2)$

AL 302 Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

a) $(X+\widehat{4})^2(X^2+X+\widehat{1})$ b) $(X+\widehat{4})(X+\widehat{2})(X^2+\widehat{1})$

c) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})^2(X+\widehat{1})$ d) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{3})(X^2+\widehat{1})$

e) $(X+\widehat{2})^2(X^2+X+\widehat{1})$ f) $(X+\widehat{2})(X+\widehat{4})(X^2+X+\widehat{1})$

AL 303 Fie polinomul $f = (1-2X)^{2017} + (3X-2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienţilor polinomului f.

a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 304 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluţia $1+i$ şi să se găsească celelalte soluţii.

a) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,-6\}$ b) $a=-3$, $b=6$, $\{1-i,1+i,-1\}$

c) $a=12$, $b=-6$, $\{1-i,1,12\}$ d) $a=6$, $b=-12$, $\{1+i,-1,-3\}$

e) $a=-6$, $b=12$, $\{1-i,-1,6\}$ f) $a=4$, $b=6$, $\{1+i,1,6\}$

AL 305 Fie $P\in\mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Ştiind că

$$xP(x-1)=(x-3)P(x),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

AL 306 Fie polinomul $P=X^3+mX^2+nX-a^3$, unde $m,n\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^*$. Ştiind că $P(a-x)+P(a+x)=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

a) 0 b) a c) $(2017-a)^3$ d) 2017^3 e) a^3 f) 2017

AL 307 Polinoamele cu coeficienţi reali aX^2+bX+c, aX^3+bX^2+bX+a şi aX^3+cX^2+cX+a, $a\neq 0$, admit o rădăcină comună dacă şi numai dacă:

a) $a,b,c\in\mathbb{R}$ b) $a+b+c=0$, $b\neq c$

c) $a-b+c=0$, $b\neq c$ d) $a+b-c=0$

e) $-a+b+c=0$ f) $-a+b+c=0$, $a\neq b$.

AL 308 Fie polinoamele $P=X^3-6X^2+11X-6$ şi $Q=aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Să se calculeze suma soluţiilor ecuaţiei $P(Q(x))=0$.

a) 0 b) $\dfrac{a}{b}$ c) $\dfrac{6-3b}{a}$ d) $\dfrac{b}{a}$ e) $\dfrac{1-b}{a}$ f) 1

AL 309 Fie polinoamele P şi Q cu proprietatea $P(x)=Q(x)+Q(1-x)$. Ştiind că P are coeficienţi naturali şi $P(0)=0$, să se determine $P(P(3))$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 310 Fie polinoamele P şi $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1-x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Ştiind că P are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 şi rădăcinile -1 şi 0, să se determine $P(3)$.

a) 60 b) 0 c) 24 d) -24 e) -60 f) 1

AL 311 Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărţirii lui P la $X-7$ este 3. Să se determine restul împărţirii lui P la $X^2 - 7X$.

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) 0 f) $-\frac{3}{7}$

AL 312 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n, ştiind că restul împărţirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3-\sqrt{3}$.

a) $m = 0$, $n = 1$ b) $m = 1$, $n = 1$ c) $m = 1$, $n = 2$
d) $m = 2$, $n = 1$ e) $m = 2$, $n = 2$ f) $m = 1$, $n = 0$

AL 313 Ştiind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 314 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} X^{k-1}, \quad i = \overline{1,3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

a) -1 b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$

c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) 0

e) 1 f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

AL 315 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde x_i, $i = \overline{1,3}$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

a) -1 b) 0 c) 1 d) 11 e) -11 f) 2

AL 316 Fie ecuaţia $x^3 - ax + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, cu soluţiile x_1, x_2, x_3. Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-a^2$ c) a^2 d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

AL 317 Ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) 3 c) -17 d) $\dfrac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 318 Se consideră ecuaţia $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluţiile x_1, x_2, x_3 şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2.

a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 319 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 i & a_1 - b_1 i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2 i & a_2 - b_2 i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3 i & a_3 - b_3 i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 + \alpha_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,3}$.

a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1b_2c_3$

c) 0 d) 1

e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)(b_3 - c_3)$

AL 320 Fie $f = X + a$ şi $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \ x \in \mathbb{R}.$$

a) $\dfrac{5}{2}$ b) 0 c) $-\dfrac{1}{4}$ d) $-(a + b + c)^2$ e) 1 f) abc

AL 321 Suma soluţiilor comune ale ecuaţiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1+\sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 322 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condiţiile:

(i) $P+1$ este divizibil cu $(X-1)^3$;

(ii) $P-1$ este divizibil cu $(X+1)^3$.

Să se calculeze $P(0)$.

a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 323 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie injectivă. Să se determine suma coeficienţilor polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relaţia

$$-2x + 4 + 5f(x+2) = 4f(3x-2) + f(2x - 7P(x-1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 324 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluţiile ecuaţiei $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, atunci ele verifică relaţia:

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$ b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ i = \overline{1,4}$

c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$ d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$

e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$ f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2.$

AL 325 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine mulţimea valorilor parametrului m pentru care are loc relaţia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \ .$$

a) $\emptyset$ b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

AL 326 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 şi x_4. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2 - x_1} + \frac{1}{2 - x_2} + \frac{1}{2 - x_3} + \frac{1}{2 - x_4} \ .$$

a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 327 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2.

a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$

c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$

e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 328 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ştiind că soluţiile ecuaţiei

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu raţia număr natural.

a) $a = 5$, $b = 67$, $c = 100$ b) $a = -15$, $b = 70$, $c = -120$

c) $a = 15$, $b = 70$, $c = 120$ d) $a = -5$, $b = 67$, $c = 100$

e) $a = 15$, $b = -70$, $c = 120$ f) $a = 5$, $b = -67$, $c = -100$

AL 329 Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condiţiile $x_1^3 = x_2$ şi $x_2^3 = x_1$?

a) niciunul	b) 100	c) 4
d) 1000	e) o infinitate	f) unul

AL 330 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1 P'(x_1) + x_2 P'(x_2) + x_3 P'(x_3).$$

a) 0	b) $9c - a^2 + 2ab$	c) $2ab - a^3 - 9c$
d) $4ab - 9c - a^3$	e) $9c + a^2 - 4ab$	f) $c - a + bc$

AL 331 Împărţind polinomul X^8 la $X - 1$ se obţine câtul q_1 şi restul r_1, împărţind polinomul q_1 la $X - 1$ se obţine câtul q_2 şi restul r_2, iar continuând procedeul şi definind recursiv polinoamele q_{k+1} şi restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul şi restul împărţirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., 7\}$, să se determine r_5.

a) 1	b) 2	c) 7	d) 70	e) 100	f) 700

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ŞI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120° - \cos^2 30°$.

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0,\pi)$ astfel încât $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Se consideră expresia $E(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

a) 1 b) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ e) 0 f) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0,\pi)$ pentru care $2\cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{3}$ c) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $\dfrac{5\pi}{6}$ e) $\dfrac{7\pi}{12}$ f) $\dfrac{5\pi}{12}$.

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) 1 e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(2x)$. Dacă $f(a)=\dfrac{1}{3}$, atunci $f\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)$ este:

a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\dfrac{2}{3}$ f) $-\dfrac{1}{3}$.

TG 7 Se consideră următoarele propoziţii matematice:

(i) $\sin 144^\circ=\cos 54^\circ$; (ii) $\cos 2018^\circ=-\cos 38^\circ$;

(iii) $\operatorname{tg}^2 15^\circ=\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}$; (iv) $\sin^2 5^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 85^\circ=\dfrac{3}{2}$;

(v) $(\operatorname{ctg} 10^\circ-\operatorname{ctg} 80^\circ)\cos 70^\circ=2\sin 110^\circ$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt false?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 8 Care dintre numerele:

$a=\cos 55^\circ,\ b=\sin 155^\circ,\ c=\sin 15^\circ,\ d=\cos 170^\circ,\ e=\cos 100^\circ,\ f=\sin 106^\circ$

este cel mai aproape de zero?

a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 9 Să se calculeze $\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b$, dacă $a,b\in(0,\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ astfel încât $\cos a+\cos b=0$.

a) $\operatorname{tg}(a+b)+1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 10 Dacă $\sin a=\dfrac{3}{5}$, $a\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\cos\dfrac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $-\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

TG 11 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 12 Să se calculeze $\cos\frac{3a}{2}$, ştiind că $\sin\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 13 Să se determine partea întreagă a numărului $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

a) -4 b) -3 c) -1 d) 3 e) 4 f) 5

TG 14 Fie $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$. Să se calculeze $\sin x$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 15 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

a) 2 b) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 16 Să se calculeze $\sin^8\frac{\pi}{8}+\cos^8\frac{\pi}{8}$.

a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{32}$ e) $\frac{7}{16}$ f) $\frac{19}{32}$

TG 17 Să se calculeze $\sin^4 \dfrac{\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{16}$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sqrt{3}$

TG 18 Fie $E(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă şi valoarea minimă a expresiei.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8.

TG 19 Fie $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

TG 20 Să se calculeze $\cos 8x$ ştiind că $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

a) -1 b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\dfrac{1}{2}$

TG 21 Să se calculeze $\cos(x + 2y)$ ştiind că $x = \dfrac{4\pi}{3}$ şi $\operatorname{tg} y = 2 - \sqrt{3}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) 0 f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TG 22 Fie a şi b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ şi } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a - b)$.

a) $\dfrac{3}{8}$ b) $-\dfrac{3}{8}$ c) $\dfrac{1}{8}$ d) $-\dfrac{1}{8}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

TG 23 Fie funcţia $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

TG 24 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$. Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 25 Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 10$ şi $BC = 2\sqrt{5}$. Dacă $DE \perp AC$, $E \in AB$ şi $DE \cap AC = \{Q\}$, să se calculeze AQ.

a) 2 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

TG 26 Într-un triunghi dreptunghic ABC au loc relaţiile $\cos B > \cos C$ şi $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 6$. Să se calculeze $\sin B - \sin C$.

a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

TG 27 Fie triunghiul ABC cu $AB = 4$ şi $m(\widehat{BAC}) = 30°$ astfel încât latura (BC) are cea mai mică valoare posibilă. Dacă punctul P este egal depărtat de laturile triunghiului, să se calculeze AP.

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 1

TG 28 Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic în care între catete există relaţia $c - b = 1$, iar $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 30°$, este:

a) $\sqrt{3}+1$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}-1$ e) $3+\sqrt{3}$ f) $2\sqrt{3}$.

TG 29 Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c cu $b=5$, $c=8$ şi $\cos A=\dfrac{1}{4}$. Să se afle a.

a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 30 Fie triunghiul PQR cu $PQ=4$, $QR=5$ şi $RP=7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

a) $\dfrac{29}{35}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{4}{7}$ e) $\dfrac{5}{7}$ f) $-\dfrac{4}{7}$

TG 31 În triunghiul ABC, $AB=4\sqrt{3}$, $AC=4$, $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{1}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

TG 32 Aria triunghiului ABC este $10\ m^2$. Să se determine AB ştiind că $AC=4\ m$ şi unghiul $\widehat{BAC}$ are 30°.

a) $\dfrac{10}{3}\ m$ b) $5\ m$ c) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ m$ d) $10\ m$ e) $20\ m$ f) $8\ m$

TG 33 Într-un cerc cu raza de $4\ cm$ se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul $\widehat{ABC}$ de 30°. Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

a) $2\ cm$ b) $3\ cm$ c) $4\ cm$ d) $4\sqrt{3}\ cm$ e) $3\sqrt{3}\ cm$ f) $2\sqrt{3}\ cm$

TG 34 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ şi $\operatorname{tg} A = -\sqrt{2}$. Să se determine BC.

a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 35 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$ şi punctul $P \in (BC)$ astfel încât $BP = 6$. Să se calculeze AP.

a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 36 Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin C$.

a) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 37 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 şi un unghi de $60°$. Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 38 Se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ şi $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC.

a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{20}{\sqrt{89 + 40\sqrt{3}}}$ f) 4

TG 39 În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

a) $\dfrac{29\sqrt{15}}{45}$ b) $\dfrac{29\sqrt{5}}{3}$ c) $\dfrac{29\sqrt{3}}{5}$ d) $\dfrac{3\sqrt{29}}{5}$ e) $\dfrac{29\sqrt{5}}{45}$ f) $\dfrac{5\sqrt{29}}{3}$

TG 40 Se consideră un triunghi cu proprietatea că lungimile laturilor sale sunt trei numere naturale consecutive şi unul din unghiuri are măsura egală cu dublul măsurii altui unghi. Atunci suma lungimilor laturilor sale este:

a) 15 b) 12 c) 18

d) 30 e) 45 f) nu există un astfel de triunghi.

TG 41 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ şi $m(\widehat{A}) = \dfrac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei $(AD), D \in (BC)$, a unghiului $\widehat{BAC}$.

a) $3 - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} - 6$ c) $\sqrt{6} - 2$

d) $3\sqrt{6} - 6$ e) $\sqrt{6} - 6$ f) $3\sqrt{6} - 3$

TG 42 Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul

$$\mathcal{P} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

şi măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 3, 4, 5. Să se afle aria triunghiului ABC .

a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + 3$ c) $\sqrt{3} + 3$

d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $6 + \sqrt{2}$

TG 43 Se consideră triunghiul ABC de laturi a, b, c, în care $m(\widehat{C}) = \dfrac{3\pi}{8}$, iar $m(\widehat{B}) = \dfrac{\pi}{8}$. Să se calculeze $E = 4\dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{b}{c}$.

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $\sqrt{2} + 3$ d) 4 e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $\sqrt{2} - 1$

TG 44 Triunghiul ABC are o latură de 9 cm şi perimetrul de 50 cm. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

a) 90 cm^2 b) 120 cm^2 c) $120\sqrt{2}$ cm^2

d) 200 cm^2 e) 400 cm^2 f) $300\sqrt{2}$ cm^2

TG 45 În triunghiul ABC, $AB = 2\sqrt{3}BC$ şi $m(\widehat{C}) = m(\widehat{A}) + 30°$. Să se calculeze $\sin B$.

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{11}{14}$ f) $\dfrac{2}{3}$

TG 46 Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC ce are aria egală cu 18. Se notează cu $\mathcal{M}_G$ mulţimea punctelor din interiorul triunghiului situate mai aproape de G decât de oricare dintre vârfurile triunghiului. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_G$.

a) 6 b) $6\sqrt{3}$ c) 9 d) $9\sqrt{3}$ e) 12 f) 15

TG 47 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmaţiile:

(i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(ii)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$;

(iii) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{0}$; *(iv)* $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{FA}$;

(v) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$; *(vi)* $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Câte dintre afirmaţiile de mai sus sunt corecte?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 1

TG 48 Asupra unui corp punctiform acţionează două forţe cu aceeaşi origine, una de $8N$ şi cealaltă de $7N$. Să se calculeze mărimea forţei rezultante, ştiind că unghiul dintre cele două forţe este de $60°$.

a) $13N$ b) $\sqrt{41}N$ c) $\sqrt{111}N$

d) $15N$ e) $\sqrt{113+56\sqrt{3}}N$ f) $14N$

TG 49 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P şi Q împart latură (BC) în trei părţi egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 50 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ şi M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\overrightarrow{OM}=a\vec{i}+b\vec{j}$, atunci $a+b$ este:

a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

TG 51 În pătratul $ABCD$ cu latura de 6, punctele M şi N aparţin laturii (BC) astfel încât $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$.

a) 12 b) $4\sqrt{10}$ c) $\dfrac{25}{2}$ d) 13 e) $8\sqrt{3}$ f) $9\sqrt{2}$

TG 52 Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA}=4\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j}$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care punctele A,B,C sunt coliniare.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{5}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) 1 f) 3

TG 53 Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ fie respectiv punctele D şi E astfel ca $AB = 3 \cdot AD$ şi $AC = 2 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care

$$k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4

TG 54 Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC, iar H ortocentrul său. Valoarea parametrului real k pentru care are loc egalitatea

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = k \cdot \overrightarrow{HG}$$

este:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 3 e) -1 f) -3.

TG 55 Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $M(1,1)$, $N(5,-1)$, $P(3,5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$

d) 30 e) $8\sqrt{5} + 12$ f) $6\sqrt{5} + 14$

TG 56 Fie triunghiul ABC cu $A(1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(5,-1)$ şi dreapta d de ecuaţie $x - y - 2 = 0$. Atunci:

a) $A \in d$ b) $d \perp BC$ c) $d \cap [AB] = \emptyset$

d) d este bisectoarea unghiului ABC e) $d \| BC$

f) niciunul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat.

TG 57 Fie punctele $A(1,1)$, $B(2,\frac{1}{2})$, $C(-1,-4)$, $D(\frac{5}{2},3)$, $P(a,b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $a \cdot b$ ştiind că punctele A, B, P, respectiv C, D, P sunt coliniare.

a) $\dfrac{28}{25}$ b) $\dfrac{10}{9}$ c) $\dfrac{21}{16}$ d) $\dfrac{11}{10}$ e) 1 f) 2

TG 58 Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) 6 b) 4 c) -6 d) -4 e) 3 f) -3

TG 59 Punctul $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, situat pe cercul trigonometric, se roteşte în sens trigonometric în jurul originii cu $90°$. Fie (a, b) coordonatele sale după rotire. Să se calculeze $\log_4 \left|\dfrac{a}{b}\right|$.

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{3}{4} - \log_2 3$ c) $\log_2 3 - \dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

TG 60 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1,3)$, $B(-2,-4)$, $C(2,6)$. Să se calculeze distanţa de la punctul $O(0,0)$ la punctul de intersecţie dintre dreapta suport a medianei din A cu dreapta suport a înălţimii din B.

a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

TG 61 Pornind din punctul A de coordonate $(6,-1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant faţă de dreapta $d : x + 2y + 2 = 0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanţa parcursă de P între cele două axe de coordonate.

a) $\dfrac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\dfrac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

TG 62 Fie $P(a, b)$ punctul egal depărtat de punctele $A(2, 2+\sqrt{3})$, $B(-1,2)$, $C(0,-2-\sqrt{3})$. Atunci $a + b$ este egal cu:

a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$ f) $\dfrac{3}{2}$.

TG 63 Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $\frac{5}{3}$

TG 64 Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele $d_1 : 3x + 4y - 10 = 0$ şi $d_2 : y = mx + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 65 Fie punctele $A(0,4)$ şi $B(4,0)$. Punctul $C(a,b)$ aparţine segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a - b$.

a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5} - 8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2} - 2$ f) $2\sqrt{5} - 4$

TG 66 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) şi $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanţă de A se intersectează dreptele MN şi BC ?

a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

TG 67 Prin simetricul punctului $A(-2,3)$ faţă de punctul $B(1,2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanţa de la punctul A la dreapta d.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 68 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $\left(\cos\frac{n\pi}{3}, \sin\frac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conţin cel puţin două din punctele considerate pot fi construite?

a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 69 Fie $O(0,0)$, $A(-1,4)$, $B(5,1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui faţă de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB.

a) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ b) $(2,3)$ c) $\left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

TG 70 Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă d se numeşte *bine plasat* dacă distanţa de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conţine dreapta $d: 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 71 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC, unde $A(1,1)$, $B(4,5)$ şi $C(5,4)$. Să se calculeze distanţa de la P la dreapta AB.

a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10+\sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10-\sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 72 Fie punctele O, A, B, C astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, unde $O(0,0)$, $A(4,1)$, $B(1,2)$. Prin C se duce o dreaptă ce face unghiul θ cu $(Ox$, unde $\cos\theta = \frac{1}{3}$, ce intersectează dreapta OA în punctul D. Să se calculeze aria triunghiului OCD.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1099-98\sqrt{2}}{254}$ c) $\frac{10\sqrt{2}-7}{2}$

d) $\frac{10\sqrt{2}-3}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{13}{2}$

TG 73 Fie $A(2,0), B(0,4)$ şi $C(5,a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $O(x_o, y_o)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, să se determine $x_o - y_o$.

a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 74 Fie punctele $A(1,3), B(3,5)$ şi $C(c,c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Dacă $\{P\} = CA \cap Ox$, $\{Q\} = CB \cap Oy$, să se determine coeficientul unghiular al dreptei PQ.

a) 1 b) 2 c) $-\frac{9}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) c

TG 75 Fie $A(3,0), B(0,3)$ şi fie $C(a,b)$ pe dreapta $x+y=8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB. Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC, să se determine $x_0 + y_0$.

a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 76 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x+1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$.

TG 77 Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului de vârfuri $A(4,0), B(3,0)$ şi $C(1,4)$, se consideră respectiv punctele M, N, P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = 3\ , \quad \frac{NB}{NC} = 2\ , \quad \frac{PC}{PA} = \frac{1}{6}\ .$$

Să se studieze dacă dreptele AN, BP şi CM sunt concurente şi în caz afirmativ să se găsească coordonatele punctului de concurenţă.

a) nu sunt concurente b) $\left(\frac{19}{10}\ , \frac{12}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 4\right)$

d) $\left(\frac{10}{7}\ , \frac{24}{7}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}\ ,\ 2\right)$ f) $\left(2\ , \frac{10}{3}\right)$

TG 78 Pe laturile AB şi BC ale triunghiului de vârfuri $A(3,0), B(0,4)$ şi $C(2,5)$ se consideră respectiv punctele M, şi N astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = a, \quad \frac{NB}{NC} = b, \quad a, b > 0.$$

Pentru ce valori ale lui a şi b distanţele de la punctul I, de intersecţie a dreptelor AN şi CM, la cele trei laturi ale triunghiului ABC sunt egale între ele?

a) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 1$ b) $a = \frac{\sqrt{130}}{5}$, $b = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ c) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$

d) $a = 2$, $b = 2$ e) $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = 2$ f) $a = \sqrt{5}$, $b = 1$

TG 79 Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ faţă de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P şi Q. Să se calculeze aria triunghiului POQ.

a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 80 Se consideră punctele $A(1,0)$ şi $C(3,1)$. Dacă (AC) este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor B şi D.

a) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{20}\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{29}{20}\right)$ f) $(2, -1), (1, 1)$

TG 81 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x+2y-9 = 0$, $d_2 : x-2y+3 = 0$ şi $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0, 0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C. Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2};\ 1$ d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2};\ 1$

TG 82 Se dau punctele $A(4, 0)$ şi $B(0, 2)$. Fie M, N proiecţiile punctului P, mijlocul segmentului (AB), pe Ox, respectiv Oy. Dacă Q este punctul de intersecţie al perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP, iar R punctul de intersecţie al perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP, să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 83 Prin punctul A de intersecţie al dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{şi} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se arate că raportul distanţelor de la P la d_1, respectiv la d_2 este constant şi să se determine valoarea lui.

a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 84 Fie punctele $A(2, 1), B(6, 1), C(4, 5)$ şi mulţimea $\mathcal{M}_A$ a punctelor din primul cadran situate mai aproape de A decât de celelalte două puncte date. Să se calculeze aria mulţimii $\mathcal{M}_A$.

a) 12 b) 13 c) 14 d) $\dfrac{23}{2}$ e) $\dfrac{25}{2}$ f) $\dfrac{31}{2}$

TG 85 Mulţimea punctelor $P(x,y)$ aflate la distanţa r de punctul $Q(a,b)$ formează cercul de centru Q şi rază r. Să se determine ecuaţia ce descrie acest cerc.

a) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ b) $x^2+y^2-2ax-2ay-r^2=0$
c) $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ d) $x^2+y^2+a^2+b^2-r^2=0$
e) $(x-a)^2+(y-b)^2=r$ f) $x^2+y^2+2ax+2ay+a^2+b^2-r^2=0$

TG 86 Se consideră punctele $A(3,0)$ şi $B(0,4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanţa r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care din următoarele ecuaţii este verificată de toate punctele $P(x,y)$ ce se află la distanţa r de punctul Q.

a) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ b) $x^2+y^2-x-y-\dfrac{1}{2}=0$
c) $x^2+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+3=0$ d) $x^2-y^2-2x-2y=0$
e) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ f) $x^2+y^2-2x-2y-1=0$

TG 87 Dintre toate punctele P ale căror coordonate (x,y) verifică ecuaţia $(x-4)^2+(y-3)^2=4$, să se determine cel mai apropiat de $O(0,0)$.

a) $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{9}{5}\right)$ b) $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5}\right)$ c) $\left(4-\sqrt{3},2\right)$
d) $(2,3)$ e) $(4,1)$ f) $\left(3,3-\sqrt{3}\right)$

TG 88 Să se determine $m\in(0,\sqrt{10})$ pentru care există punctele N şi P situate în primul cadran astfel încât $ON=OP=\sqrt{10}$ şi $MNPQ$ este pătrat, unde $M(m,0)$ şi $Q(0,m)$.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{2}$ e) 2 f) $\sqrt{5}$

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(simbol AM)

AM 1 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$.

a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 2 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2-\ln\left(x^2+1\right)}{x^2}$.

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) -1 f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 3 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^x-2^x}{2^x-4}$.

a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\dfrac{1}{\ln 2}$ e) $\ln\sqrt{2}$ f) e

AM 4 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(e^{12x}+1\right)}{\ln\left(1+e^{3x}\right)}$.

a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) $+\infty$ f) 1

AM 5 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{\operatorname{tg} x}}{2-\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{4}$ d) 1 e) $\dfrac{1}{8}$ f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 6 Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+\pi}{x-\pi}\right)^x$.

a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^π d) π^2 e) π f) e

AM 7 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

a) 0 b) 1 c) e d) $\dfrac{1}{e}$ e) e^2 f) -1

AM 8 Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)-\cos x+e^{x^2}}{10x^2}$.

a) $\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{5}{2}$ f) $\dfrac{5}{4}$

AM 9 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=e^x(\sin x-\cos x)$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 10 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{x}}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) $+\infty$ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 11 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} x^4\left(e^{\frac{1}{x^2+1}}-e^{\frac{1}{x^2}}\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 12 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[\dfrac{x}{4}\right]}{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 4 c) $\dfrac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 13 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x\ln(e^x + 1))$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 14 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $+\infty$ d) nu există e) 1 f) 2

AM 15 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+1}{x^2+2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) nu există

AM 16 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x^3}{6}-\sin x\right)$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) -1 b) $-\dfrac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 17 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(e^x+a)-x\right)\left(e^x+x\right)=1.$$

a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 18 Să se determine mulţimea tuturor valorilor posibile ale parametrului $a\geq 0$ pentru care limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^{\sin x}}{x^a}$$

există şi este un număr real nenul.

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2,+\infty)$ e) $(0,2)$ f) $\{0,3\}$

AM 19 Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x.$$

a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) $+\infty$

AM 20 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}.$$

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\frac{1}{e^2}$

AM 21 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) nu există c) 1 d) $+\infty$ e) 3 f) 2

AM 22 Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1-\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\frac{3}{2}$

AM 23 Fie funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) 0 c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $+\infty$ f) nu există

AM 24 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

a) 0 b) 1 c) -1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 25 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}.$$

a) 0 b) 1 c) $n(n+1)$

d) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ e) $n+1$ f) n

AM 26 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel încât

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 27 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^x - 1}{|x|}$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 28 Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^{-2x} \sin\left(x^2 + 1\right)\right)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 2 b) 0 c) 1 d) -1 e) -2 f) nu există

AM 29 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x}.$$

.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ d) $+\infty$ e) $\dfrac{n}{2}$ f) $\dfrac{n(n+1)}{4}$

AM 30 Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$, ştiind că

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2ax)}{x^2} = 0 \ .$$

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\pm\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 31 Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} (26-5x)^{\frac{1}{x-5}}$.

a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^{5} f) e^{-1}

AM 32 Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{x}}$. Să se calculeze media aritmetică a următoarelor trei limite:

$$l_1 = \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad l_2 = \lim_{x\to 0} f(x) \quad \textit{şi} \quad l_3 = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

a) 3 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 1 f) $\frac{1}{6}$

AM 33 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\frac{1}{\ln x}\right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, iar în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) $+\infty$ f) nu există

AM 34 Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\sin x - x\cos x}.$$

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) 2 e) 4 f) -1

AM 35 Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{tg}^2 x}.$$

a) $+\infty$ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 36 Fie $a > 0$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}\,a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 37 Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[x^3+3x]}{[x]^3+3[x]},$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x, şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 2 c) 1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{4}$ f) nu există

AM 38 Să se calculeze

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^{2018})-\ln^{2018}(1+x)}{x^{2019}}.$$

a) 2018 b) 0 c) 1 d) 1009 e) 2017 f) 1010

AM 39 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n(x)}{x^{n+2}}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) 1 c) $\frac{n}{6}$ d) n e) $\frac{n}{2}$ f) nu există

AM 40 Se consideră funcţia $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale nenule şi diferite de 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

AM 41 Să se calculeze limita $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$, unde

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p!}{(p+k)\,(p+k-1) \ldots (k+1)}, \; p \geq 2.$$

a) $\frac{p!}{p-1}$ b) $\frac{1}{p!}$ c) $\frac{p}{p-1}$ d) $\frac{1}{p-1}$ e) $\frac{1}{(p-1)!}$ f) $\frac{1}{p}$

AM 42 Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x.$$

a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x - \frac{1}{2}$

d) $y = -2x - \frac{1}{2}$ e) $y = -2x + \frac{1}{2}$ f) $y = 2x + \frac{1}{2}$

AM 43 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$ c) $y = \pm\frac{\pi}{2}x + 1$

d) $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$ e) nu există f) $y = \frac{\pi}{2}x$

AM 44 Să se studieze existenţa asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine ecuaţia sa.

a) $y = x + \frac{1}{2}$ b) $y = \sqrt{2}x$ c) $y = x + 1$

d) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$ e) nu există f) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 45 Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = 0$

d) nu există asimptote e) $x = 0$ f) $x = 0$ şi $y = 0$

AM 46 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$. Să se studieze existenţa asimptotelor la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0$ b) $y = x$ c) nu există

d) $y = x + 1$ e) $x = 0$ f) $y = 2x$

AM 47 Fie funcţia $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} \ .$$

Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $y = 0$ b) $y = 2$ c) $y = 1$

d) $y = 2x$ e) $y = x$ f) toate răspunsurile sunt false

AM 48 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului a astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $(0, +\infty)$ b) $\{1\}$ c) $(-1, 2)$

d) $\emptyset$ e) $[0, +\infty)$ f) $\mathbb{R}$

AM 49 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-2}, \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine toate valorile parametrilor reali a, b astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $a = 0,\ b = -2$ b) $a = 1,\ b = 0$ c) $a = 0,\ \forall\ b \in \mathbb{R}$

d) $a = 0,\ b = 3$ e) $a = -2,\ \forall\ b \in \mathbb{R}$ f) $a = 0,\ b = 0$

AM 50 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine toate asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $x = 0$ este asimptotă verticală

b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$

c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$

d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$

e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$

f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

AM 51 Se consideră $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg} x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

a) $y = 0$ b) $y = x - 1$ c) $y = -\dfrac{\pi}{2}$

d) $y = -\dfrac{\pi}{2}x$ e) $y = -\dfrac{\pi}{4}$ f) $y = 2\pi x$

AM 52 Să se determine asimptotele la graficul funcţiei $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}\ .$$

a) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

c) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

d) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

f) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
$x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 53 Fie $a > 0$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a} \ ,$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiţie. Ştiind că funcţia f nu are asimptote verticale, să se studieze existenţa altor asimptote la graficul funcţiei f şi în cazul în care acestea există să se determine ecuaţiile lor.

a) $y = 0,\ y = -x$ b) $y = 0$ c) $y = 0,\ y = x$
d) $y = 0,\ y = x + 1$ e) $y = 1,\ y = x$ f) nu are asimptote

AM 54 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiţie. Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $x = 2$
d) $y = 2 - x$ e) $x = 2,\ y = -x - 2$ f) $y = \pm x + 2$

AM 55 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

P_1: f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

P_2: f admite asimptotă oblică spre $-\infty$.

P_3: Axa Ox este una dintre asimptotele funcţiei f.

P_4: f admite cel puţin o asimptotă verticală, printre care dreapta de ecuaţie $x = 1$.

P_5: f admite cel mult o asimptotă orizontală.

P_6: f admite exact o asimptotă oblică, care este o dreaptă ce trece prin origine.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 56 Fie $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât dreapta de ecuaţie $y=2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcţiei f. Câte dintre următoarele propoziţii sunt adevărate?

P_1: Dreapta de ecuaţie $y=2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_2: Dreapta de ecuaţie $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_3: Nu se pune problema existenţei asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

P_4: Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

P_5: Dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcţiei f.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 57 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}\left[\dfrac{2}{x}\right], & \text{dacă } x\neq 0\\[2ex] a, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x\in\mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă în punctul $x=0$.

a) 0 b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\dfrac{1}{3}$

AM 58 Se consideră funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ \dfrac{a\sin(x-1)}{x^2-5x+4}, & \text{dacă } x \in (1,\pi]. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 59 Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

a) f este continuă pe $[0, 1]$

b) f este discontinuă în punctul $x = 0$

c) f este discontinuă în punctul $x = \dfrac{1}{2}$

d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$

e) f este discontinuă în punctul $x = 1$

f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 60 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei[4]

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{\pi\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right|$$

în punctul π. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

[4]Fie $f : (a, c) \cup (c, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe fiecare din intervalele (a, c) şi (c, b). Dacă $l = \lim_{x\to c} f(x)$ există şi este finită atunci $\widetilde{f} : (a, b) \to \mathbb{R}$ definită prin $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pentru $x \neq c$ şi $\widetilde{f}(c) = l$ este o funcţie continuă, numită prelungirea prin continuitate a lui f.

a) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$

c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ \dfrac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$

AM 61 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcţiei

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(3\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

în punctele $a = -1$ şi $b = 1$. În caz afirmativ, să se precizeze şi expresia funcţiei prelungite $\widetilde{f}$.

a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1,1]$

b) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1,1) \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

c) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1) \\ -3, & x \in \{-1,1\} \end{cases}$

d) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1,1) \\ 3\pi, & x \in \{-1,1\} \end{cases}$

e) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

f) f se prelungeşte prin continuitate la $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

AM 62 Fie funcţia continuă $f : [1, 100) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a lui x. Dacă $\mathrm{Im} f = [m, M]$, să se determine $M - m$.

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $a^2 + a$ d) ab e) $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$ f) $\dfrac{(a + b)^2}{4}$

AM 63 Se consideră funcţiile $f, g : (0, e) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [1, e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x + 1))}{\ln(1 + f(x))} .$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0, e) : \ g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ şi } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine S.

a) 1 b) $1 + e$ c) $1 - e$ d) $e - 1$ e) 0 f) e

AM 64 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left|x^2 - 4x\right| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f. Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f.

a) $[1, 4)$ b) $[1, 4]$ c) $(0, \infty)$ d) $[1, \infty)$ e) $(1, \infty)$ f) $[1, \infty) \setminus \{4\}$

AM 65 Se consideră funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1+|x|},$$

unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se determine mulţimea C a punctelor de continuitate ale lui f, respectiv mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f.

a) $C = D_1 = (0, \infty)$
b) $C = [0, \infty)$, $D_1 = (0, \infty)$
c) $C = D_1 = \mathbb{R}$
d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$
e) $C = \mathbb{R}$, $D_1 = \mathbb{R}^*$
f) $C = [-1, 1]$, $D_1 = (-1, 1)$

AM 66 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

a) f este continuă şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
b) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
c) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $2f(1) = f'(1)$
d) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = f'(1)$
e) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = 2f'(1)$
f) f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu $f(1) = -f'(1)$

AM 67 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcţiei în punctul $x_0 = 1$ şi în caz afirmativ să se calculeze $f'(1)$.

a) f este derivabilă şi $f'(1) = \frac{1}{e}$ b) f este derivabilă şi $f'(1) = -\frac{1}{e}$

c) f este derivabilă şi $f'(1) = 0$ d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$

e) f este derivabilă şi $f'(1) = e$ f) f este derivabilă şi $f'(1) = -e$

AM 68 Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă şi $f'(0) = -1$ b) f este derivabilă şi $f'(0) = 1$

c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$ d) f este derivabilă şi $f'(0) = 0$

e) f este derivabilă şi $f'(0) = 2$ f) f este derivabilă şi $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM 69 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 4, \quad b = 0$ b) $a = 3, \quad b = 0$ c) $a \in \mathbb{R}, \quad b = 5$

d) $a = 3, \quad b \in \mathbb{R}$ e) $a = 4, \quad b = 1$ f) $a = -1, \quad b = 4$

AM 70 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0\ . \end{cases}$$

Determinaţi parametrii reali a, b astfel încât funcţia f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

a) $a = 1, \forall\, b \in \mathbb{R}$ b) $a = b = 0$ c) $\forall\, a \in \mathbb{R}, b = 0$

d) $a = 1, b = 0$ e) $a = b = 1$ f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$.

AM 71 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulţimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcţiei f.

a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1,2)$ b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2,-1)$

AM 72 Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\ .$$

Determinaţi domeniul maxim de definiţie D şi domeniul de derivabilitate D_1.

a) $D = D_1 = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

b) $D = (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$
$D_1 = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

c) $D = D_1 = (-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$

d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1,1]$
$D_1 = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

AM 73 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dacă notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ f \text{ nu este derivabilă în } x\},$$

atunci $S = \sum\limits_{x \in A} x^2$ este:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 74 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$.

a) $2x(x^2+1)^{x^2+1}[\ln(x^2+1)+1]$ b) $2x(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

c) $x(x^2+1)^{x^2+1}[\ln(x^2+1)+1]$ d) $2x[\ln(x^2+1)+1]$

e) $2x(x^2+1)[\ln(x^2+1)+1]$ f) $x(x^2+1)^{x^2+1}\ln(x^2+1)$

AM 75 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt{x^2+e}}$ în punctul $x_0 = 0$.

a) e b) $2e$ c) $e^{\sqrt{e}}$ d) 0 e) $\sqrt{e}$ f) 1

AM 76 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1 - x^2) + \sqrt{x^2 + 1}$. Să se calculeze derivata funcţiei f în $x_0 = 1$.

a) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-4}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2+\sqrt{2}$

AM 77 Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \pi^2 + \ln\left[\left(\sqrt{x^{10} + 2x^2 + 4}\right)^{2^{-1}}\right]$$

în punctul $x_0 = -1$.

a) 2 b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{7}{2}$ d) $-\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$ f) -2

AM 78 Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2x^2}}\ , & \text{dacă } x \neq 0 \\ a\ , & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

să fie continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) nu există f) $\sqrt{2}$

AM 79 Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relaţia $s(t) = e^{-t}\cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine acceleraţia mobilului după 2 secunde.

a) $e^{-2}\cos 2$ b) $2e^{-2}\cos 2$ c) $2e^{-2}\sin 2$

d) $e^{-2}\sin 2$ e) $\dfrac{e^{-2}\sin 2}{2}$ f) $\dfrac{e^{-2}\cos 2}{2}$

AM 80 Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă şi în caz afirmativ să se calculeze limita

$$L = \lim_{y\to-\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

a) f este inversabilă şi $L = +\infty$ b) f este inversabilă şi $L = 0$

c) f este inversabilă şi $L = 1$ d) f este inversabilă şi $L = e$

e) f este inversabilă şi $L = e^{-1}$ f) f nu este inversabilă

AM 81 Fie funcţia $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = \dfrac{x}{e^x}$ şi funcţiile $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

a) 0 b) xe^{-x} c) xe^{-2x}

d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

AM 82 Se consideră funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $g : (0,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mxf'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) -1

AM 83 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1}\ \ln \frac{x^2+1}{|x|+1}\ .$$

Să se calculeze

$$\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)\right) \cdot \left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)\right).$$

a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 84 Se consideră funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $f'(x) = \dfrac{x}{2}$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{x+\pi}$ c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+\pi}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \dfrac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

AM 85 Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\,|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

în punctul $x_0 = 0$ este:

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) e e) 1 f) nu există

AM 86 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \left| x^2 + |x^2 - x| - 1 \right| .$$

Notăm cu M mulţimea punctelor în care f nu este derivabilă şi $S = \sum\limits_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcţiei f în punctul x. Să se determine S.

a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM 87 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietăţile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \ \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ şi $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) $f(0) = 1, \ f'(x) = 5x$ b) $f(0) = 0, \ f'(x) = 5x$

c) $f(0) = 2, \ f'(x) = 2x + 5$ d) $f(0) = 1, \ f'(x) = 5x + 2$

e) $f(0) = 0, \ f'(x) = 5x + 2$ f) $f(0) = 0, \ f'(x) = 2x + 2$

AM 88 Fie $a > 0$ şi funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x + a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) .$$

Să se determine mulţimea valorilor lui a astfel încât f să fie convexă.

a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ d) $\emptyset$ e) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ f) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right)$

AM 89 Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \ . \end{cases}$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 90 Fie funcţia inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x-1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(0)$.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) nu există e) 2 f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 91 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2012-2013\sqrt[2013]{x}$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$.

a) $y=x-1$ b) $y=x+1$ c) $y=x$

d) $y=0$ e) $y=1$ f) $y=2$

AM 92 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^3-3x^2+5x$$

în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

a) $y=-\dfrac{5}{2}\,x+\dfrac{11}{2}$ b) $y=\dfrac{5}{2}\,x+\dfrac{11}{2}$ c) $y=3$

d) $y=x+2$ e) $y=2x+1$ f) $y=-2x+1$

AM 93 Să se determine punctele de pe graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$$

în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuaţie $2x-9y=0$.

a) $(1,0)$ b) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}-\ln 2\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}-\ln 2\right)$

d) $\left(2,\ln 2-\dfrac{2}{3}\right)$ e) $\left(2,\ln 2-\dfrac{1}{3}\right)$ f) $(1,1)$

AM 94 Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$

d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$ f) $y = 7x - 4$

AM 95 Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$, dreapta $y = ax - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$?

a) 1 b) -1 c) 7 d) 2 e) -2 f) 0

AM 96 Se consideră funcţia $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{x + 1}\ .$$

Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x = 0$, $x = 3$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{3}$

AM 97 Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$.

a) $(1, 1)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 0)$

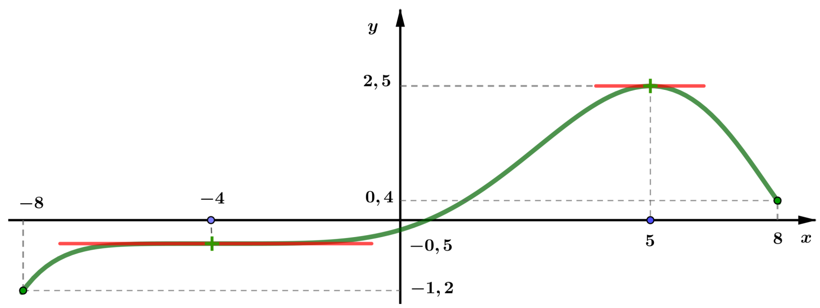
d) $(2, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

AM 98 Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}\ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

a) $A(1,0)$ b) $A(e,\sqrt{e})$ c) $A(e^{-2},-2)$

d) $A(e^{-2},-2e^{-1})$ e) $A(1,-2e^{-1})$ f) $A(e^{2},2e)$

AM 99 Graficul derivatei unei funcţii f, derivabilă pe $[-8,8]$, este dat în figura următoare:



Să se determine mulţimea tuturor valorilor lui $m\in\mathbb{R}$, pentru care graficul funcţiei f are exact două tagente paralele cu dreapta $y=mx$.

a) $m\in\emptyset$ b) $m\in\mathbb{R}$ c) $m\in(-\infty,-1,2)$

d) $m\in\left[\dfrac{5}{2},+\infty,\right)$ e) $m\in\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{5}{2}\right)$ f) $m\in[-8,8]$

AM 100 Cerinţa de omologare a unui tobogan este ca panta profilului lateral în orice punct al său să nu fie mai mare de 0,5. Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât profilul tipului de tobogan descris de funcţia $f:[0,3]\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=0{,}2\cdot x^3-0{,}5\cdot m\cdot x^2-0{,}3\cdot x+4{,}6$, să respecte condiţia de omologare.

a) $m\in\emptyset$ b) $m\in\mathbb{R}$ c) $m\in\left(-\infty,\dfrac{23}{15}\right)$

d) $m\in\left[\dfrac{23}{15},+\infty\right)$ e) $m\in[0,3]$ f) $m\in(0,3)$

AM 101 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulţimea punctelor de inflexiune ale lui f.

a) $\left\{ -1, \frac{1}{2} \right\}$ b) $\left\{ 0, -\frac{1}{2} \right\}$ c) $\emptyset$

d) $\{-1\}$ e) $\left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ f) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$

AM 102 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{|x-1|}},$$

şi mulţimile A şi B ale absciselor punctelor unghiulare, respectiv de inflexiune ale funcţiei f. Să se calculeze $\alpha + \beta$, unde

$$\alpha = \sum_{a \in A} a^2 \text{ şi } \beta = \sum_{b \in B} b^2.$$

a) 20 b) 10 c) 19 d) 18 e) 1 f) 22

AM 103 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 104 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4 f) 5

AM 105 Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - \ln x$, $a \in \mathbb{R}^*$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui f.

a) 0	b) 1	c) 2
d) 3	e) depinde de valoarea lui a	f) 4

AM 106 Funcţia $f : D_{\max} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{ab}{a + (b-a)\, e^{-rt}}$$

cu parametrii a, b şi r pozitivi (funcţia logistică) modelează evoluţia numărului de indivizi ai unei specii. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

b) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$;

c) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită şi îşi atinge marginile;

d) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită dar nu îşi atinge marginile;

e) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită dar nu îşi atinge marginile;

f) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare şi nemărginită pe $D_{\max}$.

AM 107 Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $x_0 \in [a, b]$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă oarecare. Se consideră afirmaţiile:

i) Dacă f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci x_0 nu este punct de extrem local al funcţiei f.

ii) Dacă f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 este punct de extrem local al funcţiei f.

iii) Dacă f este derivabilă în x_0 şi x_0 nu este punct de extrem local al funcţiei f, atunci $f'(x_0) \neq 0$.

iv) Dacă f este derivabilă în x_0 şi x_0 este punct de extrem local al funcţiei f, atunci $f'(x_0) = 0$.

v) Dacă f nu este derivabilă în x_0, atunci x_0 nu este punct de extrem local al funcţiei f.

Câte dintre afirmaţiile date sunt false?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 108 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) $\emptyset$

AM 109 Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f precizând şi natura acestora.

a) $(e, 2e)$, minim local

b) $\left(e, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

c) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, maxim local

d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local

e) $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$, minim local

f) $\left(\dfrac{1}{e}, 2e\right)$, minim local

AM 110 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde D este domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.

a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

AM 111 Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcţiei f.

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 112 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1,0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\{1\}$ f) $\emptyset$

AM 113 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$. Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$

d) $\{0,1\}$ e) $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ f) $\emptyset$

AM 114 Să se determine mulţimea punctelor de extrem local pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)\ .$$

a) $\{2,4\pm\sqrt{5}\}$ b) $\{4,2\pm\sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$

d) $\{4\}$ e) $\{4,4\pm\sqrt{5}\}$ f) $\{2,2\pm\sqrt{5}\}$

AM 115 Funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

f) nu are puncte de extrem local

AM 116 Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcţiei $f:(0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC.

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{1}{e}$ d) $\dfrac{2}{e}$ e) $\dfrac{4}{e}$ f) $\dfrac{12}{e^3}$

AM 117 Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{mx+1}{x^2+1}\ .$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem local.

a) $\{-1\}$ b) $(-1,1)$ c) $(-\infty,-1)$
d) $(1,\infty)$ e) $(0,1)$ f) $\mathbb{R}^*$

AM 118 Se consideră funcţia

$$f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f\,(x)=\frac{e^x}{2+x}\ .$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcţiei f precizând şi natura acestora.

a) $(-1,e)$, maxim local b) $\left(1,\dfrac{e}{3}\right)$, minim local
c) $\left(-1,\dfrac{1}{e}\right)$, maxim local d) $\left(1,\dfrac{e}{3}\right)$, maxim local
e) $\left(-1,\dfrac{1}{e}\right)$, minim local f) $(1,e)$, maxim local

AM 119 Să se determine valoarea minimă a funcţiei $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=3\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$$

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

AM 120 Să se determine punctul de minim al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

a) 2 b) 1 c) 0 d) π e) $\dfrac{\pi}{2}$ f) $\dfrac{1}{2}$

AM 121 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x\, b^{1-x} + b^x\, a^{1-x}$, cu $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Atunci:

a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

b) $\left(\dfrac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

c) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcţiei f

d) $\left(\dfrac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

e) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcţiei f

f) $\left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcţiei f

AM 122 Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x + 1}\ .$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 123 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$ şi mulţimile

$$E=\{x\in\mathbb{R}:\ x \text{ este punct de extrem local al lui } f\},$$

respectiv

$$I=\{x\in\mathbb{R}:\ (x,f(x)) \text{ este punct de întoarcere pentru graficul funcţiei } f\}.$$

Ştiind că $|A|$ notează numărul de elemente ale unei mulţimi finite A, să se calculeze $|E|^{|I|}$.

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9 f) 6

AM 124 Să se determine abscisa punctului din cadranul doi corespunzător distanţiei maxime dintre graficul funcţiei $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x^2)$ şi axa Ox.

a) -1 b) $-e$ c) $-\dfrac{1}{e}$ d) $-\dfrac{1}{e^2}$ e) $-\dfrac{1}{2}$ f) -2

AM 125 Concentraţia unui medicament în fluxul sanguin la t ore după administrare este

$$C\left(t\right)=\frac{13,6t}{\left(9,6t+19,2\right)^2}.$$

În cât timp este atinsă concentraţia maximă $C_{\max}$ a medicamentului? Care este durata de timp pentru care concentraţia depăşeşte $\dfrac{8}{9}$ din $C_{\max}$?

a) $t_{\max}=1$ ore şi $C\geq\dfrac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore;

b) $t_{\max}=3$ ore şi $C\geq\dfrac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore;

c) $t_{\max}=2$ ore şi $C\geq\dfrac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore;

d) $t_{\max}=1$ ore şi $C\geq\dfrac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră;

e) $t_{\max} = 2$ ore şi $C \geq \dfrac{8}{9} C_{\max}$ pentru trei ore;

f) $t_{\max} = 3$ ore şi $C \geq \dfrac{8}{9} C_{\max}$ pentru jumătate de oră.

AM 126 Se proiectează un parc de formă dreptunghiulară şi pe lungimea lui, în exterior, un loc de joacă în formă de semicerc ce are diametrul cât lungimea parcului. Ştiind că întregul contur al acestei suprafeţe (care cuprinde parcul şi terenul de joacă) are 357 metri, să se afle raza semicercului ce formează locul de joacă astfel încât suprafaţa totală (parc plus teren de joacă) să fie maximă (considerăm $\pi \simeq 3,14$).

a) 50 b) 25 c) 20 d) 57 e) 45 f) 35

AM 127 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcţiei

$$f : (-2, 0) \to \mathbb{R}\ ,\quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x}\ ,$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\dfrac{3}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM 128 Fie A punctul aparţinând graficului funcţiei

$$f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}\ ,\quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\ ,$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziene xOy. Să se afle distanţa de la O la A.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\dfrac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

AM 129 Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă v km/h (cu condiţia $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8+\frac{v^2}{300}\right)$ $litri/h$ de benzină. Să se determine viteza pentru care costul este minim, ştiind că şoferul este plătit cu 15 lei/h şi benzina costă 6 $lei/litru$.

a) 50 km/h b) 55 km/h c) $15\sqrt{14}$ km/h
d) $16\sqrt{14}$ km/h e) 70 km/h f) $14\sqrt{14}$ km/h

AM 130 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferenţa dintre acesta şi cubul său să fie maximă.

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

AM 131 Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei

$$x-\frac{x^3}{6}-\sin x \leq 0.$$

a) $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ b) $(-\infty,0]$ c) $[0,\infty)$
d) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ e) $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{Z}$

AM 132 Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$. Soluţia inecuaţiei $f(x)-1>0$ este:

a) $(0,+\infty)$ b) $(-\infty,0)$ c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d) $(1,+\infty)$ e) $(-\infty,-1)$ f) $\emptyset$

AM 133 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2+1 \geq a+2\ln x, \quad \text{pentru orice } \ x\in(0,\infty).$$

a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 134 Să se determine mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \quad \text{pentru orice} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) $\emptyset$

AM 135 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca ecuaţia $e^x = mx^2$ să aibă trei rădăcini reale distincte.

a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \frac{e^2}{8}\right)$

d) $\left(\frac{e^2}{8}, \frac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\frac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\frac{e^2}{4}\right\}$

AM 136 Să se determine mulţimea tuturor numerelor reale x care verifică inegalitatea:

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \geq 0.$$

a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $[0, \infty)$ d) $\mathbb{R}$ e) $[1, \infty)$ f) $\emptyset$

AM 137 Să se rezolve inecuaţia $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

a) $\emptyset$ b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) $\mathbb{R}$ f) $\{1\}$

AM 138 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}\,, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0\,, & \text{dacă } x = -3\,. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcţiei f.

a) f este crescătoare pe $\mathbb{R}$ b) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

c) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

e) f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ f) f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$

AM 139 Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\ .$$

Să se determine imaginea funcţiei f.

a) $[0, 1]$ b) $[0, +\infty)$ c) $\mathbb{R}$

d) $[0, 10]$ e) $[1, 4]$ f) $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ , 1\right]$

AM 140 Se consideră funcţiile $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\ , \quad g(x) = x, \quad h(x) = \ln(1+x)\,.$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată pentru orice $x \geq 0$?

a) $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ b) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ c) $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$

d) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e) $f(x) > g(x) > h(x)$ f) $f(x) < g(x) < h(x)$

AM 141 Fie $f(t) = t^3 e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t > 0$ (puterea este măsurată în waţi şi timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 142 Fie funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}\ , & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

şi afirmaţiile:

(i) f este continuă, dar nu este derivabilă;

(ii) $x = 0$ este asimptotă verticală;

(iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală;

(iv) $f'(0) = \dfrac{1}{2}$;

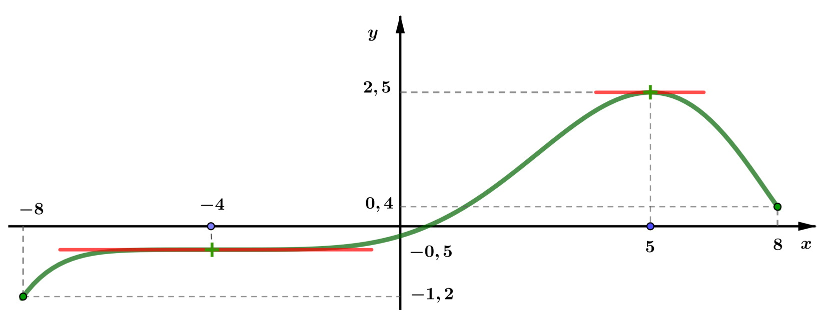
(v) f este strict crescătoare;

(vi) $\operatorname{Im} f = \left[-\dfrac{2}{\pi}, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre afirmaţiile date sunt adevărate?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 143 Graficul derivatei unei funcţii f de două ori derivabilă pe $[-8, 8]$ este dat în figura următoare:



Ştiind că acest grafic are exact 2 tangente orizontale în punctele $(-4; f'(-4))$ şi $(5; 2{,}5)$, să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcţiei f.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 144 Fie funcţia $f : [-100, 100] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Să se determine intervalul $I \subset [-100, 100]$, de lungime maximă, pe care funcţia este convexă. Să se calculeze apoi valorile minimă m şi maximă M ale funcţiei f pe intervalul I.

a) $I = \left[-\dfrac{200}{3};\ 100\right]$ şi $m = -\dfrac{2}{9} \cdot 10^2 + \dfrac{16}{243} \cdot 10^{-1}$ şi $M = 100 + 6 \cdot 10^{-1}$;

b) $I=\left[-\dfrac{200}{9};\ 100\right]$ şi $m=-\dfrac{2}{3}\cdot 10^2+\dfrac{16}{81}\cdot 10^{-1}$ şi $M=100+5\cdot 10^{-1}$;

c) $I=\left[-100;\ -\dfrac{200}{9}\right]$ şi $m=-2\cdot 10^2$ şi $M=100+\dfrac{16}{243}\cdot 10^{-1}$;

d) $I=\left[-\dfrac{200}{3};\ 100\right]$ şi $m=0$ şi $M=100+\dfrac{16}{243}\cdot 10^{-1}$;

e) $I=\left[-\dfrac{200}{9};\ 100\right]$ şi $m=-\dfrac{2}{9}\cdot 10^2+\dfrac{16}{243}\cdot 10^{-1}$ şi $M=100+5\cdot 10^{-1}$;

f) $I=\left[-100;\ -\dfrac{200}{9}\right]$ şi $m=-\dfrac{2}{3}\cdot 10^2+\dfrac{16}{81}\cdot 10^{-1}$ şi $M=100+6\cdot 10^{-1}$.

AM 145 Pentru motociclişti, într-un concurs de motociclete, este importantă aflarea punctelor impuse schimbărilor de viraj, de la dreapta la stânga şi de la stânga la dreapta, pentru ca parcursul să fie ideal. În ce punct de pe pistă un concurent trebuie să schimbe poziţia de viraj a motocicletei de la stânga la dreapta, pentru a avea un parcurs optim, dacă traseul este descris de funcţia $f:[-4,4]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=-0{,}05\cdot x^4+1{,}2\cdot x^2+2$?

a) $(0,0)$ b) $(0,2)$ c) $(-2,6)$

d) $(2,6)$ e) $\left(-2\sqrt{3},\dfrac{46}{5}\right)$ f) $\left(2\sqrt{3},\dfrac{46}{5}\right)$

AM 146 Fie funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x^2-6x)\sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(6x-6)\sqrt[3]{x}$

b) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3-3x^2)\sqrt[3]{x^2}$

c) F nu este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}$

d) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(7x-8)\sqrt[3]{x}$

e) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(7x-8)\sqrt[3]{x^2}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3-3x^2)\sqrt[3]{x}$

AM 147 Fie funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x|x-1|$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right|$

b) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2}|x-1|$

c) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2x-1|$

d) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\left|\frac{x^2}{2} - x\right|$

e) F nu poate fi primitivă a nici unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f) F este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| + x$

AM 148 Să se studieze primitivabilitatea funcţiei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} a\,\dfrac{|x|}{x}\,, & x \neq 0 \\ 1 + a\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

după parametrul real a.

a) f este primitivabilă pentru $a > 1$

b) f este primitivabilă pentru $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

c) f este primitivabilă dacă şi numai dacă $a = 0$

d) f este primitivabilă pentru $a \in \{-1, 1\}$

e) f nu este primitivabilă pentru $\forall\, a \in \mathbb{R}$

f) f este primitivabilă pentru $a < -1$

AM 149 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^{x}, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2-2)-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(2e^x+1), & x\geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2+1)-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(1-e^x), & x\geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă

d) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2+2)-e^{-x}, & x\leq 0 \\ x+e^x, & x>0 \end{cases} + \mathcal{C}$

e) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} x^2-1-e^{-x}, & x<0 \\ (x-1)(1+e^x), & x\geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

f) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} (x^2-2)-e^{-x}, & x\leq 0 \\ (x-1)(e^x+2), & x>0 \end{cases} + \mathcal{C}$

AM 150 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x\in[-1,0] \\ \sqrt{2-x}, & x\in(0,2] \end{cases}.$$

a) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}, & x\in[-1,0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}, & x\in(0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă

c) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}, & x\in[-1,0] \\ -\frac{\sqrt{2-x}}{2}+\frac{1}{2}, & x\in(0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

d) $\displaystyle\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{2}{3}, & x\in[-1,0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}, & x\in(0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$

$$\text{e) } \int f(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, & x \in [-1,0] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2}, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \int f(x)\,dx = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{2}, & x \in [-1,0] \\ -\sqrt{(2-x)^3} + 1, & x \in (0,2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

AM 151 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c)\operatorname{arctg} x$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

a) $a = -\dfrac{1}{2}, b = c = \dfrac{1}{2}$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}, c = -\dfrac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\dfrac{1}{2}$

d) $a = b = c = \dfrac{1}{2}$ e) $a = c = \dfrac{1}{2}, b = -\dfrac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

AM 152 Să se calculeze

$$\int \left(x^2 - x\right) e^{-2x} dx.$$

a) $(2x-1)\,e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\dfrac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

d) $(1-2x)\,e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\dfrac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\dfrac{2x^3}{3} + x^2\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 153 Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x \sin 2x + \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x \sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\dfrac{x}{2} \cos 2x + \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\dfrac{x}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 154 Fie $I(a) = \int \frac{e^x}{x^a}\,dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde a este un număr natural nenul. Care dintre umătoarele afirmaţii este adevărată?

a) $I(3) = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2}I(1)$ b) $3I(3) = \frac{e^x}{x^2} - I(1)$

c) $I(3) = -\frac{e^x}{2x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}I(1)$ d) $2I(3) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{3}I(2)$

e) $I(3) = \frac{e^x}{3x^2} - \frac{2}{3}I(2)$ f) $I(3) = \frac{e^x}{3x^3} - \frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{3}I(2)$

AM 155 Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\cos 4x$.

a) $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$ b) $a = \frac{4}{17}$, $b = -\frac{4}{17}$ c) $a = -\frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$

d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{4}{7}$ f) $a = b = \frac{1}{17}$

AM 156 Să se calculeze

$$\int x^5 e^{3x} dx.$$

a) $\frac{1}{25}e^{3x}(81x^5 + 135x^4 - 180x^3 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

b) $\frac{1}{81}e^{3x}(81x^5 - 135x^4 - 180x^3 + 120x + 40) + \mathcal{C}$

c) $\frac{1}{243}e^{3x}(81x^5 - 135x^4 + 180x^3 - 180x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{243}e^{3x}(81x^5 + 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

e) $\frac{1}{243}e^{3x}(81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$

f) $\frac{2}{243}e^{3x}(81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x + 40) + \mathcal{C}$

AM 157 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval şi funcţia $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x\right) = \frac{2x+1}{x^2-6x+5} \ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f\left(x\right) dx$.

a) $\dfrac{11}{4}\ln\left(1-x\right) - \dfrac{3}{4}\ln\left(5-x\right) + \mathcal{C}$

b) $\dfrac{11}{4}\ln\left(5-x\right) - \dfrac{3}{4}\ln\left(1-x\right) + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{11}{4}\ln\dfrac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$

e) $\dfrac{7}{4}\ln|x-1| - \dfrac{3}{4}\ln\left(5-x\right) + \mathcal{C}$

f) $\dfrac{11}{4}\ln\left(1-x\right) - \dfrac{7}{4}\ln|x-5| + \mathcal{C}$

AM 158 Să se determine familia primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2} \ , \quad a > 0, \ \ b \in \mathbb{R}^*.$$

a) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{ab} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{a}{b} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = \dfrac{b}{a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{b}{a} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

e) $F(x) = \dfrac{1}{a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

f) $F(x) = \dfrac{b}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{b}{a} \text{ arctg}\dfrac{ax}{b} + \mathcal{C}$

AM 159 Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x-8-x^2}{x^4+4x^3} \ .$$

Să se determine acea primitivă F a funcţiei f care verifică relaţia $F(5) = \dfrac{4}{25}$.

a) $\ln\sqrt{\frac{x+4}{x}}-\frac{x-1}{x^2}+\frac{8}{25}-\ln\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\ln\sqrt{\frac{x+4}{x^3}}-\frac{x-1}{x^2}+\frac{6}{25}-\ln\frac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln\sqrt{\frac{x+4}{x}}-\frac{x^2}{x+1}+\frac{8}{5}-\ln\frac{3\sqrt{5}}{5}$ d) $\ln\sqrt{\frac{x+4}{x}}-\frac{x-1}{x^2}-\ln\frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln\sqrt{\frac{x}{x+4}}+\frac{x-1}{x^2}+\frac{6}{25}-\ln\frac{3\sqrt{3}}{5}$ f) $\ln\sqrt{\frac{x}{\sqrt{x+4}}}-\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{25}-\ln\frac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 160 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei

$$f(x)=\frac{1}{x^{2018}+x}$$

pe intervalul $I\subset(0,\infty)$.

a) $\ln x-\frac{\ln(1+x^{2017})}{2017}+\mathcal{C}$ b) $\ln x+\frac{\ln(1+x^{2017})}{2017}+\mathcal{C}$

c) $\ln x+\ln(1+x^{2017})\cdot 2017+\mathcal{C}$ d) $\ln x-\frac{\ln(x+x^{2018})}{2018}+\mathcal{C}$

e) $-\ln x+\frac{\ln(1+x^{2017})}{2017}+\mathcal{C}$ f) $\frac{\ln x}{2018}-\frac{\ln(1+x^{2017})}{2017}+\mathcal{C}$

AM 161 Fie $I\subset(-\infty,1)$ un interval şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$,

$$f\left(x\right)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+5}}\ .$$

Să se calculeze $\int f\left(x\right)dx$.

a) $11\ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right|+3\sqrt{x^2-6x+5}+\mathcal{C}$

b) $\frac{11}{3}\ln\frac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}}+\mathcal{C}$

c) $7\ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right|+2\sqrt{x^2-6x+5}+\mathcal{C}$

d) $\frac{7}{2}\ln\frac{\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right|}{\sqrt{x^2-6x+5}}+\mathcal{C}$

e) $2\ln\left|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}\right|+11\sqrt{x^2-6x+5}+\mathcal{C}$

f) $\dfrac{3}{7}\ln\dfrac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}}+\mathcal{C}$

AM 162 Fie $I\subset(0,\infty)$ un interval şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

a) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

b) $3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

c) $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

d) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

e) $2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

f) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+\mathcal{C}$

AM 163 Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

Să se determine familia primitivelor funcţiei f.

a) $\dfrac{12}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}-\dfrac{18}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{36}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

b) $\dfrac{1}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}+\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}+\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}-\dfrac{1}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{1}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}-\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{11}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}+\dfrac{9}{10}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{6}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

e) $\dfrac{4}{13}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}+\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{4}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}+\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

f) $\dfrac{13}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{13}}+\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{10}}+\dfrac{7}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{7}}+\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^{4}}+\mathcal{C}$

AM 164 Să se calculeze
$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}+1}dx, \quad x>\frac{1}{2}\ .$$

a) $\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

b) $-\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

c) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

d) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

e) $-\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

f) $\sqrt{2x-1}-2\sqrt[4]{2x-1}-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+\mathcal{C}$

AM 165 Se consideră funcţia
$$f(x)=x^5\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}, \ \ a\in\mathbb{R}\ .$$
Să se determine familia primitivelor funcţiei f.

a) $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^3}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

b) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}-\dfrac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^3}+\mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

e) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

f) $\dfrac{5}{8}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^8}-\dfrac{3a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3+x^3)^5}+\mathcal{C}$

AM 166 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{e^x + e^{2-x}} \ .$$

a) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

b) $2\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{e}\text{arctg}e^{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

e) $2\text{arctg}e^{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x} + e^2\right) + \mathcal{C}$

f) $\dfrac{2}{e}\text{arctg}e^{x} - \ln\left(e^{2(x-1)} + 1\right) + \mathcal{C}$

AM 167 Fie funcţiile[5] :

$$\text{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{ch}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{şi respectiv} \quad \text{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ .$$

Să se determine primitiva F a funcţiei $f(x) = \text{ch}^2\ x \cdot \text{sh}^2\ x$ care verifică relaţia $F(0) = 0$.

a) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} - \dfrac{x}{8}$

b) $-\dfrac{x}{16} + \dfrac{1}{32}\ \text{sh}\ 4x$

c) $\dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{e^{-4x}}{64} + 2x$

d) $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\ \text{ch}\ x$

e) $\dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{8}$

f) $\dfrac{e^{4x}}{64} + \dfrac{e^{-4x}}{64} + \dfrac{e^{2x}}{16} + \dfrac{e^{-2x}}{16} - \dfrac{5}{32}$

[5]Funcţia ch se numeşte *cosinus hiperbolic* iar funcţia sh se numeşte *sinus hiperbolic*

AM 168 Se defineşte funcţia[6]

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ .$$

Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei th şi să se precizeze domeniul maxim D pe care sunt definite acestea.

a) $\ln(e^x - e^{-x}) + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

b) $\frac{1}{2}\ln(e^x + e^{-x}) + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

c) $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

d) $-x + \ln(1 + e^{2x}) + \mathcal{C}$ şi $D = \mathbb{R}$

e) $-x + \ln(1 - e^{2x}) + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

f) $\dfrac{2}{e^x - e^{-x}} + \mathcal{C}$ şi $D = (0, \infty)$

AM 169 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \frac{1}{\cos x} \ .$$

a) $\ln \dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$

b) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$

c) $\dfrac{1}{2}\ln \left|\dfrac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x}\right| + \mathcal{C}$

d) $\dfrac{1}{2}\ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x} + \mathcal{C}$

e) $\ln \left|\dfrac{1 + \text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg } \frac{x}{2}}\right| + \mathcal{C}$

f) $\ln \left|\dfrac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x}\right| + \mathcal{C}$

AM 170 Să se determine familia primitivelor funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{\text{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

[6]Funcţia th se numeşte *tangenta hiperbolică*

a) $F(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{4}\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = 2x + \ln\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = x^2 + \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\right| + \mathcal{C}$

e) $F(x) = x + \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\right| + \mathcal{C}$

f) $F(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\right| + \mathcal{C}$

AM 171 Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{2(1-\cos x)}\ .$$

a) f nu admite primitive

b) $F(x) = \begin{cases} -4\cos x + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\cos x + a + 4, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} -4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\cos \dfrac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $F(x) = \begin{cases} -4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

e) $F(x) = \begin{cases} 4\sin \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4\sin \dfrac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} 4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4\cos \dfrac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$

AM 172 Ce relaţie trebuie să existe între constantele reale strict pozitive a şi b astfel încât funcţia

$$f(x) = \frac{1}{a + b\cdot\cos x}$$

să fie primitivabilă pe $\mathbb{R}$?

a) $a > b$ b) $a \neq \dfrac{1}{b}$ c) $a \geq b$

d) $a \neq 0$ e) $a \neq 0,\ b \neq 0$ f) $b \neq 0$

AM 173 Pentru orice $b \in \mathbb{N}$ se definesc integralele

$$I(b) = \int \frac{1}{x^b\sqrt{a^2+x^2}}\, dx, \quad x \in (0,\infty), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Care dintre următoarele relaţii este adevărată?

a) $I(9) = \dfrac{1}{8a^2}\left(-7I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ b) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(-8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

c) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$ d) $I(9) = \dfrac{1}{7a^2}\left(8I(7) - \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8}\right)$

e) $I(9) = \dfrac{1}{9a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 8I(7)\right)$ f) $I(9) = \dfrac{1}{8a^2}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^8} - 7I(7)\right)$

AM 174 Fie integralele

$$I(c) = \int \frac{x^c}{\sqrt{1+x^2}}\, dx,\ c \in \mathbb{N}.$$

Să se exprime $I(2017)$ sub forma $I(2017) = a\, x^{2016}\sqrt{1+x^2} + b\, I(2015)$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $a = b$ b) $a - b = 1$

c) $a \cdot b = 2016$ d) $a = 2017b$

e) $a + b = -2015$ f) $\nexists\ a, b \in \mathbb{R}$ care să verifice relaţia

AM 175 Pentru $b \in \mathbb{N}$ se consideră integralele

$$I(b) = \int \frac{x^b}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx,\ x \in (-a,a),\ a > 0.$$

Să se determine o relaţie între $I(5)$ şi $I(3)$.

a) $5I(5) = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$ b) $5I(5) = -x^4\sqrt{a^2 - x^2} + 4a^2 I(3)$

c) $5I(5) = 4x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$ d) $I(5) = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 2a^2 I(3)$

e) $I(5) = 4x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 5a^2 I(3)$ f) $4I(5) = x^4\sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$

AM 176 Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1 + 2\ln x}{x\,(2 + \ln x)}\ dx.$$

a) $3\ln 2 + 3\ln 3 + 2$ b) $\ln\frac{9e^2}{32}$ c) $6 + \ln\frac{9}{8e}$

d) $2\ln 2 + 3\ln 3 + 1$ e) $\ln\frac{8e^2}{27}$ f) $4 - \ln\frac{3}{2e}$

AM 177 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x}\cos\pi x\ dx.$$

a) $\frac{3\,(1 + e^{-3})}{9 + \pi^2}$ b) $\frac{2\,(1 + e^{2})}{4 + \pi^2}$ c) $\frac{1 + e^{-3}}{9 + \pi^2}$

d) $\frac{1 + e^{3}}{4 + \pi^2}$ e) $\frac{2\,(1 + e^{3})}{9 + \pi^2}$ f) $\frac{3\,(1 + e^{-3})}{4 + \pi^2}$

AM 178 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x - x^3}{x^4 + 1}\ dx.$$

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8}$ b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ c) $\pi - 2\ln 2$

d) $2\pi - 4\ln 2$ e) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ f) $\frac{\pi}{6} - \frac{\ln 2}{3}$

AM 179 Să se calculeze
$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+4}\,dx.$$

a) $\dfrac{\text{arctg } 3-\ln 5}{8}$ b) $\dfrac{\text{arctg } 2-\ln 2}{4}$ c) $\dfrac{2\text{arctg } 3-\ln 2}{4}$

d) $\dfrac{2\text{arctg } 2-\ln 5}{8}$ e) $\dfrac{\text{arctg } 4-\ln 3}{8}$ f) $\dfrac{2\text{arctg } 4-\ln 3}{4}$

AM 180 Să se calculeze
$$\int_1^e (2x+1)\ln x\,dx.$$

a) $\dfrac{1}{2}(e+3)$ b) $\dfrac{1}{3}(e^2+2)$ c) $\dfrac{1}{2}(e^2+3)$

d) $\dfrac{1}{2}(e^2-2)$ e) $\dfrac{1}{3}(e-3)$ f) $\dfrac{1}{3}(e^2+1)$

AM 181 Să se calculeze
$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$$

a) $\dfrac{40}{9}$ b) $\dfrac{10}{3}$ c) $\dfrac{50}{9}$ d) $\dfrac{20}{3}$ e) $\dfrac{10}{9}$ f) $\dfrac{40}{3}$

AM 182 Să se calculeze
$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}\ .$$

a) $\sqrt{5}$ b) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$ c) $\ln\dfrac{9}{2}$ d) $\ln\dfrac{5}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 183 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{3+x^2}\ , & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3}, \qquad a \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

şi integrala $F(x) = \displaystyle\int_{-e}^{x} f(t)dt$. Să se calculeze $F(1) - F(0)$.

a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\dfrac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 184 Să se calculeze

$$\int_{7}^{27} \frac{1}{x+3\sqrt{2x-5}}\ dx.$$

a) $\ln \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ b) $\dfrac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2$ c) $\dfrac{5}{2}\ln 3 - 4\ln 2$

d) $\ln \dfrac{9}{4\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{5}{2}\ln 3 - 3\ln 2$ f) $\dfrac{3}{2}\ln 3 + 4\ln 2$

AM 185 Să se calculeze

$$\int_{7}^{27} \frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\ dx.$$

a) $\ln \dfrac{10}{7} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{25}$ b) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$

c) $\ln \dfrac{17}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{2}{9}$ d) $\ln \dfrac{10}{9} - \operatorname{arctg} \dfrac{9}{25}$

e) $\ln \dfrac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln \dfrac{34}{5} - \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$

AM 186 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^{1} |x| \arcsin x\ dx.$$

a) $-\dfrac{\pi}{2}$ b) -1 c) 1 d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) 0 f) π

AM 187 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^{1} |x| \arcsin^2 x \; dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{8}$ b) $\dfrac{\pi^2}{8}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$ e) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}$

AM 188 Să se determine valoarea parametrului $a > 0$ astfel încât integrala

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{1+e^x} \; dx$$

să ia valoarea 20000.

a) 4 b) $\dfrac{1}{2}$ c) e d) 1 e) 10 f) 100

AM 189 Fie integrala

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{b}{ae^t + b} \; dt.$$

Să se determine o relaţie între parametrii reali strict pozitivi a, b astfel încât I să ia valoarea $\ln 32 - \ln 9$.

a) $23a + 5b = 0$ b) $23a - 5b = 0$ c) $a \ln 3 = b \ln 4$
d) $a + b = \ln 12$ e) $42a - 11b = 0$ f) $a = b$

AM 190 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{0}^{1024} \frac{\ln(2017-x)}{\ln[1505^2 - (512-x)^2]} \; dx.$$

a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$

d) 512 e) $\dfrac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

AM 191 Să se calculeze
$$\int_1^3 x[x]dx,$$
unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) $\dfrac{11}{2}$ b) $\dfrac{11}{3}$ c) $\dfrac{13}{2}$ d) $\dfrac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 192 Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = [mx],\ m > 0,$$
unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine constanta m pentru care $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$.

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 193 Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2,3]$ pentru care
$$\int_{-2}^3 (x + |m - x|)\, dx = 9.$$

a) $\left\{-\dfrac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0,1\}$ c) $\left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$

d) $\left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1,3\}$

AM 194 Să se calculeze integrala

$$\int_0^{12} x\sqrt{14-\sqrt{13^2-x^2}}\ dx.$$

a) $\dfrac{2400}{49}$ b) $\dfrac{2536}{15}$ c) $\dfrac{2188}{15}$ d) $\dfrac{2195}{17}$ e) $\dfrac{2638}{49}$ f) $\dfrac{2600}{17}$

AM 195 Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:[-3,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\le 0,\\ 7x, & x>0,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2, & -3\le x\le -1,\\ 2x-1, & x>-1\end{cases}$$

şi funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h=f\circ g$. Să se calculeze integrala $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)dx$.

a) 1 b) $-\dfrac{29}{4}$ c) -4 d) $\dfrac{27}{4}$ e) $\dfrac{26}{3}$ f) $-\dfrac{29}{3}$

AM 196 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{1}(1-|x|)\ dx.$$

a) 1 b) 2 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $-\dfrac{1}{2}$ e) -2 f) 0

AM 197 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^{2}\Big(1-\Big||x|-1\Big|\Big)dx.$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) -1 f) $-\dfrac{1}{2}$

AM 198 Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\sin x, \frac{1}{2}\right\} dx.$$

a) $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}+\frac{3}{2}$

d) $\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi+3+3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3}+1$

AM 199 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \min\{\sin x, \cos x\}\ dx.$$

a) $\sqrt{2}$ b) $1-\sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 200 Să se calculeze

$$\int_{-1}^{1} \max\left\{1, 2^x\right\} dx.$$

a) $\ln 2+1$ b) $\ln 2-1$ c) $1-\frac{1}{\ln 2}$

d) $1+\frac{1}{\ln 2}$ e) $-1+\frac{1}{\ln 2}$ f) $\ln 2$

AM 201 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\ dx.$$

a) $\frac{\pi}{2}+1$ b) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4}+1$

d) $\frac{\pi}{8}+1$ e) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi-1}{4}$

AM 202 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$ b) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+3}{648}$ c) $\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}+6}{648}$

d) $\dfrac{\pi + 3}{648}$ e) $\dfrac{6\sqrt{3}-3}{648}$ f) $\dfrac{\pi + 3\sqrt{3}-6}{324}$

AM 203 Se consideră funcţia inversabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+7}\ .$$

Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y)dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcţiei f.

a) $1+\ln\dfrac{8}{7}-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ b) $1+\ln\dfrac{7}{8}-\dfrac{\sqrt{7}}{6}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1+\ln\dfrac{8}{7}$ d) $-1-\ln\dfrac{8}{7}+\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2+\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ f) 0

AM 204 Fie integrala

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}\ ,\ a\in\mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$.

a) 0 b) ∞ c) 2 d) $\ln 3$ e) 1 f) $\dfrac{1}{2}$

AM 205 Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10}\ln\frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3}\ln\frac{2}{9}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7}\ln\frac{9}{2}$ f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4}\ln\frac{9}{2}$

AM 206 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos^2 x}\, dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12}$ f) $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$

AM 207 Se consideră funcţiile

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_1(x) = \int_0^x t\sin 2t\ dt$$

şi

$$f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\quad f_2(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\ dt.$$

Să se calculeze $f_1(x) + f_2(x)$ pentru toate valorile lui x din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) $x\arcsin x$ b) $x\arccos\sqrt{x}$ c) $x\arcsin\sqrt{x}$

d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{\pi}{6}$

AM 208 Să se determine constanta reală a pentru care valoarea integralei

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x\cos x}\, dx$$

este $\ln\sqrt[4]{3}$.

a) 2 b) 1 c) π d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

AM 209 Se consideră integralele

$$C = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \; dx \quad \text{şi} \quad S = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \; dx.$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $C + S = \frac{3\pi}{8}$ b) $C - S = \frac{\pi}{2}$ c) $C + S = \frac{\pi}{16}$

d) $C - S = 0$ e) $C + S = \frac{3\pi}{16}$ f) $C - S = \frac{3\pi}{4}$

AM 210 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \; dx,$$

unde $f(x) = \max\{\sin x, \sin^3 x\}$.

a) $\frac{9\pi}{16}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{7\pi}{16}$ d) $\frac{\pi}{16}$ e) $\frac{3\pi}{16}$ f) 0

AM 211 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} \; dx.$$

a) $\frac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$ b) $\frac{6\sqrt{3}-\pi}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$

d) $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ f) $\frac{5\sqrt{3}+\pi}{2}$

AM 212 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x \ \sin \frac{\pi x}{2} \ dx,$$

unde sign reprezintă funcţia *semn*, sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

a) 2 b) $\dfrac{2+2\sqrt{2}}{\pi}$ c) π d) $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$ e) $\dfrac{2}{\pi}$ f) 4π

AM 213 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 x \ \cos x \ dx.$$

a) $\dfrac{13}{129}$ b) $\dfrac{31}{129}$ c) $\dfrac{13}{192}$ d) $\dfrac{31}{192}$ e) $\dfrac{27}{129}$ f) $\dfrac{71}{192}$

AM 214 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \ \sin 2x \ dx.$$

a) 0 b) $-\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{10}$ d) $\dfrac{1}{5}$ e) $-\dfrac{1}{5}$ f) 1

AM 215 Se consideră integralele definite

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \ dx, \quad \text{unde} \quad a \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $aI(a)I(a-1)$ pentru toate valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{\pi a}{2}$ b) $\dfrac{\pi}{2\,(a-1)!}$ c) π d) $\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi a}{a-1}$ f) $\dfrac{\pi\,(a-1)}{2}$

AM 216 Fie integralele

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^a x\;dx,\quad \text{unde}\;\; a\in\mathbb{N}.$$

Să se precizeze care dintre următoarele relaţii este adevărată pentru $a\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$.

a) $I(a)=\dfrac{\pi}{2}-I(a-1)$ b) $I(a)=\dfrac{a-1}{a}I(a-2)$ c) $I(a)=\dfrac{1}{a+1}I(a-2)$

d) $I(a)=\dfrac{a-1}{a}I(a-1)$ e) $I(a)=\dfrac{\pi}{2}-I(a-2)$ f) $I(a)=\dfrac{a}{a+1}I(a-2)$

AM 217 Fie funcţiile f_1 şi f_2 definite pe intervalul $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ prin expresiile

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x\;\sin\pi x}{|x|}\;, & x\neq 0\\ 10\;, & x=0\end{cases}\;,\quad\text{respectiv}\quad f_2(x)=\sqrt{\sin^2\pi x}.$$

Dacă

$$I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f_1(x)\,dx\quad\text{şi}\quad I_2=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f_2(x)\,dx,$$

se cere să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

a) $f_1>f_2$ şi $I_1>I_2$ b) $f_1=f_2$ şi $I_1=I_2$ c) $f_1=f_2$ şi $I_1=I_2$

d) $f_1\neq f_2$ şi $I_1=I_2$ e) $f_1\neq f_2$ şi $I_1\neq I_2$ f) $f_1<f_2$ şi $I_1<I_2$

AM 218 Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n \arccos\ x)}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ n\ (\text{sign}\ x)^{n+1}, & |x| = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

unde sign reprezintă funcţia semn. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

a) $\dfrac{1}{n}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{n}$ c) $\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n \cos\dfrac{\pi}{n}$ f) 0

AM 219 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{1+e^{-x}}\ dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x}{1-e^{-x}}\ dx.$$

a) $\ln 2 \ln 3$ b) $\ln 2 + 4\ln 3$ c) $\ln 2 + \ln 3$

d) $2\ln 2 \ln 3$ e) $3\ln 2 + 2\ln 3$ f) $\ln 2 + 2\ln 3$

AM 220 Să se determine numărul real m pentru care are loc identitatea

$$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt[3]{x}}dx = m \int_1^2 (x-1)^2 \sqrt{x}\ dx.$$

a) $3,5$ b) 2 c) 3 d) $1,5$ e) 1 f) $2,5$

AM 221 Să se calculeze limita

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x t^4 e^{-t} dt.$$

a) $3!$ b) 8 c) $4!$ d) e^4 e) 16 f) e^2

AM 222 Se consideră integralele definite

$$I = \int_a^b \ln(x+1)\,dx \quad \text{şi} \quad J = \int_a^b \frac{x}{x+1}\,dx,$$

unde a şi b sunt numere reale cu proprietatea $0 < a < b$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este adevărată.

a) $I = J$ b) $I > J$ c) $J > I$

d) $I = 2J$ e) $I = \dfrac{a}{b-a}J$ f) $J = \dfrac{a}{a+b}I$

AM 223 Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 13 = 24\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 t\,dt\ .$$

a) $\emptyset$ b) $\{0, \pm\sqrt{2}\}$ c) $\{-1, 1\}$

d) $\left\{0, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ e) $\left\{\pm 1, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ f) $\{1, -2 \pm \sqrt{2}\}$

AM 224 Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx, \quad \text{unde} \quad a > 1.$$

a) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{2}$ c) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) 1

AM 225 Să se calculeze

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^{a^2} e^{-\sqrt{x}}\,dx.$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4 e) ∞ f) $\frac{1}{4}$

AM 226 Să se calculeze valoarea limitei

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2} dt}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{ctg} x} \ln(t^2+2) dt}.$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 227 Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\, dt.$$

Să se precizeze care dintre afirmaţiile următoare este adevărată.

a) F este crescătoare b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$

c) F este pară d) F este descrescătoare

e) $F(1) = 0$ f) nici un răspuns nu este corect

AM 228 Să se calculeze

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(101x) \cdot \sin^{99} x dx.$$

a) $\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{100\cdot 2^{101}}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{101\cdot 2^{100}}$ e) $\frac{1}{2^{101}}$ f) $\frac{1}{10100}$

AM 229 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right).$$

a) 1 b) 0 c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}-2$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

AM 230 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx.$$

a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) $\dfrac{e}{2}$ e) e f) ∞

AM 231 Un mobil porneşte de pe loc şi se deplasează în linie dreaptă timp de T minute, $T>1$, număr întreg, cu viteza

$$v(t)=\begin{cases} t &, \quad 0\le t\le 60\\ 1+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi(t-60) &, \quad 60<t\le 60T\end{cases}$$

măsurată în metri/secundă. Să se calculeze a_1, acceleraţia atinsă de mobil la un minut de la pornire şi d, distanţa parcursă în cele T minute.

a) $a_1=60T$ m/s^2 şi $d=1740-T$ m;

b) $a_1=2T$ m/s^2 şi $d=1740+60T$ m;

c) $a_1=\dfrac{T}{60}$ m/s^2 şi $d=1800-T$ m;

d) $a_1=2T$ m/s^2 şi $d=1800+60T$ m;

e) $a_1=1$ m/s^2 şi $d=1740+60T$ m;

f) $a_1=1$ m/s^2 şi $d=1800+60T$ m.

AM 232 Variaţia sumei depuse într-un cont bancar de-a lungul unui deceniu este descrisă de funcţia $S : [0, 10] \to \mathbb{R}$,

$$S(t) = 2000 - 10t \cdot \exp\left(5 - \frac{t^2}{8}\right).$$

Să se stabilească la câţi ani (notaţie: $t_{\min}$) de la iniţierea contului, depozitul atinge valoarea minimă $S_{\min}$. Care este valoarea medie S_{md} a funcţiei S în acest interval de timp?

a) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$;

b) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 1800$;

c) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 1800 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 2000$;

d) $t_{\min} = 5$ ani, $S_{\min} = 1800 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 1800$;

e) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$;

f) Toate răspunsurile de mai sus sunt greşite.

AM 233 Să se determine aria subgraficului funcţiei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

a) $\ln \frac{16}{9}$ b) $2 - \ln \frac{16}{9}$ c) $1 - \ln \frac{16}{9}$

d) $\ln \frac{9}{16}$ e) $1 - \ln \frac{9}{16}$ f) 2

AM 234 Să se determine aria mulţimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2+3}{x+3} \quad \text{şi} \quad y = 2.$$

a) $12 - 3\ln 3$ b) $12 + 3\ln 3$ c) $16 - 3\ln 3$

d) $16 - 12\ln 3$ e) $16 - \ln 12$ f) $\ln 12$

AM 235 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele $y = 2x^2 + 5x - 3$ şi $y = 6 - x - x^2$.

a) 2^5 b) 12 c) 2^4 d) 60 e) 2^6 f) 34

AM 236 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit, delimitat de curbele de ecuaţii $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

a) $\frac{32}{3}$ b) $\frac{32}{5}$ c) $\frac{16}{5}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 237 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y = x^2 - 4x$ şi dreapta $x - y = 4$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{2}{3}$

AM 238 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y^2 = 10x$ şi dreapta $y = 5x$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 239 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabolele $y = x^2$ şi $y = 8 - x^2$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{16}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{64}{3}$

AM 240 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $x = y - y^2$ şi dreapta $x + y = 0$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 241 Fie funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

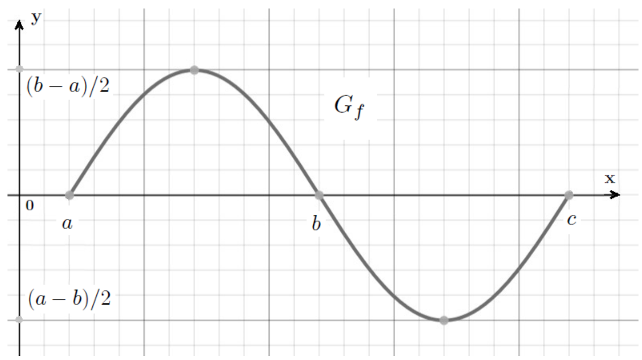
respectiv

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Să se calculeze aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei h şi axa Ox.

a) 4 b) 1 c) 0 d) 2 e) 6 f) 8

AM 242 Graficul unei funcţii derivabile $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ este afişat mai jos.



Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate ?

A_1: Exista o funcţie constantă $g : [a, b] \to (0, \infty)$ astfel încât aria subgraficului lui g să coincidă cu aria subgraficului lui $f|_{[a,b]}$

A_2: Există cel mult un punct $x_0 \in (a, c)$ cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$

A_3: Valoarea integralei $\displaystyle\int_a^c f(x)\, dx$ este $2\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$

A_4: Punctul $x_0 = b$ este punct de inflexiune pentru f

A_5: Funcţia $f : [a, c] \to \left[\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right]$ este surjectivă

A_6: Valoarea integralei $\displaystyle\int_a^c |f(x)|\, dx$ este mai mare decât $\dfrac{(b-a)^2}{2}$

a) A_1, A_5 şi A_6 b) A_3 şi A_5 c) A_1, A_3, A_4 şi A_5

d) toate e) A_2 şi A_4 f) A_3, A_5 şi A_6

AM 243 Să se determine volumul corpului de rotaţie generat de graficul funcţiei $f:[0,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[4]{7-x^2+6x}$.

a) $\pi\left(3\sqrt{3}+12\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$ b) $\pi\left(3\sqrt{7}-12\arcsin\dfrac{1}{4}\right)$

c) $\pi\left(3\sqrt{7}+16\arcsin\dfrac{3}{4}\right)$ d) $\pi\left(\ln\dfrac{3}{4}+16\arcsin\dfrac{3}{4}\right)$

e) $\pi\left(3\sqrt{7}+\ln\dfrac{3}{4}\right)$ f) $\pi\left(7\sqrt{3}-16\arcsin\dfrac{5}{6}\right)$

AM 244 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cos x$.

a) $\dfrac{4\pi^4}{9}-\dfrac{3\pi^2}{2}$ b) $\dfrac{1}{16}\pi^2\left(3\pi^2+2\right)$ c) $\dfrac{\pi^4}{16}-\dfrac{3\pi^2}{4}$

d) $\dfrac{9\pi^4}{16}-\dfrac{3\pi^2}{8}$ e) $\dfrac{3}{8}\pi^2\left(\pi^2-2\right)$ f) $\dfrac{8\pi^4}{9}-\dfrac{3\pi^2}{8}$

AM 245 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a cercului de ecuaţie $x^2+(y-2)^2-1=0$.

a) 2π b) $2\pi^2$ c) π d) π^2 e) 4π f) $4\pi^2$

AM 246 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a elipsei de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0$.

a) 12π b) 10π c) 16π d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

AM 247 Să se determine parametrul m aşa încât volumul corpului obţinut prin rotirea graficului funcţiei

$$f:[1,2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=2\left(x-\frac{m}{x}\right)$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 248 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[1,3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

a) $\pi\ln\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi\ln\frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi\ln\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi\ln\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

AM 249 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[1,3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $\pi\ln\frac{5}{13}$ b) $3\pi\ln\frac{13e}{5}$ c) $\pi\ln\frac{5}{13}$

d) $3\pi\ln\frac{5e}{13}$ e) $2\pi\ln\frac{13}{5e}$ f) $2\pi\ln\frac{5e}{13}$

AM 250 Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2 x$.

a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{16}$ d) $\frac{3\pi^2}{8}$ e) $\frac{3\pi^2}{16}$ f) $\frac{3\pi}{8}$

ANEXE

Subiectele date la admitere în anii 2014-2021 cu rezolvările integrale

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2014 **A**

1.(8p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x+7}=3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei.

a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E=\sum_{i=1}^{2014}\left[\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k!(k^2+1)\right].$$

a) 2014! b) $2014!-1$ c) 2015! d) $2015!-2$ e) $2016!-2$

3.(8p) Fie matricea $A=(a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}, \text{ dacă } i=j,\\ (-1)^{i+j}C_j^i, \text{ dacă } i<j,\\ 0, \text{ dacă } i>j,\end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinări de j luate câte i. Să se calculeze A^{-1}.

a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul $(\mathcal{M},\cdot)$, unde

$$\mathcal{M}=\left\{A(m)=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{Z}\right\}$$

şi " $\cdot$ " este operaţia de înmulţire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\frac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X-2014)(X-2016) \text{ şi } g = (X-2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărţirii lui g la f.

a) $X+2014$ b) $X-2000$ c) $X-2016$ d) $X-2014$ e) $X+2016$

6.(9p) Ştiind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2}-1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A şi B. Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcţia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei f.

a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \frac{\pi}{2}x - 1,\ y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$

d) nu există e) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1,\ y = \frac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiţie. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = -1$

b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 2$

c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 1$

d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$

e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ şi $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcţia să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

a) -2 b) 1 c) -1 d) 3 e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^{0} |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

a) $\frac{435}{96}$ b) $\frac{135}{32}$ c) $\frac{221}{48}$ d) $\frac{37}{96}$ e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculaţi aria cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox şi dreptele $x = \frac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$ b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$

d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUŢII AC+ETC 2014

1. Punem condiţia de existenţă $x+7\geq 0$ şi obţinem $x\in[-7,+\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x}=u$ şi $\sqrt{x+7}=v$ şi atunci avem $2-x=u^3$ şi $x+7=v^2$, de unde obţinem sistemul

$$\begin{cases} u^3+v^2=9 \\ u+v=3 \end{cases}$$

cu soluţiile $u_1=0$, $v_1=3$, $u_2=2$, $v_2=1$, $u_3=-3$ şi $v_3=6$, adică $x_1=2$, $x_2=-6$ şi $x_3=29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuaţiei este

$$|2|+|-6|+|29|=37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}k![(k+1)^2-2(k+1)+2]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\sum_{k=1}^{i}[k!(k+1)(k+1)-2k!(k+1)+2k!]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!(k+1)]-2\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!-k!]\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+1)!(k+2-1)]-2[(i+1)!-1]\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}\left[\sum_{k=1}^{i}[(k+2)!-(k+1)!]-2(i+1)!+2\right]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}[(i+2)!-2-2(i+1)!+2]\right\}= \\
&= \sum_{i=1}^{2014}\left\{\frac{1+i}{i}[(i+1)!(i+2)-2(i+1)!]\right\}=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2014}\left[\frac{1+i}{i}(i+1)!i\right] = \sum_{i=1}^{2014}[(1+i)(i+1)!] = \\
&= \sum_{i=1}^{2014}[(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014}[(2+i)! - (i+1)!] = \\
&= 2016! - 2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$a_{11} = (-1)^{1+1} = 1, \quad a_{22} = (-1)^{2+2} = 1, \quad a_{33} = (-1)^{3+3} = 1,$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2}C_2^1 = -2, \quad a_{13} = (-1)^{1+3}C_3^1 = 3, \quad a_{23} = (-1)^{2+3}C_3^2 = -3,$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0,$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulţirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărţirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărţirii, adică

$$(x-2015)^{2014} + x - 2001 = (x-2014)\,(x-2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ şi $x = 2016$, ecuaţia precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluţia $a = 1$ şi $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\dfrac{a}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2}-1\right)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{8}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relaţia din enunţ este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \dfrac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \left(0, \sqrt{2}-1\right),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obţinem că $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{3}$ este singura soluţie.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1,0)$ şi $B(0,2)$. Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{1+0+x_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_C = 8$$

şi

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{0+2+y_C}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcţia f nu are asimptote orizontale. În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$$

şi

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2}x\right] = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ şi $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\nearrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x\nearrow 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x\searrow 0}\sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x\searrow 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$. Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2+1)-(ax+a-2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{ax^2+a-2ax^2-2ax+4x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{-ax^2+(4-2a)x+a}{(x^2+1)^2}, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia $4 - 2a = 0$ cu soluţia reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2-11x-3| = \begin{cases} 4x^2-11x-3\ , \text{ dacă } x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right] \cup [3,\infty) \\ -4x^2+11x+3\ , \text{ dacă } x \in \left(-\dfrac{1}{4}, 3\right) \end{cases},$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}}(4x^2-11x-3)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{0}(-4x^2+11x+3)dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-\frac{1}{4}}^{0} = \frac{221}{48} .$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părţi de două ori, obţinem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2} (\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2} . \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015 A

1.(7p) Fie ecuaţia $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuaţiei.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie şirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma tuturor elementelor mulţimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \le x_n \le \frac{2}{3} \right\}.$$

a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulţimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2 \text{ } \textit{şi} \text{ } \left[\frac{1}{|z-3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

a) $P \subset \left(4, \dfrac{\sqrt{70}}{2}\right]$ b) $P = \left(4, \dfrac{35}{8}\right)$ c) $P = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \dfrac{\sqrt{75}}{2}\right)$

4.(8p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ şi restul împarţirii lui f la $X + 1$ este 3.

a) 49 b) 32 c) $\dfrac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA şi OB două raze perpendiculare în cercul de centru O şi rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA), P \in (OB)$, iar M şi N aparţin arcului mic AB.

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de punctul $B(3,4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P. Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

a) $-3, 1$ b) $\dfrac{6}{5}, \dfrac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}$ e) $1, \dfrac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x + 1)).$$

a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi}{2} + 1$ b) $\dfrac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \dfrac{1}{2}$ e) $\dfrac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ şi de dreapta $2x - 3y = 9$.

a) 9 b) $\dfrac{9}{2}$ c) 18 d) $\dfrac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulţimea absciselor punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{-1,0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0,1\}$ d) $\{-1,1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xlnx$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $2y-x+1=0$ b) $y-x-1=0$ c) $y+x=0$ d) $y-x+1=0$ e) $y-2x+1=0$

SOLUŢII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}=v$ şi eliminând x din cele două relaţii, se obţine:

$$u+v=3, u^3+v^3=9,$$

cu soluţiile $u=2, v=1$ şi $u=1, v=2$. Rezultă $x=49$ sau $x=0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$x_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{C_{n+1}^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{C_{k+1}^2}\right)$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+2}{k(k+1)}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}=\frac{n+2}{3n}.$$

Rămâne de rezolvat în $\mathbb{N}$ inecuaţia:

$$\frac{1}{2}\leq\frac{n+2}{3n}\leq\frac{2}{3},$$

deci $n\in\{2,3,4\}$. Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din condiţia $\mid z - 2 \mid = 2$ se obţine $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relaţie, $1 \leq \dfrac{1}{\mid z - 3 \mid} < 2$ rezultă $\dfrac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \dfrac{35}{8}\right)$. Ţinând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluţie $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rang $A =$ rang $\bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui $\bar{A}$ trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică uşor că pentru $m = 1$ avem rang $A =$ rang $\bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ şi aplicând apoi Teorema împărţirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informaţii, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ si împărţindu-l la $X^2 + 2$ se obţine restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie sa coincidă cu $X + 1$. Se obţin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ şi $[OP]$, cu C proiecţia punctului O pe latura PQ şi cu D proiecţia punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obţine că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1,2)$ faţă de $B(3,4)$, se obţine imediat că $C(5,6)$. Fie $P(p,0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}\,\right| = \frac{1}{2}\left|2p+2\right| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obţine $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x\ln(e^x+1)) = \lim_{y\to\infty}(\ln^2(y-1) - \ln(y-1)\ln y) = \lim_{y\to\infty}\ln(y-1)\cdot\ln\frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0\cdot\infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt şi aplicăm apoi de două ori Regula lui l´ Hospital:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\ln\dfrac{y-1}{y}}{\dfrac{1}{\ln(y-1)}} = \lim_{y\to\infty}\frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y\to\infty}\frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obţine:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

$$= -\sqrt{1-(x-2)^2}\Big|_1^2 + \arcsin(x-2)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecţie ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ şi $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeţei determinate de parabolă şi dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x-9}{3} + \sqrt{9-2x}\right) dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x\Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Ştiind că mulţimea punctelor de extrem local ale unei funcţii se găsesc printre soluţiile primei derivate, rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$. Se obţin soluţiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcţiei f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcţiei f.

Răspuns corect: d).

12. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 26.07.2016 A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m, respectiv valoarea maximă M, a funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

a) $m = -\dfrac{1}{4}$, $M = 0$ b) $m = 0$, $M = 42$ c) $m = -42$, $M = 0$

d) $m = 0$, $M = 2$ e) $m = -\dfrac{1}{4}$, $M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + ... + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}\ .$$

a) $S = 0$ b) $S = \dfrac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \dfrac{1}{6}$ e) $S = \dfrac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei X.

a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a şi b astfel încât legea de compoziţie

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicaţia $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, *)$.

a) $a = -12$, $b = 3$ b) $a = 3$, $b = 12$ c) $a = 12$, $b = 3$

d) $a = 12$, $b = -3$ e) $a = 3$, $b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m+3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ şi $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparţine bisectoarei unghiului AOB.

a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulţimii $\mathbb{R}$ prin f.

a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) $\mathbb{R}$

10.(8p) Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot lnx$. Să se determine panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1, 0)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^3}dx.$$

a) $\frac{5}{4} - 2\ln 2$ b) $2\ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2\ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} \ ,$$

axa Ox şi dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln \frac{\left(\sqrt{13}-3\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

c) $13\sqrt{5} - 4\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$

d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4}$

SOLUŢII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcţiei $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimul funcţiei pe intervalul $[1, 3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$S=\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2^2+...+\log_2 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2^2+...+\log_3 2016^2}+$$

$$+...+\frac{1}{\log_{2016} 1+\log_{2016} 2^2+...+\log_{2016} 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{\log_2 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}+\frac{1}{\log_3 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}+...+\frac{1}{\log_{2016} 1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2}-\frac{1}{3}$$

$$=\log_{1^2\cdot 2^2\cdot...\cdot 2016^2} 2\cdot 3\cdot...\cdot 2016-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X=\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$, ecuaţia devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5\\ -4 & 1 & -12\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Se obţin relaţiile $2a-4b+c=1, b=2, 5a-12b+3c=3$ de unde $a=0, b=2, c=9$, deci $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 9\end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiţia ca legea de compoziţie să fie asociativă se obţine $a=12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiţia morfismului între două grupuri, $f(x+y)=f(x)\star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x+y)=e^{x+y}+b$$

şi

$$f(x)\star f(y)=e^{x+y}+(b-3)e^x+(b-3)e^y+b^2-4b+12.$$

Egalând cele două expresii, se obţine $(b-3)(e^x+e^y+b+4)=0$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$, adică $b=3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienţilor polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărţind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obţine câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuaţia dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuaţia devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

şi are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \dfrac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0,1]$, rămâne ca şi a doua rădăcină să fie în afara aceluiaşi interval, adică $\dfrac{m-1}{2} < 0$ şi $\dfrac{m-1}{2} > 1$. Se obţine $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanţe egale de laturile unghiului, punem condiţia $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuaţiile dreptelor $OA : y = -2x$ şi $OB : y = 3x$, deci distanţele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|\ 4 + a\ |}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|\ 6 - a\ |}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obţine $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0, deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{xlnx} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine:

$$\lim_{x\searrow 0} e^{\frac{lnx}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim\limits_{x\searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluţia ecuţiei $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiţie sunt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variaţie al funcţiei, se obţine că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funţiei f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituţia $\ln x = t$, $\dfrac{1}{x}\, dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^3}\, dt = 2\int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^3}\, dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = ds$ şi se obţine:

$$2\int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3}\, ds = 2\left(\int_1^2 \frac{1}{s}\, ds - 2\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3}\, ds\right) = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcţia f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ şi negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$A = \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

$$= 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4}\Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4}\Big|_2^3 - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_2^3$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2\ln \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}{4} \ .$$

Răspuns corect: b).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 25.07.2017 — A

1.(9p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 2a(x-1) - x(a+1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

a) $9a^2+1$ b) $9a^2-12a$ c) $9a^2-1$ d) $9a^2$ e) $9a^2-3a+12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raţionali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80} \ .$$

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$

c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$

e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie

$$x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la polinomul X^2-X+1.

a) $X-1$ b) X c) $X+1$ d) $-X+1$ e) $-X-1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ABC}$ au măsurile de $30°$, respectiv $135°$, iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

a) $\frac{9}{4}(3-\sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3-\sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3}+1)$

d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3}-1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecţie a dreptelor $d_1 : x+y-2=0$ şi $d_2 : 2x-y-4=0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d, diferit de A. Să se calculeze raportul dintre distanţa de la P la d_1 şi distanţa de la P la d_2.

a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^4}{x^2+1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x\to\infty}\Big(f(e^x)\Big)^{\frac{1}{x}}.$$

a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$. Să se determine mulţimea tuturor punctelor de extrem local ale funcţiei f.

a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) $\emptyset$

11.(8p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^4}{e^x + 1}\, dx = -\frac{32}{5}\ .$$

a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f\left(x\right) = \frac{\sqrt{\ln\left(1 + x\right)}}{x}\ .$$

a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ şi $x_1 x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1}=C_{80}^{k}(\sqrt[3]{5})^{80-k}(\sqrt[5]{2})^{k}=C_{80}^{k}5^{\frac{80-k}{3}}2^{\frac{k}{5}},\quad k\in\overline{0,80},$$

el este număr raţional dacă şi numai dacă sunt satisfăcute simultan condiţiile:

$$\frac{80-k}{3}\in\mathbb{N}\quad \text{şi}\quad \frac{k}{5}\in\mathbb{N}\ ,$$

adică $k\in\{5,20,35,50,65,80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operaţii cu coloane şi linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_1}{\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & -4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & -4c+4 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3+2C_2}{=}$$

$$=6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2:=L_2-L_1}{\underset{L_3:=L_3-L_1}{=}} 6\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2-a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2-a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=12(b-a)(c-a)(b-c).$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2(2^x+2^{-x})=5$, care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-1$, deci produsul lor este -1.

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărţirii polinomului $(2X^3+X+1)^{2017}$ la X^2-X+1 este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem

$$(2x^3+x+1)^{2017}=(x^2-x+1)\cdot Q(x)+ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărţirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului X^2-X+1. Atunci $\omega^3=-1$ şi $\omega^2-\omega+1=0$, adică $\omega^2=\omega-1$ şi înlocuind pe x cu ω în relaţia de mai sus se obţine

$$(\omega-1)^{2017}=a\omega+b \quad \Leftrightarrow \quad (\omega^2)^{2017}=a\omega+b \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2=a\omega+b,$$

de unde rezultă că $a=1$ şi $b=-1$, deci restul căutat este $X-1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obţine că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})}=\frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC=3\sqrt{2}.$$

Cum $\mathrm{m}(\widehat{ACB})=15^\circ$ şi

$$\cos(15^\circ)=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos(\widehat{ACB})=9(2-\sqrt{3})=\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\widehat{ABC})=\frac{9}{2}(\sqrt{3}-1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecţie al dreptelor d_1 şi d_2, atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuaţiile celor două drepte şi obţinem $A(2,0)$, iar ecuaţia dreptei d este $y=x-2$.

Fie $P(p,p-2)\in d$, $p\neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P,d_1)}{d(P,d_2)}=\frac{\frac{2|p-2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p-2|}{\sqrt{5}}}=\sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcţia f poate fi scrisă

$$f(x) = \frac{3x^4}{x^2+1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 3x^2\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

şi atunci

$$\lim_{x\to\infty}\Big(f(e^x)\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left[3e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} 3^{\frac{1}{x}}e^2\left(1-\frac{1}{e^{2x}+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ şi $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, rezultă că $f''(-1) = 7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcţia f devine

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4x}\ , & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ \sqrt{-x^2+4x}\ , & \text{dacă } x \in (0,4), \end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2-4x}}\ , & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \dfrac{-x+2}{2\sqrt{-x^2+4x}}\ , & \text{dacă } x \in (0,4). \end{cases}$$

Din tabloul de variaţie al funcţiei se observă că punctele de extrem ale funcţiei sunt $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunţ cu I şi făcând schimbarea de variabilă $-x = t$ obţinem

$$I = \int_a^{-a} -\frac{t^4}{e^{-t}+1}\,dt = \int_{-a}^{a} \frac{t^4e^t}{e^t+1}\,dt = \int_{-a}^{a}\frac{t^4(e^t+1-1)}{e^t+1}\,dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t+1} \right) dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-a}^{a} - I \qquad \Leftrightarrow \qquad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluţia ecuaţia $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, dx \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4} \ .$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2017 A

1.(8p) Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică$(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ şi raţia $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5.

a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017}.

a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4\ . \end{cases}$$

a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi b ştiind că -1 este rădăcină a polinomului f şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

a) $a = 1$, $b = -1$ b) $a = 1$, $b = 4$ c) $a = 2$, $b = 4$
d) $a = 0$, $b = 3$ e) $a = -4$, $b = 1$

6.(8p) Să se calculeze tg x ştiind că $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \dfrac{3}{5}$.

a) $-\dfrac{3}{4}$ b) 1 c) $\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) $-\dfrac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparţine dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuaţia dreptei ce conţine punctul $P(-1, 1)$ şi este paralelă cu dreapta d.

a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$

d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^4}$.

a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$

d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\emptyset$

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox şi dreptele $x = \dfrac{1}{e}$ şi $x = e$.

a) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{3}{e^2}$ b) $\dfrac{e^2}{16} - \dfrac{7}{4e^2}$ c) $\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{7}{4e^2}$

d) $\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{5}{4e^2}$ e) $\dfrac{e^2}{8} - \dfrac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

a) $\frac{4}{3}\ln(x+5) - \frac{1}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{3}\ln(x+5) - \frac{4}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

c) $\frac{4}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{4}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

e) $\frac{1}{2}\ln(x+5) + \frac{4}{3}\ln(x-1) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2 - 11x + 6 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $6x^2 - 11x + 5 = 0$ şi atunci suma soluţiilor ei este $\dfrac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5 = a_1 + 4r = 1 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A = 0$, rezultă că $\det(A^{2017}) = (\det A)^{2017} = 0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = -14$, $y = -21$ şi $z = 24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condiţiile $f(-1) = 0$ şi $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluţia $a = 1$ şi $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparţine dreptei d se obţine că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 şi prin urmare, ecuaţia ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2-1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcţiei f.

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}.$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5}dx = \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+5}\, dx = -\frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{4}{3}\ln(x+5) + \mathcal{C}.$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 23.07.2018 — A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi şi raţia 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_2+a_3}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{2017}+a_{2018}}{a_{2018}+a_{2019}}\ ,$$

atunci:

a) $S = 1$ b) $S = 2017$ c) $S = \dfrac{2017}{2018}$ d) $S = 2018$ e) $S = \dfrac{2018}{2017}$

2.(8p) Fie mulţimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = 2 \text{ şi } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$

d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0

c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$

e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

a) $\left\{-\frac{1}{10}\right\}$ b) $\left\{\frac{1}{10}\right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{10}\right\}$

d) $\emptyset$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{10}\right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2018)^{2017} + X - 2020 \text{ şi } g = (X - 2017)(X - 2019).$$

Să se determine restul împărţirii lui f la g.

a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$
d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = 30°$ şi $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză şi celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\frac{6\sqrt{3} - 5}{2}$
d) $\frac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0,1), B(1,1)$ şi $C(4,3)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii triunghiului ABC dusă din A. Să se calculeze $m \cdot n$.

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcţia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

a) $\mathbb{R}$ b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

a) $a = 1,\ b = 1$ b) $a = 3,\ b = 1$ c) $a = 2,\ b = 1$

d) $a = -2,\ b = -1$ e) $a = 1,\ b = -1$

10.(7p) Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiţie a funcţiei. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3}\ .$$

a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}\ .$$

a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeţei cuprinsă între graficele funcţiilor $f, g : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \cos x$.

a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \ldots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1 r(1+r)} + \frac{a_1 r(1+r)}{a_1 r^2(1+r)} + \ldots + \frac{a_1 r^{2016}(1+r)}{a_1 r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018}\ .$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relaţia $z \cdot \overline{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \tag{1}$$

Pe de altă parte, relaţia $\left|\dfrac{2z+3}{z-3i}\right| = 1$ poate fi scrisă

$$\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right)} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i}\right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(2a+3)^2 + 4b^2}{a^2 + (b-3)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -2a - 1. \tag{2}$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2), se obţin două soluţii:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ b_1 = -\frac{7}{5}, \qquad \text{de unde} \qquad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

şi

$$a_2 = -1,\ b_2 = 1, \qquad \text{de unde} \qquad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} = (n+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2:=C_2-C_3}{=}$$

$$= (n+1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1).$$

Răspuns corect: d).

4. Fie
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
matricea asociată sistemului. Cum $\det A=0$ şi determinantul principal este
$$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\neq 0,$$
rezultă că $\mathrm{rang} A=2$. Sistemul este incompatibil dacă şi numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică
$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m\neq -\frac{1}{10}\ .$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărţirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărţirii cu rest avem
$$(x-2018)^{2017}+x-2020=(x-2017)(x-2019)\cdot Q(x)+ax+b,\ \ a,b\in\mathbb{R},$$
unde Q este câtul împărţirii. Înlocuind in această relaţie pe x cu 2017, respectiv 2019, se obţin relaţiile din următorul sistem
$$\begin{cases} 2017a+b=-4 \\ 2019a+b=0, \end{cases}$$
de unde $a=2$ şi $b=-4038$, adică restul împărţirii lui f la g este $2X-4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D\in[AB]$, $E\in[AC]$, $F,G\in[BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x.

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu m$(\widehat{BGD}) = 90°$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \quad \Leftrightarrow \quad BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu m$(\widehat{BAC}) = 90°$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu m$(\widehat{EFC}) = 90°$ şi m$(\widehat{FCE}) = 60°$, avem

$$\text{tg}\ (\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \quad \Leftrightarrow \quad FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FG$, adică $\dfrac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obţine $x = \dfrac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\dfrac{2}{3}$, rezultă că panta înălţimii căutate este $-\dfrac{3}{2}$, iar ecuaţia ei este $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\dfrac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ şi crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, rezultă că $Imf = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obţine că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l´ Hospital, se obţine

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } x-\text{tg }(\text{tg } x)}{3x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{9x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{9x^2\cos^2 x}\left(1-\frac{1}{\cos^2(\text{tg } x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{9x^2\cos^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2\ (\text{tg } x)}{\text{tg }^2 x}\cdot\frac{\text{tg }^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{9\cos^2 x}=-\frac{1}{9}\ .$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1}=t$, rezultă că $x=t^2+1$ şi integrala din enunţ devine

$$\int_3^7\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{1}{t^2+2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeţei căutate poate fi scrisă

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=4\sqrt{2}-2.$$

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 17.09.2018 **A**

1.(8p) Să se găsească soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{1-x-2x^2}=-x-1.$$

a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 şi 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia

$$x * x = -2.$$

a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca tg $x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\dfrac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\dfrac{1}{3}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2,3), B(-1,2)$ şi $C(3,6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia medianei dusă din A în triunghiul ABC. Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1,1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcţia $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x\ln x$. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1.

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$

d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}\ .$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcţia f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1,1)$ c) $(0,1)$ d) $\mathbb{R}^*$ e) $[0,+\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x\cos x)^2\, dx.$$

a) $\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{3\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

d) $\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

12.(8p) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\left(10x-\frac{3}{x}\right)\ln x,$$

axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e^2$.

a) $\dfrac{15e^4-7}{2}$ b) $10e^2-\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{15e^2-1}{2}$

d) $10e^4-\dfrac{7}{2}$ e) $\dfrac{7e^4-15}{2}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condiţiile de existenţă în ecuaţia dată se obţine

$$\begin{cases} 1-x-2x^2\geq 0 \\ -x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right] \\ x\in(-\infty,-1] \end{cases} \Leftrightarrow x=-1$$

care este soluţie a ecuaţiei.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\dfrac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunţ poate fi scrisă

$$B-\frac{1}{2}(A+A^t)=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2&9\\-7&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-7\\9&4\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I_2.$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix}1^2&2^2&3^2\\3^2&1^2&2^2\\2^2&3^2&1^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&9\\9&1&4\\4&9&1\end{vmatrix}=1+9^3+4^3-36-36-36=2\cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuaţia din enunţ poate fi scrisă $x^2+4x+2=-2$, care are soluţia $x=-2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\text{tg}\ x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\cos x}=-2 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x=-2\cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obţine $\cos x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1,4)$ şi ecuaţia medianei din A este $y=5-x$, de unde rezultă că $m=-1$ şi $n=5$. Deci, $m+n=4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+5}{x^2-1}-1\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x+6}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2x+6}}\right]^{\frac{2x^2+6x}{x^2-1}} = e^2.$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obţine $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \dfrac{-mx^2-2x+m}{(x^2+1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă discriminantul ecuaţiei $-mx^2-2x+m=0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4+4m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părţi, integrala din enunţ devine

$$\int_0^\pi (x\cos x)^2\,dx = \int_0^\pi x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi x\sin 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\int_0^\pi x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx = \frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcţia f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \; dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \; dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \; dx.$$

Pentru prima integrala se foloseşte Formula de integrare prin părţi, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\dfrac{1}{x}\; dx = du$ şi atunci se obţine

$$A = 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \; dx - 3 \int_0^2 u \; du =$$

$$= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2} \right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2} \; .$$

Răspuns corect: a).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 22.07.2019 **A**

1.(8p) Fie mulţimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulţimea tuturor valorilor parametrului real a, ştiind că $A \cap B$ are un singur element.

a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete şi 6 sunt băieţi. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi?

a) 50 b) 6300 c) 240

d) 1050 e) 525

3.(10p) Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = 15^\circ$ şi

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - 2a - 4 & ac - 2a & a^2 - b^2 - 2c \\ b^2 + ab - 2a - 4 & a^2 - c^2 - 2b & ab - 2a \\ b^2c + 2bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4 + 2\sqrt{3}$, $4 - 2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$, $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ d) 2 , 1

e) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

4.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{şi} \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$ b) $a = b = \dfrac{1}{2}$ c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$

d) $a = 1$, $b = 0$ e) $a = 0$, $b = 1$

5.(8p) Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât polinomul

$$(X + 1)^{17} + mX^2 + n$$

să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

a) $m = 0$, $n = -1$ b) $m = -1$, $n = 0$ c) $m = -1$, $n = -1$

d) $m = 1$, $n = 0$ e) $m = 1$, $n = 1$

6.(9p) Triunghiul ascuţitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ şi aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin\widehat{C}$.

a) $\dfrac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\dfrac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1,-1), B(-2,3)$ şi $C(4,0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui faţă de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a) $(1,2)$ b) $\left(\dfrac{34}{15},\dfrac{53}{15}\right)$ c) $\left(\dfrac{19}{15},\dfrac{38}{15}\right)$ d) $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{12}{5}\right)$ e) $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{2019}+1}{x^3+1}\ .$$

a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin(x^3-1)-\frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real şi pozitiv cu proprietatea că diferenţa dintre dublul său şi cubul său este maximă.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\dfrac{2}{3}$ d) 1 e) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi\left(1 + \ln\frac{13}{5}\right)$ b) $\pi\left(2 + \ln\frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi\left(1 - \ln\frac{13}{5}\right)$

d) $2\pi\ln\frac{13}{5}$ e) $\pi\left(2 - \ln\frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}dx\ .$$

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluţiile ecuaţiei $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt a şi 2, iar soluţia ecuaţiei $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulţimea $A \cap B$ are un singur element dacă şi numai dacă

$$2a = a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0$$

sau

$$2a = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1\ .$$

În concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieţi se poate forma o grupă de câte 2 băieţi în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete şi 2 băieţi.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relaţia

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obţinem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}\ .$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ şi $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ şi, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(*i*) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(*ii*) f satisface simultan condiţiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \quad \Rightarrow \quad a \in \left\{\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

În concluzie, $a = \dfrac{1}{2}$ şi $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului X^2+X+1. Atunci $\omega^3=1$ şi $\omega^2+\omega+1=0$.

Cum polinomul $(X+1)^{17}+mX^2+n$ se divide cu polinomul X^2+X+1 se obţine că

$$(\omega+1)^{17}+m\omega^2+n=0 \quad\Leftrightarrow\quad (-\omega^2)^{17}+m(-1-\omega)+n=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -(1+m)\omega-m+n=0,$$

de unde $m=n=-1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB=c$, $AC=b$ şi $BC=a$. Cum

$$A_{\triangle ABC}=\frac{bc}{2}\cdot\sin A \quad\Leftrightarrow\quad \sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

şi atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A=\dfrac{1}{3}$. Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad\Leftrightarrow\quad a=2\sqrt{17}$$

şi apoi din Teorema sinusurilor $\sin C=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ şi $m_{BC}=-\dfrac{1}{2}$, rezultă că ecuaţia dreptei GD este $y=2x$. De asemenea, ecuaţia dreptei BC este $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ şi dacă $\{E\}=GD\cap BC$ se obţine că $E\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right)$ şi că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\dfrac{19}{15},\dfrac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^{2019}+1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{2019x^{2018}+1}{3x^2}=\lim_{x\to-1}673x^{2016}=673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obţine $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f. În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$V = \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4}\, dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right)\, dx =$$

$$= \pi \left(x\Big|_1^3 + 2\ln(x^2+4)\Big|_1^3 \right) = 2\pi \left(1 + \ln\frac{13}{5}\right).$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} = \frac{x}{(x^2+7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}$$

şi cum $\dfrac{x}{(x^2+7)^2}$ este o fucţie impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2} dx = \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2+7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2+7-x^2}{(x^2+7)^2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2+7)^2} dx \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{7}\left[\frac{1}{\sqrt{7}} \text{ arctg } \frac{x}{\sqrt{7}}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)}\right)' dx\right] =$$

$$= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7}\left(-\frac{x}{2(x^2+7)}\Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx\right) = \frac{\pi+2}{28}\ .$$

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 14.09.2019 **A**

1.(10p) Câte numere întregi are mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R},\ |2x-3| \le 6\}\ ?$$

a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}\ .$$

a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relaţia

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20 \ . \end{cases}$$

a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$

d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a + x & b + x & c + x \\ a^2 + x^2 & b^2 + x^2 & c^2 + x^2 \\ a^3 + x^3 & b^3 + x^3 & c^3 + x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

a) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$

b) $f'(x) = (a - b)(c - a)(c - b)[x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc]$

c) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

d) $f'(x) = (b - a)(c - a)(b - c)[3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

e) $f'(x) = (b - a)(c - a)(c - b)[2x^2 - 3(a + b + c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, ştiind că $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) 0 b) 1 c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecţia lui A pe dreapta de ecuaţie $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparţine dreptei:

a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$

d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}.$$

a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x+3x-1$. Să se determine $f'(0)$.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx.$$

a) $\ln\frac{10}{7}-\operatorname{arctg}\frac{2}{25}$ b) $\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 3$

c) $\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$ d) $\ln\frac{10}{9}-\operatorname{arctg}\frac{9}{25}$

e) $\ln\frac{34}{7}-\operatorname{arctg} 4+\operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a şi b astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)$$

să fie primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}\cos 4x$.

a) $a=\frac{1}{7}$, $b=-\frac{1}{7}$ b) $a=-\frac{1}{17}$, $b=\frac{4}{17}$ c) $a=\frac{4}{17}$, $b=-\frac{4}{17}$

d) $a=b=\frac{5}{17}$ e) $a=-\frac{1}{7}$, $b=\frac{4}{7}$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuaţia din enunţ este echivalentă cu $-6 \leq 2x-3 \leq 6$, de unde se obţine că $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulţimea conţine 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Fracţia din enunţ poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4\cdot 3+2} = i^2 = -1 \ .$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a\ b\ c)$ şi atunci ecuaţia matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obţine că $a = 2$, $b = -1$ şi $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2\ \ -1\ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 2$, $y = -1$ şi $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcţia din enunţ poate fi scrisă

$$f(x) \overset{C_2:=C_2-C_1}{\underset{C_3:=C_3-C_1}{=}} \begin{vmatrix} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} \overset{C_3:=C_3-C_2}{=}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c)+a^3+x^3-$$
$$-(a+x)(b^2+ab+a^2)-(a^2+x^2)(a+b+c)],$$

de unde se obţine că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \dfrac{1}{2}$ şi $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \dfrac{\pi}{6}$, de unde se obţine că $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ şi mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\dfrac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparţine dreptei $y = 2x-2$, pentru că

$$a+1 = 2\cdot\frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l´ Hospital se obţine

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x+1}{1}=6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x)=2e^x+3$, rezultă că $f'(0)=5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x=\dfrac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f.

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunţ poate fi scrisă

$$\int_7^{27}\frac{1}{x+\sqrt{2x-5}}\,dx=\int_7^{27}\frac{1}{\sqrt{2x-5}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-5}}+1\right)}\,dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x-5}=t$, rezultă că $x=\dfrac{t^2+5}{2}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}\,dx=dt$, iar integrala devine

$$\int_3^7\frac{1}{\dfrac{t^2+5}{2t}+1}\,dt=\int_3^7\frac{2t}{t^2+2t+5}\,dt=\int_3^7\frac{2t+2-2}{t^2+2t+5}\,dt=$$

$$=\int_3^7\frac{2t+2}{t^2+2t+5}\,dt-2\int_3^7\frac{1}{t^2+2t+5}\,dt=\ln(t^2+2t+5)\Big|_3^7-2\int_3^7\frac{1}{(t+1)^2+4}\,dt=$$

$$=\ln 68-\ln 20-\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}\Big|_3^7=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}4+\operatorname{arctg}2=$$

$$=\ln\frac{17}{5}-(\operatorname{arctg}4-\operatorname{arctg}2)=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{4-2}{1+4\cdot 2}=\ln\frac{17}{5}-\operatorname{arctg}\frac{2}{9}.$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f, rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a\cos 4x + b\sin 4x) + e^{-x}(-4a\sin 4x + 4b\cos 4x) = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}[(-a+4b)\cos 4x - (4a+b)\sin 4x] = e^{-x}\cos 4x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+4b = 1 \\ 4a+b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{17} \\ b = \dfrac{4}{17}\,. \end{cases}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020 A

1.(7p) Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{şi} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - x - a^2 = 0\ , \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

a) $E_1 = -\dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$ b) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a}$

c) $E_1 = -\dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ d) $E_1 = \dfrac{1+3a}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

e) $E_1 = \dfrac{1+3a^2}{a^6}$, $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$

2.(8p) Amestecăm un pachet de 52 de cărţi de joc şi extragem simultan două cărţi la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi aşi de aceeaşi culoare?

a) $\dfrac{1}{51 \cdot 52}$ b) $\dfrac{1}{51 \cdot 26}$ c) $\dfrac{1}{51 \cdot 13}$ d) $\dfrac{C_4^2}{52}$ e) $\dfrac{A_4^2}{52}$

3.(9p) Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4.(8p) Să se determine acele soluţii (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) $(0, 1, 0), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$

c) $(0, 0, 1), \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}\right)$ d) $(0, 0, 1), \left(-\dfrac{12}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right)$

e) $\left(\dfrac{11}{13}, \dfrac{4}{13}, \dfrac{3}{13}\right), (0, 0, 1)$

5.(7p) Pe mulţimea numerelor complexe se consideră legea de compoziţie

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi şi să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

a) $e = i,\ z = -1 + i$ b) $e = 1 + i,\ z = i$ c) $e = 1,\ z = 1 - 2i$

d) $e = 1 - i,\ z = i$ e) $e = -i,\ z = 2 - i$

6.(8p) Dacă $\sin a = \dfrac{3}{5}$, $a \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos\dfrac{a}{2}$ este egal cu:

a) $\dfrac{4}{5}$ b) $-\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

7.(8p) Se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $C(-3,-4)$, $D(4,3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanţa de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

a) $\sqrt{3}$ b) $\dfrac{8}{5}$ c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{3}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

8.(9p) Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x}$$

şi în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) nu există e) 1

9.(10p) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\cos x$. Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

10.(8p) Funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \ln x$ are:

a) un punct de minim local

b) un punct de maxim local

c) două puncte de maxim local

d) două puncte de minim local

e) un punct de minim local şi un punct de maxim local

11.(8p) Să se calculeze

$$\int (2x-1)\cos 2x dx.$$

a) $x\sin 2x + \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

c) $x\sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\dfrac{x}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$

e) $x\cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx\ .$$

a) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{9}{10}\ln\dfrac{9}{10}$ b) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{9}{10}\ln\dfrac{9}{10}$

d) $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{2}$ e) $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{10}\ln\dfrac{9}{10}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2020

1. Din relaţiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = 1$ şi $x_1 \cdot x_2 = -a^2$ şi atunci

$$E_1 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1\cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1\cdot x_2)^3} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2 - 3x_1\cdot x_2}{(x_1\cdot x_2)^3} = \frac{1-3(-a^2)}{(-a^2)^3} = -\frac{1+3a^2}{a^6}$$

şi

$$E_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1\cdot x_2 + x_2^2 =$$

$$= (x_1+x_2)^2 - 4x_1\cdot x_2 = 1 - 4(-a^2) = 1 + 4a^2,$$

deci $E_2 = \sqrt{1+4a^2}$.

Răspuns corect: c).

2. Extrăgând simultan 2 cărţi la întâmplare din pachetul de 52 de cărţi de joc, numărul cazurilor posibile este C_{52}^2. Cum cele două cărţi trebuie să fie doi aşi de aceeaşi culoare, ei pot fi 2 aşi roşii sau 2 aşi negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

3.

$$B \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum rang $A = 2 =$ rang $\overline{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale x, y şi $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha \end{cases},$$

de unde obţinem

$$x = \frac{3 - 3\alpha}{4} \quad \text{şi} \quad y = \frac{1 - \alpha}{4} ,$$

care înlocuite în relaţia $x^2+y^2+z^2=1$ ne conduc la ecuaţia $13\alpha^2-10\alpha-3=0$ cu soluţiile:

$$\alpha_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x=0,\ y=0,\ z=1$$

şi

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{12}{13}\ ,\ y=\frac{4}{13}\ ,\ z=-\frac{3}{13}\ .$$

Răspuns corect: c).

5. Cum legea de compoziţie din enunţ poate fi scrisă

$$x * y = (x-i)\cdot(y-i)+i,$$

elementul neutru $e=i+1$ se găseşte uşor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a\in\mathbb{C}$ cu proprietatea că $x*a=a*x=a$ pentru orice $x\in\mathbb{C}$ şi obţinem $a=i$.

În concluzie, $i*i^2*i^3*i^4*i^5=i$

Răspuns corect: b).

6. Cum $\sin a=\dfrac{3}{5}$ şi $a\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a=-\dfrac{4}{5}$, de unde se obţine că

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\ .$$

Răspuns corect: d).

7. Cum ecuaţia dreptei CD este $y=x-1$, putem considera $P(a,a-1)\in CD$, $a\in\mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC})=m(\widehat{BPD})$, deci tg $(\widehat{APC})=$ tg $(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left|\frac{m_{AP}-m_{CD}}{1+m_{AP}\cdot m_{CD}}\right|=\left|\frac{m_{BP}-m_{CD}}{1+m_{BP}\cdot m_{CD}}\right|$$

care ne conduce la ecuaţia

$$\left|\frac{a}{3-a}\right|=1 \iff a=\frac{3}{2} \implies P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \implies OP=\frac{\sqrt{10}}{2}\ .$$

Răspuns corect: e).

8. Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulţim cu conjugata şi obţinem

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

9. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obţine ecuaţia $y = x$.

Răspuns corect: e).

10. Cum

$$f'(x) = \frac{x^3-1}{x} ,$$

rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0,1)$ şi strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru f.

Răspuns corect: a).

11. Folosind formula de integrare prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}\int (2x-1)\cos 2x dx &= \int (2x-1)\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = \\ &= (2x-1)\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x\sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}=$$
$$=\frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}=$$
$$=\frac{(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x}{\sin x+2\cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A=\frac{4}{5}$ şi $B=-\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{5}\,dx-\frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+2\cos x)'}{\sin x+2\cos x}\,dx=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$
$$=\frac{\pi}{5}+\frac{3}{10}\ln\frac{9}{2}.$$

Răspuns corect: d).

<u>SESIUNEA</u>: IULIE, <u>DATA</u> 19.07.2021 A

1.(7p) Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-1$, $m\in\mathbb{R}$, ştiind că punctul $A(-2,3)$ aparţine graficului ei.

a) $f(x)=x^2+2x-1$ b) $f(x)=x^2-x-1$

c) $f(x)=x^2-1$ d) $f(x)=x^2-2x-1$

e) $f(x)=x^2+x-1$

2.(8p) Să se determine în care dintre următoarele intervale se află soluţia pozitivă a ecuaţiei

$$\log_7(x^2 - x + 1) = 1 \ .$$

a) $[0, 2]$ b) $(2, 5)$ c) $[5, 7)$ d) $[1, 2)$ e) $(4, 6]$

3.(8p) Fie numerele reale a şi b astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $7a + 4b$.

a) 2021 b) 0 c) 15 d) -9 e) 23

4.(7p) Se consideră matricele de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ .$$

Să se calculeze determinantul matricei $X(1)$.

a) 3 b) -2 c) -10 d) 10 e) 2

5.(8p) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 1 = 6$.

a) -1 b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) $\frac{3}{2}$

6.(8p) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$. Să se calculeze $f'(0)$.

a) 1 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

7.(8p) Să se determine distanţa dintre dreptele paralele

$$d_1: \ 5x + 12y - 11 = 0 \quad \text{şi} \quad d_2: \ y = mx + 2, \ m \in \mathbb{R} \ .$$

a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) $\dfrac{3}{2}$

8.(10p) În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egal cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

a) $\dfrac{58\sqrt{15}}{45}$ b) $\dfrac{58\sqrt{15}}{15}$ c) $\dfrac{29\sqrt{15}}{15}$ d) $\dfrac{58\sqrt{15}}{9}$ e) $\dfrac{29\sqrt{15}}{45}$

9.(9p) Fie funcţia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - 2\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x. Să se studieze existenţa limitei $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ şi, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

a) 1 b) nu există c) 0 d) -1 e) 2

10.(9p) Se consideră punctele $A(-1,0)$ şi $B(3,0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcţiei $f : [1,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$, să se calculeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului ABC.

a) 8 b) 4 c) $\sqrt{15}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{15}$

11.(8p) Fie funţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{şi respectiv} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ .$$

Să se determine primitiva H a funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x) \cdot g^2(x)$ care verifică relaţia $H(0) = \dfrac{1}{8}$.

a) $\dfrac{1}{8}[f(4x) - g(4x) + x]$ b) $\dfrac{1}{64}[f(4x) + 8x + 7]$

c) $\dfrac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4]$ d) $\dfrac{1}{64}[g(4x) + 4x + 8]$

e) $\dfrac{1}{32}[f(4x) + 4x + 3]$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_{1}^{2} \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx.$$

a) $2\ln(e^2-2)$

b) $\ln(e-2)\cdot\ln(e^2-2)$

c) $\ln 2\cdot\ln 3$

d) $4\ln(e^2-2)-3\ln(e-2)+e^2-e$

e) $\ln(e-2)-e^2+e$

SOLUŢII AC+ETC Septembrie 2021

1. Punctul $A(-2,3)$ aparţine graficului funcţiei $f(x)=x^2+mx-1$ dacă $f(-2)=3$, de unde obţinem $m=0$, adică funcţia $f(x)=x^2-1$

Răspuns corect: c).

2. Ecuaţia logaritmică este echivalentă cu ecuaţia $x^2-x+1=7$ care are soluţia pozitivă $x=3\in(2,5)$.

Răspuns corect: b).

3. Ecuaţia matriceală ne conduce la urmatoarele relaţii $a+2b=-7$ şi $b=-4$, de unde $7a+4b=-9$.

Răspuns corect: d).

4. Cum

$$X(1)=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det X(1)=-10+12=2$.

Răspuns corect: e).

5. Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $3a = 2$, de unde avem că $a = \dfrac{2}{3}$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $f'(x) = e^x + e^x \cdot x$, rezultă că $f'(0) = e^0 = 1$.

Răspuns corect: a).

7. Fie $A(0, 2)$ un punct de pe dreapta d_2. Distanţa dintre cele două drepte paralele coincide cu

$$d(A, d_1) = \frac{|5x_A + 12y_A - 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|12 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{169}} = 1\ .$$

Răspuns corect: d).

8. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin A = \frac{6\sqrt{15}}{bc}$$

şi atunci

$$\text{ctg } A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{6\sqrt{15}}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\sqrt{15}}\ .$$

Analog,

$$\text{ctg } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\sqrt{15}} \qquad \text{şi} \qquad \text{ctg } C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{12\sqrt{15}}\ ,$$

de unde obţinem

$$\text{ctg } A + \text{ctg } B + \text{ctg } C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12\sqrt{15}} = \frac{116}{12\sqrt{15}} = \frac{29\sqrt{15}}{45}\ .$$

Răspuns corect: e).

9. Cum

$$[x] = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ 2, \text{ dacă } x \in [2,3)\ , \end{cases}$$

rezultă că

$$f(x) = (x-[x])(1-2x+2[x])^2 = \begin{cases} (x-1)(3-2x)^2, \text{ dacă } x \in [1,2) \\ (x-2)(5-2x)^2, \text{ dacă } x \in [2,3) \end{cases}$$

şi atunci

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-1)(3-2x)^2 = 1$$

şi

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)(5-2x)^2 = 0,$$

de unde deducem că nu există $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $C(a, \sqrt{8a-a^2})$, $a \in [1,5]$. Atunci, folosind intervalele de monotonie, aria $A_{\triangle ABC} = 2\sqrt{8a-a^2}$ are valoare minimă pentru $a = 1$, adică valoarea minimă pe care o poate lua aria triungiului ABC este $2\sqrt{7}$.

Răspuns corect: d).

11. Cum

$$h(x) = \frac{e^{4x}+e^{-4x}-2}{16},$$

rezultă că

$$H(x) = \frac{e^{4x}-e^{-4x}-8x}{64} + \mathcal{C}\ .$$

Dar $H(0) = \dfrac{1}{8}$, de unde obţinem că $\mathcal{C} = \dfrac{1}{8}$, adică

$$H(x) = \frac{e^{4x}-e^{-4x}-8x}{64} + \frac{1}{8} = \frac{e^{4x}-e^{-4x}-8x+8}{64}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2} - 4x + 4\right) = \frac{1}{32}[g(4x)-4x+4]\ .$$

Răspuns corect: c).

12.

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-\dfrac{2}{e^x}}dx = \int_1^2 \frac{x\cdot e^x - e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x\cdot e^x}{e^x-2}dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x-2}dx =$$

$$\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^2 x\cdot \frac{e^x}{e^x-2}dx - \int_e^{e^2} \frac{t}{t-2}dt =$$

$$= \int_1^2 x\cdot [\ln(e^x-2)]'dx - \int_e^{e^2} \frac{t-2+2}{t-2}dt =$$

$$= x\cdot \ln(e^x-2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx - t\Big|_e^{e^2} - 2\ln|t-2|\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \ln(e-2) - e^2 + e - \int_1^2 \ln(e^x-2)dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\ln(e^x-2)=y$, rezultă că $x=\ln(e^y+2)$, de unde $dx = \dfrac{e^y}{e^y+2}dy$ şi atunci integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx = \ln(e-2) - e^2 + e - \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y\cdot \frac{e^y}{e^y+2}dy = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x\cdot e^x}{e^x+2}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x \cdot e^x}{e^x(1+2e^{-x})}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \int_1^2 \frac{x-e^x}{1-2e^{-x}}dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1+2e^{-x}}dx = \ln(e-2) - e^2 + e \; .$$

Răspuns corect: e).

<u>SESIUNEA</u>: SEPTEMBRIE, <u>DATA</u> 13.09.2021 **A**

1.(7p) Graficul cărei funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de mai jos conţine punctul $A(-1,4)$?

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$

2.(8p) Să se calculeze

$$N = i + i^2 + i^3 + i^4 \; .$$

a) $N = i$ b) $N = 0$ c) $N = -1$ d) $N = 1$ e) $N = -i$

3.(8p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = -1 \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

a) $(1,0,-1)$ b) $(0,1,1)$ c) $(0,-1,-1)$ d) $(1,1,0)$ e) $(1,1,1)$

4.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ b) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5}\ln\frac{4}{9}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}$

d) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln\frac{1}{9}$ e) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}\ln\frac{8}{9}$

5.(9p) Să se calculeze integrala

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\, dx \ .$$

a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

6.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Să se calculeze $B = A^2 - A$.

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.(7p) Pe mulţimea $G = [1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} \ .$$

Să se calculeze $N = 2 * 1$.

a) $N = 1$ b) $N = 2$ c) $N = \sqrt{3}$ d) $N = 0$ e) $N = \sqrt{5}$

8.(8p) Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) 3

9.(9p) Să se determine mulţimea punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) $\{-1,\ 0\}$ b) $\{-2,\ 0\}$ c) $\{1,\ -1\}$
d) $\{1,\ -2\}$ e) $\{0,\ 1\}$

10.(8p) Să se calculeze

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}\ .$$

a) $L = \frac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{6}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$

11.(10p) Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ şi $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuaţia înălţimii dusă din A în $\triangle ABC$. Să se calculeze $S = m + n$.

a) $S = -3$ b) $S = 2$ c) $S = -1$ d) $S = 0$ e) $S = 4$

12.(8p) Să se calculeze $\sin x$, ştiind că $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUŢII AC+ETC Iulie 2021

1. Graficul funcţiei $f(x) = x^2 - 2x + 1$ conţine punctul $A(-1, 4)$, pentru că $f(-1) = 4$.

Răspuns corect: d).

2. $N = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$.

Răspuns corect: b).

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat şi aplicând Formulele lui Cramer se obţine soluţia $x = 1$, $y = 0$ şi $z = -1$.

Răspuns corect: a).

4. Căutăm o descompunere a fracţiei de forma:

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{A(2\sin x + \cos x) + B(2\cos x - \sin x)}{2\sin x + \cos x} =$$

$$= \frac{(2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x}{2\sin x + \cos x},$$

de unde obţinem, identificând coeficienţii, că $A = \frac{4}{5}$ şi $B = \frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5}\ dx + \frac{3}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + \cos x)'}{2\sin x + \cos x}\ dx =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5}\ln|2\sin x + \cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10}\ln\frac{8}{9}.$$

Răspuns corect: c).

5. Cum $\cos x = \frac{1}{2}$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\cos x, \frac{1}{2}\right\}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\ dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\ dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Răspuns corect: d).

6.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2\ .$$

Răspuns corect: a).

7. $N = 2 * 1 = \sqrt{2^2 \cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 + 2} = \sqrt{4 - 4 - 1 + 2} = 1$.

Răspuns corect: a).

8. Cum $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$, rezultă că $f'(1) = 2 + 1 = 3$.

Răspuns corect: e).

9. Cum $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$ se anulează în -2 şi 0, folosind monotonia funcţiei deducem că mulţimea punctelor de extrem local este $\{-2; 0\}$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l´ Hospital de 2 ori se obţine

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \, .$$

Răspuns corect: c).

11. Cum panta dreptei BC este 1, rezultă că panta înălţimii din A este -1 şi atunci ecuaţia ei este $y = -x + 5$, de unde $m = -1$ şi $n = 5$, deci $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

12. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\sin^2 x = \dfrac{2}{3}$. Ţinand cont de intervalul dat se obţine $\sin x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: e).

Bibliografie

[1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruţa, D. Rendi, I. Mihuţ, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învaţământul superior*, Editura Politehnica, 2010.

[2] Gh. Cenuşă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Şerban, O. Vegheş, *Admitere ASE Bucureşti, Teste grilă şi autoevaluare*, 2005-2008, Editura Cison, Bucureşti.

[3] *Gazeta Matematică*.

[4] P. Găvruţa, I. Goleţ, D. Păunescu, C. Arieşanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Ţigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrişor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat şi admiterea în Universitatea Politehnica Timişoara*, Editura Politehnica Timişoara, 2013.

[5] Gh. Gussi, O. Stănăşilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A. Bucureşti, 1994.

[6] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didatică şi Pedagogică, 1978.

[7] C. Ionescu-Ţiu, L. Pîrşan *Calcul diferenţial şi integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1975.

[8] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educaţiei Naţionale.*

[9] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicaţii*, Editura Albatros, 1987.

[10] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.

[11] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

[12] *Probleme date la olimpiade şi concursuri de matematică.*

[13] V. Radu, *Teme şi probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.

[14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educaţiei Naţionale.*