

**UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA +
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ**



Handwritten notes: $\det [a_1 \dots a_n] = (-1)^{i+j} \det [a_1 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_n]$

- 6 Lectia #6 - UPTEConer... 2:33:51
- 7 Lectia #7 - UPTEConectează... 2:30:39
- 8 Lectia #3 - L... 2:43:33
- 9 Lectia... 2:59:21
- 10 Lectia #12 - UPTEConectează... 2:37:22

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

**pentru examenul
de admitere din anul 2024 la**

UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA

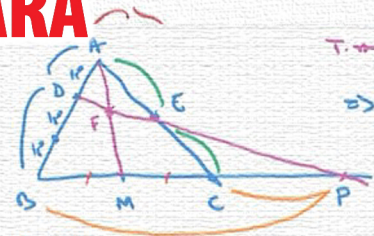
Handwritten: $f'(x) = 1 + e^x - m$
 $f'(a) = 2 - m = 0$

Handwritten: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > f(a)$
 $\Rightarrow x_0 = a$ punct de minim

Handwritten integral calculation:
 $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Handwritten: $x = 2x'$
 $x + x' = 2x' + x' = 3x' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{3}$
 $x = \frac{2}{3}$

Handwritten: $\forall x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$
 $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$
 $x \in [0, 1] \cup \dots$



Editura **POLITEHNICA**

Handwritten: $\Rightarrow \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow BP = 2PC \Rightarrow BC + PC = 2PC \Rightarrow BC = PC$

Colecția "LICEU"

**CULEGERE
DE PROBLEME
DE MATEMATICĂ**

**pentru examenul
de admitere din anul 2024 la**

**UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

**Culegere de probleme de matematică pentru examenul de admitere din
anul 2024 la Universitatea Politehnica Timișoara / Doru Păunescu,**

Romeo Negrea, Liviu Cădariu, ... - Timișoara : Editura Politehnica, 2023

Conține bibliografie

ISBN 978-606-35-0565-2

I. Păunescu, Marin Doru

II. Negrea, Romeo

III. Cădariu Liviu

51

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEȘANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIȘOR
NICOLAE LUPA

ROMEO NEGREA
GHEORGHE MOZA
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN
EMANUEL CISMAȘ

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

**pentru examenul
de admitere din anul 2024 la**

**UNIVERSITATEA
POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

Colecția "LICEU"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA - 2023

Copyright © Editura Politehnica, 2023

Nicio parte din această lucrare nu poate fi reprodusă, stocată sau transmisă prin indiferent ce formă, fără acordul prealabil scris al Editurii Politehnica.

EDITURA POLITEHNICA

Bd. Republicii nr. 9

300159 Timișoara, România

E-mail: editura@upt.ro

Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 15.12.2023

Coli de tipar: 23

C.Z.U. 51

ISBN 978-606-35-0565-2

Tiparul executat sub comanda nr. 37
la Tipografia Universității Politehnica Timișoara

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultățile Universității Politehnica Timișoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competențelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conținuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educației Naționale. În același timp s-a ținut cont și de manualele alternative de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deși problemele propuse sunt de tip grilă cu șase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv prezenta culegere poate fi utilizată și la pregătirea examenului de Bacalaureat dar și a unor concursuri școlare.

Ca structură, cartea are cinci părți: *Un rezumat al cunoștințelor dobândite la liceu, Probleme de algebră, Probleme de trigonometrie și geometrie plană, Probleme de analiză matematică*, respectiv în final *Subiectele date la admitere în anii 2014 – 2023 cu rezolvările integrale*.

Rezumatul cunoștințelor dobândite în liceu e necesar absolvenților care vin din diverse licee cu pregătire matematică inegală. Mai mult, acest rezumat se va dovedi util studenților din anul întâi care vor avea astfel un punct de referință pentru valoarea adăugată de cursurile universitare. Problemele propriu zise se regăsesc în părțile doi, trei și patru ale volumului.

Autorii

Cuprins

UN REZUMAT AL CUNOȘTINȚELOR DOBÂNDITE LA LICEU	7
PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)	97
PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)	183
PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM)	201
ANEXE	
 Subiectele date la admitere în anii 2014 - 2023 cu rezolvările integrale	270
BIBLIOGRAFIE	361

UN REZUMAT AL CUNOȘTINȚELOR DOBÂNDITE LA LICEU

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat	9
Progresii aritmetice si progresii geometrice	9
Funcții	10
Principiul inducției matematice	12
Sume remarcabile (1)	12
Permutări, aranjamente, combinări	13
Binomul lui Newton	14
Sume remarcabile (2)	14
Funcții cu domeniul și codomeniul mulțimi finite	14
Funcția de gradul întâi	15
Funcția de gradul al doilea	16
Funcțiile modul și signum	19
Funcția parte întreagă	20
Funcția parte fracționară	20
Puteri și radicali	21
Funcția exponențială	22
Funcția logaritmică	24
Polinoame și ecuații algebrice	26
Matrici și determinanți	30
Proprietățile determinanților	33
Rangul unei matrici	34
Inversabilitatea matricilor pătrate	35
Sisteme de ecuații liniare	36
Structuri algebrice	37
\mathbb{Z}_p , inelul claselor de resturi modulo p	41

TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

Funcțiile trigonometrice	43
Relații între funcțiile trigonometrice	48
Funcțiile trigonometrice inverse	49
Ecuțiile trigonometrice elementare	51
Aplicațiile trigonometriei în geometrie	53
Numere complexe	56
Elemente de geometrie analitică	58

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Șiruri de numere reale	60
Limite remarcabile	62
Dreapta încheiată	63
B. Limite de funcții și funcții continue	65
Limite remarcabile	66
Prelungirea prin continuitate	67
Proprietăți ale funcțiilor continue	67
C. Funcții derivabile	68
Tabelul derivatelor	70
Derivate de ordin superior	72
Aplicațiile derivatei	73
Ghid pentru reprezentarea grafică a funcțiilor	78
D. Integrabilitate și aplicații	83
Tabelul primitivelor elementare	84
Metode de integrare	86
Substituții remarcabile	87
Construcția integralei definite	89
Formula lui Leibniz-Newton, metode de integrare	91
Proprietățile integralei definite	92
Aplicații ale integralei definite în geometrie: arii și volume	94

ALGEBRĂ

Formule de calcul prescurtat

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$a^2 + b^2$ nu se poate descompune în \mathbb{R}

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) \text{ în } \mathbb{C}$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$a^n - b^n = (a - b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})}_{n \text{ termeni}}$$

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a + b) \underbrace{(a^{2p} - a^{2p-1}b + \dots - ab^{2p-1} + b^{2p})}_{2p+1 \text{ termeni}}$$

Progresii aritmetice și progresii geometrice

	Progresia aritmetică	Progresia geometrică
Term. gen.	$\dot{\vdots} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $a_n = a_1 + r \cdot (n - 1) \quad (r \neq 0)$	$\ddot{\vdots} a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (q \neq 0; 1)$
Rația	$r = a_{k+1} - a_k$	$q = \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad (a_k \neq 0)$
Suma	$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $S_n = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \quad (S_1 = a_1)$ $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (S_1 = a_1)$ $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} \quad (a_1, q > 0)$

Funcții

Fie A și B două mulțimi nevide; se numește *funcție* definită pe A cu valori în B orice lege de corespondență (relație) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$.

Notăția " $f : A \rightarrow B, y = f(x)$ " se citește "funcția f definită pe A cu valori în B de relația $y = f(x)$ ".

Mulțimea A este domeniul de definiție al funcției f , iar mulțimea B reprezintă domeniul de valori al acesteia.

Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ poartă numele de *grafic* al funcției.

Funcții bijective

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *injectivă* dacă și numai dacă (prescurtat d.d.) este îndeplinită următoarea proprietate:

$$(\forall) x_1, x_2 \in A \text{ din } x_1 \neq x_2 \text{ rezultă } f(x_1) \neq f(x_2).$$

În practică, pentru dovedirea injectivității, această formă a definiției poate fi dificil de utilizat. Este preferată formularea (logic echivalentă)

$$(\forall) x_1, x_2 \in A \text{ din } f(x_1) = f(x_2) \text{ rezultă } x_1 = x_2.$$

Dacă există cel puțin o pereche de elemente x_1, x_2 din domeniul de definiție A cu $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$, atunci funcția f nu este injectivă.

Interpretarea geometrică a injectivității pentru funcții reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$) este sugestivă:

$f : A \rightarrow B$ este injectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f în cel mult un punct.

Imaginea funcției $f : A \rightarrow B$ este submulțimea domeniului de valori B alcătuită din toate elementele de forma $y = f(x)$:

$$\text{Im}(f) = \{y \in B \mid (\exists) x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}.$$

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *surjectivă* dacă și numai dacă $\text{Im}(f) = B$ sau, altfel spus,

$$(\forall) y \in B \text{ ecuația } y = f(x) \text{ are cel puțin o soluție } x \in A.$$

Interpretarea geometrică a surjectivității pentru funcții reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$) :

$f : A \rightarrow B$ este surjectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f în cel puțin un punct.

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *bijectivă* dacă și numai dacă f este și injectivă și surjectivă.

Interpretarea geometrică a bijectivității pentru funcții reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$):

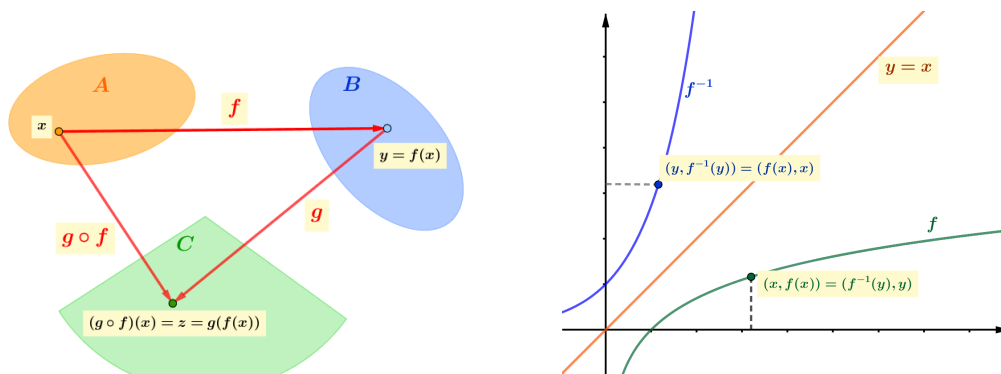
$f : A \rightarrow B$ este bijectivă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$ intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Compunerea funcțiilor

Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ definite prin relațiile $y = f(x)$, respectiv $z = g(y)$. Funcția ce asociază fiecărui element x din mulțimea A elementul $z = g(f(x))$ din mulțimea C se numește *funcție compusă* și se notează prin $g \circ f$. Mai precis, $g \circ f : A \rightarrow C$ este definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Evident, ordinea în care se efectuează operația de compunere nu este aleatoare, ci este bine determinată: domeniul de definiție al funcției g (pe prima poziție în expresia $g \circ f$) trebuie să coincidă cu domeniul de valori al funcției f (situată pe poziția secundă).



Funcții inversabile

Funcția $f : A \rightarrow B$ este *inversabilă* dacă și numai dacă există o funcție $f^{-1} : B \rightarrow A$ ce verifică relațiile

$$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in B) \quad \text{și} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in A).$$

Funcția $f^{-1} : B \rightarrow A$, $x = f^{-1}(y)$ se numește *inversa* funcției $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$.

Teoremă

Funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă d.d. este bijectivă.

Interpretarea geometrică a inversabilității pentru funcții reale ($B \subset \mathbb{R}$) de variabilă reală ($A \subset \mathbb{R}$):

$f : A \rightarrow B$ este inversabilă d.d. orice dreaptă paralelă axei Ox prin punctele $y \in B$, intersectează graficul funcției f într-un singur punct.

Graficele funcției f și a funcției inverse f^{-1} , reprezentate în același sistem de axe, sunt simetrice față de prima bisectoare.

Principiul inducției matematice

Problemă

Să se arate că propoziția $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, ($n_0, n \in \mathbb{N}$).

Etapa I VERIFICAREA Se dovedește că $\mathbf{P}(n_0)$ este adevărată.

Etapa a-II-a PASUL INDUCTIV

Presupunem că $\mathbf{P}(k)$ este adevărată.

Demonstrăm, utilizând presupunerea, că $\mathbf{P}(k+1)$ este adevărată.

În final, $\mathbf{P}(n_0)$ fiind adevărată (fapt verificat la etapa I), rezultă că $\mathbf{P}(n_0+1)$ este de asemenea adevărată (consecință a pasului inductiv). Mai departe, conform pasului inductiv, și propoziția $\mathbf{P}(n_0+2)$ este adevărată și așa mai departe, $\mathbf{P}(n)$ este adevărată pentru orice $n = n_0 + m$, $m \in \mathbb{N}$.

Sume remarcabile (1)

$$\begin{aligned}1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \\1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} \\1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right]^2\end{aligned}$$

Permutări

P_n = "numărul sistemelor ordonate ce se pot forma cu \underline{n} elemente date"

$$\begin{aligned}
 P_n &= n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \\
 n! &= (n-1)! \cdot n \quad ; \quad n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n \quad ; \\
 (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \quad ; \quad 0! = 1 \quad .
 \end{aligned}$$

Aranjamente

$A_n^m =$ ”numărul sistemelor ordonate de \underline{m} elemente ce se pot forma cu \underline{n} elemente date”

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^0 = 1 \quad ; \quad A_n^1 = n \quad ; \quad A_n^n = n! \quad .$$

Combinări

$C_n^m =$ ”numărul submulțimilor de \underline{m} elemente ce se pot forma cu \underline{n} elemente date”

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad ; \quad C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} \quad ;$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad .$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad ; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \quad ;$$

$$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \quad ; \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k \leq n) \quad .$$

(formula combinărilor complementare)

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1} \quad ; \quad C_n^k = \frac{k+1}{n-k} \cdot C_n^{k+1} \quad ;$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad .$$

Triunghiul lui Pascal (calculul rapid al tuturor combinărilor C_n)

$n = 1$				$1 \searrow$		$\swarrow 1$			C_1
$n = 2$			$1 \searrow$		$\swarrow 2 \searrow$		$\swarrow 1$		C_2
$n = 3$		1		3		3		1	C_3
$n = 4$		1	4		6		4	1	C_4
$n = 5$	1	1	5	10		10	5	1	C_5
$n = 6$	1	6	15	20		15	6	1	C_6

Binomul lui Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

$$(x - y)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k$$

(suma conține $n + 1$ termeni)

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k \\ T_{k+1} &= (-1)^k C_n^k \cdot x^{n-k} \cdot y^k \end{aligned}$$

(termenul general al dezvoltării, cel de-al $k + 1$ -termen din dezvoltare).

Sume remarcabile (2)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Numărul submulțimilor unei mulțimi finite cu n elemente este 2^n .

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \dots = 0$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

Funcții cu domeniul și codomeniul mulțimi finite

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ și $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ două mulțimi cu m și respectiv n elemente (distincte), iar $f : X \rightarrow Y$ o funcție arbitrară.

- a) Numărul funcțiilor $f : X \rightarrow Y$ este n^m .
 b) Dacă $m \leq n$ atunci numărul funcțiilor injective $f : X \rightarrow Y$ este

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1).$$

Dacă $m > n$ atunci nu pot exista funcții injective $f : X \rightarrow Y$.

- c) Dacă $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă atunci $m = n$.
 Dacă $m = n$ și $f : X \rightarrow Y$ este injectivă atunci $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă.
 Dacă $m = n$ și $f : X \rightarrow Y$ este surjectivă atunci $f : X \rightarrow Y$ este bijectivă.
 d) Numărul funcțiilor bijective $f : X \rightarrow Y$ este $P_n = n!$.

Funcția de gradul întâi

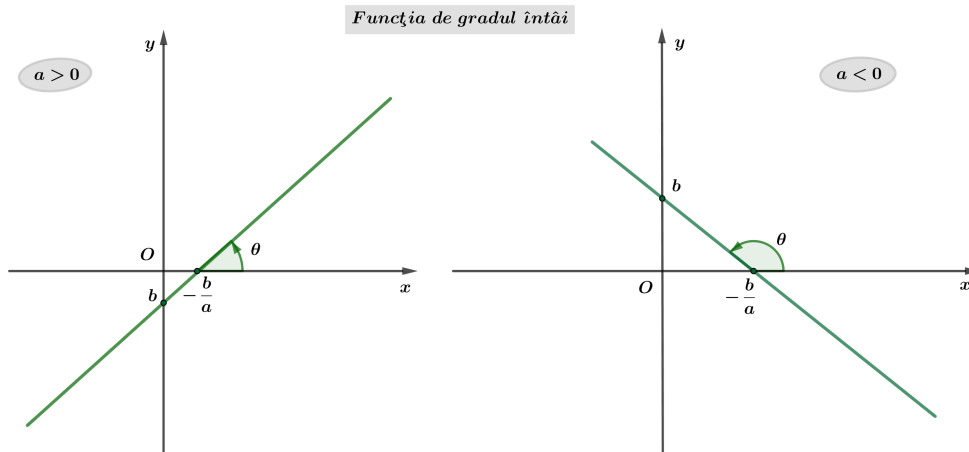
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R})$$

Graficul funcției de gradul întâi este dreapta $y = ax + b$ ce taie axele de coordonate în punctele $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ și $(0, b)$.

Soluția ecuației de gradul întâi $ax + b = 0$ este abscisa punctului în care graficul funcției intersectează axa $Ox : x = -\frac{b}{a}$.

Numărul a , coeficientul director al funcției de gradul întâi, este panta dreptei $y = ax + b$ și reprezintă tangenta unghiului θ pe care dreapta îl face cu semi-axa pozitivă Ox , măsurat în sens direct trigonometric: $a = \operatorname{tg} \theta$.

Semnul coeficientului director a determină monotonia funcției.



Dacă $a < 0$ funcția este strict descrescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Dacă $a > 0$ funcția este strict crescătoare: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Semnul funcției de gradul întâi este constant pe intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$ și $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$; practic, semnul funcției este determinat de semnul coeficientului director a .

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	semn contrar lui a		semnul lui a

Funcția de gradul al doilea

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R})$$

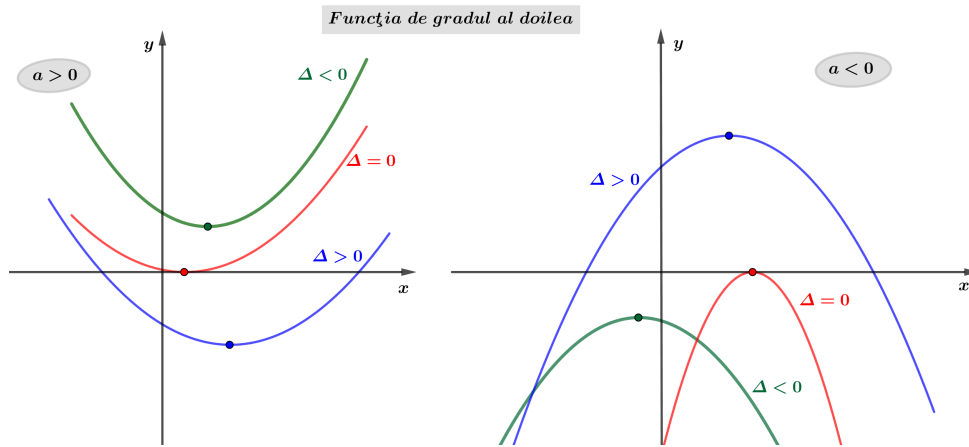
Forma canonică a expresiei de gradul al doilea se obține prin izolarea variabilei x într-un pătrat perfect:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{unde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Graficul funcției de gradul al doilea este o parabolă având vârful în punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ și axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$, paralelă cu Oy . Parabola intersectează axa Oy în punctul $(0, c)$.

Dacă $a > 0$, vârful V este punct de *minim al graficului funcției*, iar dacă $a < 0$ atunci vârful V este punct de *maxim al graficului funcției*.

Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc *intervale de monotonie* ale funcției de gradul doi.



Intersecția cu axa Ox depinde însă de natura soluțiilor ecuației de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$:

i) Dacă $\Delta < 0$ atunci $ax^2 + bx + c$ este o sumă de pătrate și nu se poate descompune în \mathbb{R} ; ecuația *nu are soluții reale*, iar parabola (graficul funcției de gradul al doilea) nu intersectează axa Ox .

ii) Dacă $\Delta = 0$ atunci $ax^2 + bx + c$ se restrânge la un pătrat; ecuația *are o singură soluție reală* (dublă) $x = -\frac{b}{2a}$, iar parabola este tangentă axei Ox .

iii) Dacă $\Delta > 0$ atunci $ax^2 + bx + c$ este diferență de pătrate și se descompune¹ după cum urmează:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \quad \text{unde } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$

ecuația *are două soluții reale distincte* x_1 și x_2 , abscisele punctelor în care parabola intersectează axa Ox .

Semnul funcției de gradul al doilea este determinat de poziția graficului (a parabolei) față de axa Ox . Cele șase situații descrise mai sus evidențiază rolul coeficientului director a și al discriminantului Δ în studiul semnului. Practic, funcția de gradul al doilea are semnul coeficientului director a cu o singură excepție: dacă discriminantul Δ este strict pozitiv; în acest caz, *pe intervalul situat între soluții, funcția are semn contrar lui a .*

¹Formula de descompunere rămâne valabilă chiar dacă $\Delta < 0$; în acest caz $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-(-\Delta)} = i\sqrt{-\Delta}$ iar soluțiile $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sunt numere complexe.

i) Dacă $\Delta < 0$ atunci funcția de gradul al doilea are același semn pe întreaga axă reală:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	

ii) Dacă $\Delta = 0$ atunci funcția de gradul al doilea are același semn pe întreaga axă reală cu excepția unui singur punct, în care se anulează:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	0	semnul lui a

iii) Dacă $\Delta > 0$ atunci funcția de gradul al doilea își schimbă semnul la trecerea prin soluții:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a

Relațiile lui Viète evidențiază legăturile ce există între coeficienții și soluțiile ecuației, indiferent dacă acestea sunt reale sau complexe:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

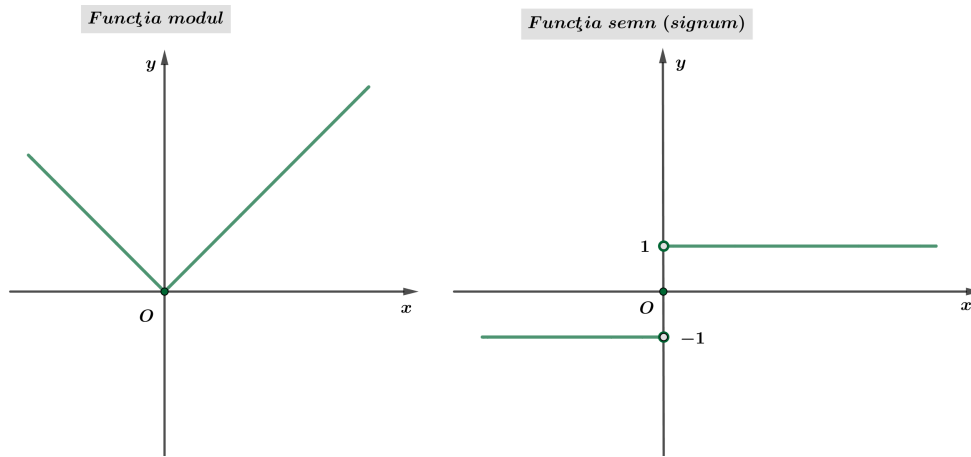
Cu ajutorul sumei $S = x_1 + x_2$ și a produsului $P = x_1 x_2$ putem construi întotdeauna ecuația de gradul al doilea cu soluțiile date x_1 și x_2 :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Funcțiile modul și signum

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



Proprietățile modulului

- i) $|x| \geq 0$ și $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (modulul este pozitiv definit)
- ii) $\frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x)$ ($x \neq 0$)
- iii) $|\alpha \cdot x| = \alpha \cdot |x|$ ($\alpha \geq 0$) (modulul este multiplicativ)
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inegalitatea triunghiului)
- iv) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Funcția modul este *continuă* în origine *fără a fi însă derivabilă* în acest punct:

$$f'_s(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1.$$

Funcția semn este *discontinuuă* în origine; $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța întâi:

$$f(0-0) = -1, \quad f(0) = 0, \quad f(0+0) = 1.$$

Funcția parte întregă

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x]$$

$[x]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x

Proprietățile părții întregi

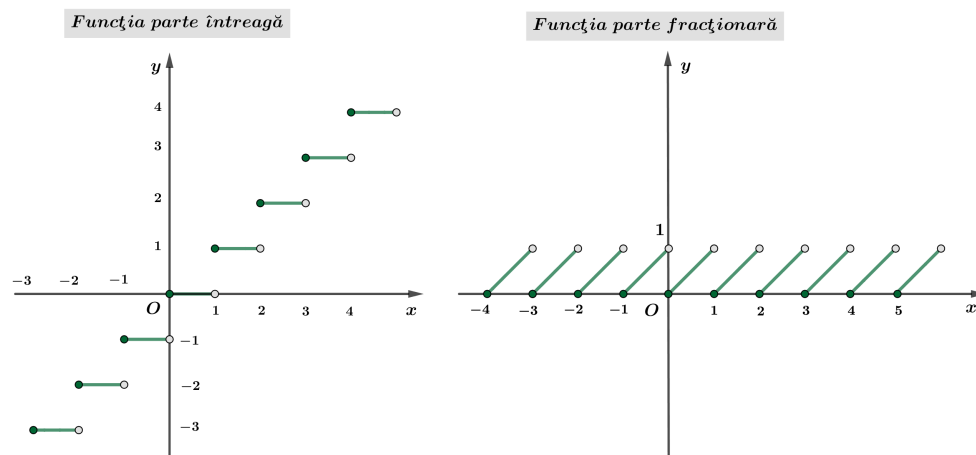
- i) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$
- ii) $[x + n] = n + [x] \quad (n \in \mathbb{Z})$

Funcția parte întregă este discontinuuă în fiecare punct de abscisă întregă:

$$f(n-0) = n - 1 \quad \text{și} \quad f(n) = f(n+0) = n$$

Punctele de abscisă întregă sunt discontinuități de speța întâi.

Funcția parte întregă este continuă la dreapta în fiecare punct de abscisă întregă.



Funcția parte fracționară

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1), \quad f(x) = \{x\}$$

$\{x\} = x - [x]$ este partea fracționară a lui x

Funcția parte fracționară este periodică cu perioada principală $T = 1$:

$$f(x+k) = f(x) \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, \quad (\forall) k \in \mathbb{Z}$$

Funcția parte fracționară este discontinuă în fiecare punct de abscisă întregă:

$$f(n-0) = 1 \quad \text{și} \quad f(n) = f(n+0) = 0$$

Puteri și radicali

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n$ a numărului pozitiv a este unica soluție pozitivă a ecuației $z^{2n} = a$ și se notează prin $\sqrt[n]{a}$.

Conform acestei definiții, pentru numerele pozitive a și z , are loc echivalența

$$\sqrt[n]{a} = z \iff z^{2n} = a.$$

Convenim să notăm rădăcina pătrată (rădăcina de ordinul al doilea) simplu prin $\sqrt{\quad}$ în loc de $\sqrt[2]{\quad}$.

Observație

Rădăcina de ordinul doi a numărului 4 este 2 deoarece doar una din rădăcinile ecuației

$$z^2 = 4 \iff z_{1,2} = \pm 2$$

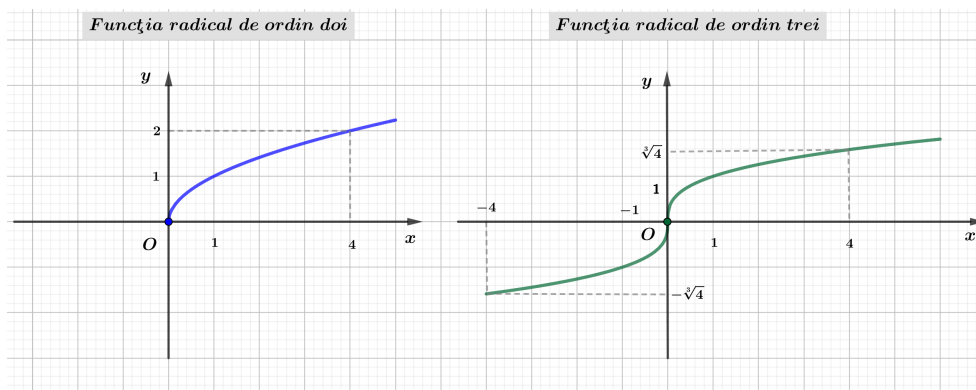
este pozitivă; prin urmare $\sqrt{4} = +2$. Exprimarea $\sqrt{4} = \pm 2$ este greșită în contextul extragerii rădăcinii reale.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[n+1]{x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Rădăcina de ordinul $k = 2n + 1$ a numărului real a este unica soluție reală a ecuației $z^k = a$ și se notează prin $\sqrt[n+1]{a}$:

$$\sqrt[n+1]{a} = z \iff z^{2n+1} = a.$$

Definiția rădăcinii de ordinul k poate fi extinsă și în cazul numerelor negative dacă indicele k este impar, $k = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).



Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este tangentă verticală la graficul funcției radical. Originea $O(0, 0)$ este punct de inflexiune cu tangenta verticală la graficul funcției radical de ordin impar.

Proprietățile puterilor și radicalilor

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}} \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R})$$

$$a^0 = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k} \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, a \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad \sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m,$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

Funcția exponențială

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty))$$

Funcția exponențială cu baza supraunitară este strict crescătoare:

$$a \in (1, \infty) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

În plus, au loc relațiile:

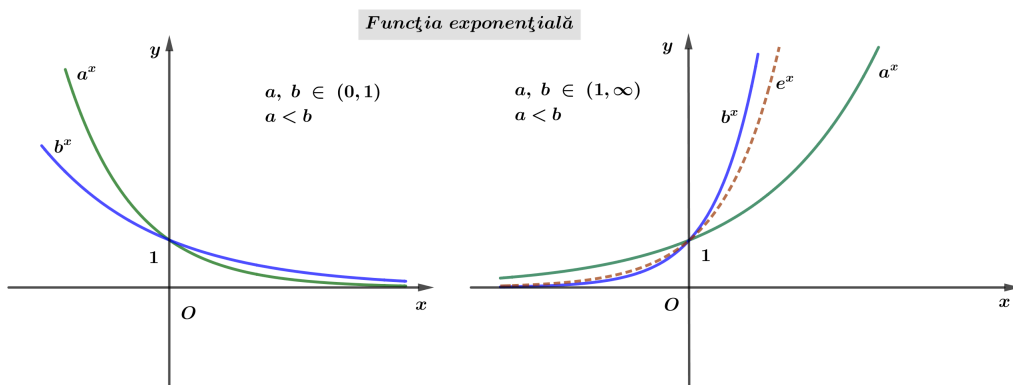
$$\begin{array}{ll} x < 0 & 1 < a < b \Rightarrow a^x > b^x \\ x > 0 & 1 < a < b \Rightarrow a^x < b^x . \end{array}$$

Funcția exponențială cu baza subunitară este strict descrescătoare:

$$a \in (0, 1) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} .$$

În plus, au loc relațiile:

$$\begin{array}{ll} x < 0 & 0 < a < b < 1 \Rightarrow a^x > b^x \\ x > 0 & 0 < a < b < 1 \Rightarrow a^x < b^x . \end{array}$$



Proprietățile funcției exponențiale

(i) Proprietăți de calcul

$$\begin{array}{ll} a^x \cdot a^y = a^{x+y} & ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} & ; \\ (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x & ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} & ; \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y} & ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} . \end{array}$$

(ii) Funcția exponențială este *bijectivă* deoarece este injectivă

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2} \quad (\text{echivalent } a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2)$$

și surjectivă

$$(\forall) y \in (0, +\infty) \quad (\exists) x \in \mathbb{R} \quad \text{a.î. } y = a^x.$$

Prin urmare funcția exponențială este *inversabilă* iar *inversa* ei este funcția logaritmică cu aceeași bază (vezi paragraful ce urmează).

(iii) Dreapta $y = 0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală la graficul funcției exponențiale. În cazul funcției exponențiale cu baza $e = 2, 718\,281 \dots$, limitele la extremități sunt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty.$$

Funcția logaritmică

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_a x \quad (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, \infty))$$

Logaritmul unui număr pozitiv x calculat în baza a ($a \in \mathbb{R}_+^ \setminus \{1\}$) se notează $\log_a x$ și reprezintă puterea la care trebuie ridicată baza a pentru a obține x .*

Conform acestei definiții, pentru numerele strict pozitive x și a , $a \neq 1$, are loc echivalența

$$\log_a x = y \iff a^y = x.$$

Logaritmi cel mai des întâlniți în practică sunt *logaritmul zecimal* (\log_{10}) pentru calcule numerice și *logaritmul natural* (\log_e), cu baza $e = 2, 718\,281 \dots$, la capitolul de Analiză matematică. Pentru simplitatea scrierii se utilizează notațiile

$$\log_{10} x = \lg x \quad \text{și} \quad \log_e x = \ln x.$$

Funcția logaritmică cu *baza supraunitară* este *strict crescătoare*:

$$a \in (1, \infty) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

În plus, au loc relațiile:

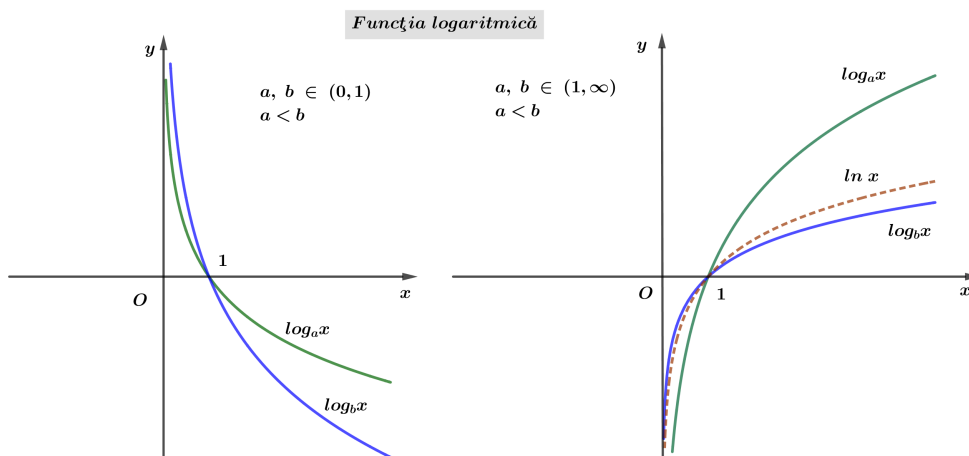
$$\begin{array}{ll} 0 < x < 1 & 1 < a < b \Rightarrow \log_a x < \log_b x \\ x > 1 & 1 < a < b \Rightarrow \log_a x > \log_b x. \end{array}$$

Funcția exponențială cu baza subunitară este *strict descrescătoare*:

$$a \in (0, 1) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 .$$

În plus, au loc relațiile:

$$\begin{array}{ll} 0 < x < 1 & 0 < a < b < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_b x \\ x > 1 & 0 < a < b < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_b x . \end{array}$$



Proprietățile funcției logaritmice

(i) Proprietăți de calcul

$$\begin{array}{ll} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y \quad ; \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad ; \\ \log_a 1 &= 0 \quad ; \quad \log_a a = 1 \quad ; \\ \log_a x^r &= r \log_a x \quad ; \quad \log_{a^r} x = \frac{1}{r} \log_a x \quad ; \\ \log_a \sqrt[n]{x} &= \frac{1}{n} \log_a x \quad ; \quad \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad . \end{array}$$

(ii) Funcția logaritmică este *bijectivă* deoarece este injectivă

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2 \quad (\text{echivalent } \log_a x_1 = \log_a x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$$

și surjectivă

$$(\forall) y \in \mathbb{R} \quad (\exists) x \in (0, +\infty) \quad \text{a.î. } y = \log_a x.$$

Prin urmare funcția logaritmică este *inversabilă* iar *inversa* ei este funcția exponențială cu aceeași bază.

$$\begin{aligned} a^{\log_a x} &= x & (\forall) x \in (0, +\infty) \\ \log_a a^y &= y & (\forall) y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La pagina 4, figura din partea dreaptă, funcțiile exponențială cu baza e și inversa ei, logaritmul natural, sunt reprezentate în același sistem de coordonate. Graficele celor două funcții sunt simetrice față de prima bisectoare.

(iii) Dreapta $x = 0$ (axa Oy) este asimptotă verticală la graficul funcției logaritmice. În cazul logaritmului natural, limitele la extremități sunt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = +\infty.$$

(iv) Formulele de schimbare a bazei logaritmilor

$$\begin{aligned} \log_a A &= \log_b A \cdot \log_a b \quad ; \quad \log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \quad ; \\ \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}. \end{aligned}$$

Polinoame și ecuații algebrice

Împărțirea polinoamelor. Divizibilitate.

$f, g \in \mathbb{C}[X]$ polinoame având gradele $n = \text{grad}(f)$ și respectiv $m = \text{grad}(g)$

$$n \geq m \quad \Rightarrow \quad f : g = c \text{ rest } r \quad \text{unde} \quad \begin{aligned} \text{grad}(r) &< m \\ \text{grad}(c) &= n - m \end{aligned}$$

Teorema împărțirii cu rest

$$f : g = c \text{ rest } r \quad \text{d.d.} \quad f = g \cdot c + r \quad (\text{proba împărțirii})$$

Polinomul f este *divizibil* prin g dacă și numai dacă $r \equiv 0$ (citește: r este polinomul identic nul sau, mai precis, coeficienții restului r sunt toți nuli).

Polinoamele f și g sunt *prime între ele* dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1 (se notează: $(f, g) = 1$).

Teorema lui Bézout

Restul împărțirii lui f prin $(x - a)$ este $r = f(a)$.

Dacă $f(a) = 0$, atunci a se numește *rădăcină* a polinomului f .

Consecințe

a) f este divizibil prin $(x - a) \iff f(a) = 0$

b) f este divizibil prin $g \iff$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini (cu multiplicități identice) pentru f .

Teorema fundamentală a algebrei

Orice polinom cu coeficienți complecși are cel puțin o rădăcină complexă.

Consecință

Orice polinom $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{C}[X]$ are exact n rădăcini complexe x_1, x_2, \dots, x_n (distincte sau nu) și prin urmare se descompune în factori primi de gradul întâi:

$$f = a_0(X - x_1)^{n_1} \cdot (X - x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (X - x_k)^{n_k}$$

unde n_1, n_2, \dots, n_k reprezintă multiplicitățile rădăcinilor distincte x_1, x_2, \dots, x_k .

Relațiile lui Viète

$$gr(f) = 2 \Rightarrow f = a_0X^2 + a_1X + a_2$$

$$f = a_0(X - x_1)(X - x_2) = a_0X^2 - a_0(x_1 + x_2)X + a_0x_1x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1 x_2 &= \frac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

$$gr(f) = 3 \Rightarrow f = a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$$

$$\begin{aligned} f &= a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = \\ &= a_0X^3 - a_0(x_1 + x_2 + x_3)X^2 + a_0(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)X - a_0x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= \frac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

$$gr(f) = 4 \Rightarrow f = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$$

$$\begin{aligned} f &= a_0(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = \\ &= a_0X^4 - a_0(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)X^3 + a_0(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_2x_4 + x_1x_3 &= \frac{a_2}{a_0} \heartsuit \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 &= -\frac{a_3}{a_0} \diamond \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{a_4}{a_0} \end{cases}$$

$$\heartsuit \text{ se scrie mai convenabil: } x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\diamond \text{ se scrie mai convenabil: } x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -\frac{a_3}{a_0}$$

Tipuri speciale de ecuații de grad superior

a) *Ecuații binome*

$$x^n - a = 0$$

- se scrie a sub formă trigonometrică: $a = r(\cos t + i \sin t)$

- se extrage rădăcina complexă de ordinul n :

$$x_k \in \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right) \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} \right\}$$

b) *Ecuatii bipătrate și tripătrate*

$$x^4 + ax^2 + b = 0 \quad \text{substituția} \quad x^2 = y$$

$$x^6 + ax^3 + b = 0 \quad \text{substituția} \quad x^3 = y$$

c) *Ecuatii reciproce*

- Ecuatia reciprocă de gradul 3

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

admite soluția $x_1 = -1$.

Se aplică schema lui Horner și se obține o ecuație de gradul doi.

- Ecuatia reciprocă de gradul 4

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Prin împărțirea cu x^2 rezultă $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$, echivalent, după gruparea termenilor

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Se face substituția $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Se rezolvă ecuația redusă: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$.

Se revine la variabila x rezolvând ecuațiile de gradul al doilea: $x + \frac{1}{x} = t_1$

și $x + \frac{1}{x} = t_2$.

- Ecuatia reciprocă de gradul 5

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

admite soluția $x = -1$.

Se aplică schema lui Horner și se obține o ecuație reciprocă de gradul 4:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & a & b & c & c & b & a \\ -1 & a & b-a & -b+a+c & b-a & a & 0 \end{array}$$

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

d) Ecuatii cu coeficienți întregi

$$f = 0 \quad f \in \mathbb{Z}[X]$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Rădăcinile întregi ale lui f se află printre divizorii termenului liber a_n .

Rădăcinile raționale $\frac{p}{q}$ se află printre fracțiile $\frac{p}{q}$ cu

$$p, \text{ divizor al termenului liber } a_n$$

$$q, \text{ divizor al coeficientului director } a_0$$

e) Ecuatii cu coeficienți raționali

$$f = 0 \quad f \in \mathbb{Q}[X]$$

$$a + b\sqrt{q} \quad (a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0, q \text{ nu este pătrat perfect})$$

Dacă $x_1 = a + b\sqrt{q}$ este rădăcină pentru f atunci $x_2 = a - b\sqrt{q}$ este de asemenea rădăcină pentru f , caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - b\sqrt{q})(X - a + b\sqrt{q}) = (X - a)^2 - b^2q.$$

f) Ecuatii cu coeficienți reali

$$f = 0 \quad f \in \mathbb{R}[X]$$

$$a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$$

Dacă $x_1 = a + ib$ este rădăcină pentru f atunci $x_2 = a - ib$ este de asemenea rădăcină pentru f , caz în care f este divizibil prin

$$(X - a - ib)(X - a + ib) = (X - a)^2 + b^2.$$

Matrici și determinanți

Matricea este un tabel de numere (reale sau complexe), numite elementele matricii, identificate prin poziția pe care acestea le ocupă: elementul notat a_{ij} se găsește la intersecția liniei i cu coloana j .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{ij} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj-1} & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Matricea A este o matrice dreptunghiulară de tipul $m \times n$ deoarece are m linii și n coloane. Dacă numărul de linii coincide cu numărul de coloane ($m = n$), spunem că A este o matrice pătrată de ordinul n .

Operații cu matrici

- *adunarea* matricilor de același tip: $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$;
- *înmulțirea cu un scalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ (sau \mathbb{C}): $\alpha \cdot [a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$;
- *înmulțirea matricilor* se realizează după regula ”linie pe coloană” și este posibilă doar dacă numărul coloanelor primului termen $[a_{ik}] \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ este egal cu numărul liniilor celui de-al doilea termen $[b_{kj}] \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$:

$$[a_{ik}] \cdot [b_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right].$$

De exemplu, produsul matricii A având trei linii și două coloane ($m = 3, p = 2$) cu matricea B formată din două linii și patru coloane ($p = 2, n = 4$) este matricea $C = A \cdot B$ cu trei linii și patru coloane ($m = 3, n = 4$):

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \boxed{b_{21}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Chiar dacă se poate calcula $A \cdot B$, în general $B \cdot A$ nu are sens. Mai mult, în cazul matricilor pătrate, deși produsele $A \cdot B$ și $B \cdot A$ au ambele sens, în general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Cu alte cuvinte, produsul matricilor pătrate nu este o operație comutativă.

Matricea nulă $\mathbf{0}$, matricea cu toate elementele egale cu 0, este element neutru la adunare.

Matricea pătrată de ordinul n , notată I_n și numită *matricea unitate* de ordinul n , având toate elementele nule cu excepția celor situate pe diagonala principală, care sunt egale cu 1, este element neutru la înmulțirea matricilor.

O funcție bijectivă $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se numește *permutare* de gradul n . Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează S_n și conține $n!$ elemente.

Dacă i și j sunt elemente distincte din $\{1, 2, \dots, n\}$, atunci permutarea τ_{ij} definită prin $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ și $\tau_{ij}(k) = k$ pentru $k \neq i, j$ se numește *transpoziție*. Numărul tuturor transpozițiilor de ordinul n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ și coincide cu numărul perechilor ordonate (i, j) , cu $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Orice permutare σ de ordin n cu $n \geq 2$ se poate reprezenta ca produs de transpoziții.

Fie i și j elemente distincte din $\{1, 2, \dots, n\}$; perechea ordonată (i, j) cu $i < j$ se numește *inversiune* a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul tuturor inversiunilor permutării σ se notează $inv(\sigma)$, iar $sign(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$ se numește *signatura* (*semnul*) permutării.

Permutarea σ este pară, respectiv impară după cum signatura sa $sign(\sigma)$ este $+1$ sau -1 . În particular, orice transpoziție este o permutare impară.

Signatura unei permutări σ de ordinul n se poate calcula cu formula

$$sign(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Determinantul unei matrici pătrate este numărul (real sau complex) calculat după regula

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Calculul unui determinant cu formula din definiție este laborioasă, nepractică.

Determinantul matricelor de ordinul 2

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \stackrel{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinantul matricelor de ordinul 3

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \stackrel{not}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

În aplicații, pentru calculul determinantului de ordinul al treilea se utilizează regula triunghiurilor sau regula lui Sarrus, reguli ilustrate în figura ce urmează.



Se numește *complement algebraic* al elementului a_{ij} din matricea A , numărul

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j-1} & a_{1j+1} & a_{1n} \\ a_{i-11} & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & a_{i+1n} \\ a_{n1} & a_{nj-1} & a_{nj+1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(ce rezultă multiplicând $(-1)^{i+j}$ cu *minorul* corespunzător elementului a_{ij} , adică determinantul matricii obținute prin eliminarea liniei i și coloanei j din A).

Dezvoltarea determinantului după linia i :

$$\det A = a_{i1}\Gamma_{i1} + a_{i2}\Gamma_{i2} + \dots + a_{in}\Gamma_{in}.$$

Dezvoltarea determinantului după coloana j :

$$\det A = a_{1j}\Gamma_{1j} + a_{2j}\Gamma_{2j} + \dots + a_{nj}\Gamma_{nj}.$$

Proprietățile determinantilor

1. Dacă într-o matrice A

- toate elementele unei linii (coloane) sunt nule, sau
- două linii (coloane) sunt egale, sau
- două linii (coloane) sunt proporționale

atunci $\det A = 0$.

2. Dacă la o linie (coloană) a unui determinant se adună elementele corespunzătoare ale altei linii (coloane) multiplicare cu un scalar, valoarea determinantului rămâne neschimbată.

Spre exemplu, în determinantul de ordinul trei ce urmează, la linia întâi este adunată linia a treia multiplicată cu α :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} & a_{13} + \alpha a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Dacă se înmulțesc elementele unei linii (sau coloane) din matricea A cu un scalar α atunci determinantul noii matrici este $\alpha \det A$.

4. Determinantul produsului dintre un scalar α și o matrice A de ordinul n : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

5. Determinantul produsului a două matrici este egal cu produsul determinantilor acestora: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

6. O matrice de ordinul n se numește matrice triunghiulară dacă toate elementele situate dedesubtul (sau deasupra) unei diagonale sunt nule. Determinantul unei matrici triunghiulare este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală sau $(-1)^n$ multiplicat cu produsul elementelor de pe diagonala secundară, după caz.

7. Descompunerea determinantului relativ la o linie (coloană) o ilustrăm în cazul particular al determinantului de ordinul trei, relativ la linia întâi:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(Trebuie subliniat că această proprietate este valabilă în cazul determinantilor de orice ordin, indiferent de linia (sau coloana) luată în considerare.)

8. Matricile pătrate de ordinul al doilea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ verifică următoarea identitate remarcabilă (Cayley-Hamilton):

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I_2 = \mathbf{0}_2.$$

Rangul unei matrici

Rangul unei matrici arbitrare este *ordinul* celui mai mare (în sensul numărului de linii/coloane) determinant nenul ce se poate forma cu elementele matricii date (fără a modifica poziția lor din liniile/coloanele matricii). *Rangul matricii* este egal cu r , notat $r = \text{rang } A$, dacă matricea admite un minor nenul de ordin r , iar toți minorii de ordin $r + 1$, dacă există, sunt nuli.

Matricea cu toate elementele nule are rangul 0.

Dacă cel puțin un element al matricii A (cu m linii și n coloane) este nenul atunci rangul verifică inegalitatea

$$1 \leq \text{rang } A \leq \min \{m, n\}.$$

Cum se calculează rangul unei matrici?

Dacă A este o matrice pătrată de ordinul n și $\det A \neq 0$ atunci $\text{rang } A = n$.

Dacă A este o matrice arbitrară sau una pătrată cu $\det A = 0$, se procedează în felul următor:

- se fixează un element nenul a_{ij} (dacă este posibil chiar a_{11} , elementul din colțul de NV);

- se bordează elementul a_{ij} cu o nouă linie și o nouă coloană astfel încât determinantul de ordinul al doilea rezultat să fie nenul și se trece la etapa următoare ($\text{rang } A \geq 2$); dacă prin bordarea lui a_{ij} toți determinanții de ordinul doi rezultați sunt nuli atunci $\text{rang } A = 1$ și calculul s-a încheiat;

- se repetă procedeul descris prin bordarea submatricii de ordinul 2 cu determinant nenul obținută la etapa precedentă: se caută acum un determinant nenul de ordinul 3; dacă a fost găsit un astfel de determinant, se trece la etapa următoare ($\text{rang } A \geq 3$), iar dacă toți determinanții de ordinul 3 construiți sunt nuli, $\text{rang } A = 2$ și calculul s-a încheiat;

- procedeul poate fi repetat cel mult până se atinge rangul $\min\{m, n\}$ (respectiv $n - 1$ în cazul matricilor pătrate).

Inversabilitatea matricilor pătrate. Calculul inversei.

O matrice pătrată A este *inversabilă* dacă și numai dacă există o matrice (de același ordin), notată A^{-1} , pentru care $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Condiția necesară și suficientă ca matricea A să fie inversabilă este

$$\det A \neq 0.$$

Cum se determină inversa unei matrici A ?

- se calculează $\det A$: $\det A = 0 \Rightarrow A$ nu este inversabilă;

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă.

- se calculează *transpusa* matricii $A = [a_{ij}]$, matricea $A^t = [a_{ji}]$ formată cu elementele lui A prin schimbarea liniilor în coloane (păstrând ordinea lor). (Este de remarcat identitatea $\det A = \det A^t$.)

- se calculează reciproca (adjuncta) matricii $A = [a_{ij}]$, matricea $A^* = [\Gamma_{ji}]$ formată din complementii algebrici ai elementelor transpusei $A^t = [a_{ji}]$.

- se determină matricea inversă $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Sisteme de ecuații liniare

Un sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} .$$

Echivalent, sistemul poate fi exprimat sub forma matricială $A \cdot X = B$, unde $A = [a_{ij}]$ reprezintă matricea sistemului și

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ respectiv } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

Este posibilă numai una dintre următoarele situații:

- Sistemul are soluție unică și se numește *compatibil determinat*;
- Sistemul admite o infinitate de soluții și se numește *compatibil nedeterminat*;
- Sistemul nu are soluții și se numește *incompatibil*.

Cazuri particulare

Sistemul Cramer: dacă A este o matrice pătrată ($m = n$, numărul necunoscutelor coincide cu cel al ecuațiilor) și $\det A \neq 0$ atunci sistemul este compatibil determinat, unica sa soluție, exprimată matricial fiind $X = A^{-1} \cdot B$. Același rezultat se obține aplicând regula lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A},$$

unde determinanții Δ_k , $k = \overline{1, n}$ rezultă din $\Delta = \det A$ prin înlocuirea coloanei k cu cea a termenilor liberi B .

Sistemul omogen, sistemul în care toți termenii liberi sunt nuli $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$). Sistemele omogene sunt compatibile deoarece admit cel puțin soluția $(0, 0, \dots, 0)$, numită soluția banală.

Matricea extinsă a sistemului este matricea obținută prin completarea matricii A cu termenii liberi:

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Teorema Kronecker-Capelli

Un sistem algebric liniar este compatibil dacă și numai dacă rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse a sistemului: $\text{rang } A = \text{rang } \overline{A}$.

Odată calculat rangul matricii A se evidențiază *determinantul principal* Δ_p adică "cel mai mare determinant" nenul ce se poate forma cu elementele matricii A . Liniile determinantului principal indică ecuațiile principale iar coloanele sale, necunoscutele principale; toate celelalte ecuații și necunoscute sunt secundare. Subsistemul format de ecuațiile principale este un sistem de tip Cramer iar soluțiile sale sunt chiar soluțiile sistemului inițial.

Determinantul principal poate fi bordat, pe linie, cu coeficienți situați în ecuațiile secundare și pe coloană, cu coeficienți ai necunoscutelor secundare (evident, dacă există ecuații și necunoscute secundare). Determinanții obținuți prin bordare poartă numele de *determinanți (minori) caracteristici*.

Teorema lui Rouché

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă toți minorii caracteristici sunt nuli ($\text{rang } A < m$) sau dacă nu există asemenea minori ($\text{rang } A = m$).

Gradul de nedeterminare al unui sistem compatibil este dat de numărul de necunoscute secundare $n - \text{rang } A > 0$; dacă $\text{rang } A = n$ atunci sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare).

Un *sistem omogen* admite soluții nebanale d.d. dacă rangul matricii sistemului este inferior numărului de necunoscute ($\text{rang } A < n$).

Un *sistem omogen* în care numărul ecuațiilor coincide cu numărul necunoscutelor ($m = n$) admite soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul matricii sistemului este nul ($\det A = 0$).

Structuri algebrice

Definiție

Fie M o mulțime nevidă; o lege de corespondență ce asociază oricărei perechi de elemente din M , în mod unic, un element din M

$$(x, y) \mapsto x * y : M \times M \rightarrow M$$

se numește *lege de compoziție* pe M .

Simbolul $*$ utilizat pentru a desemna elementul compus $x*y$ este inspirat de cele două tipuri de legi de compoziție întâlnite din zorii educației matematice, adunarea ($+$) și înmulțirea (\cdot). În notație aditivă, elementul compus se notează prin $x + y$ și se numește sumă iar în notație multiplicativă, se notează $x \cdot y$ (uneori scris pe scurt chiar xy) și se numește produs.

Submulțimea $M_0 \subset M$ este *parte stabilă a lui M la legea de compoziție $*$* dacă și numai dacă oricărei perechi de elemente (x_0, y_0) din $M_0 \times M_0$ îi corespunde un element situat de asemenea în M_0 :

$$(\forall) x_0, y_0 \in M_0 \Rightarrow x_0 * y_0 \in M_0.$$

Legea de compoziție $*$ este *asociativă* d.d.

$$(\forall) x, y, z \in M \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z).$$

Legea de compoziție $*$ este *comutativă* d.d.

$$(\forall) x, y \in M \Rightarrow x * y = y * x.$$

Elementul $e \in M$ se numește *element neutru pentru legea $*$* dacă

$$(\forall) x \in M \Rightarrow x * e = e * x = x.$$

Elementul neutru pentru o lege de compoziție, dacă există, este unic.

Elementul neutru al unei legi de compoziție de tip aditiv este notat prin 0 și este numit *element de efect nul* (sau, mai simplu, *zero*).

Elementul neutru al unei legi de compoziție de tip multiplicativ este notat prin 1 și este numit *element unitate*.

Un element x se numește *simetrizabil în raport cu legea $*$* dacă

$$(\exists) x' \in M \text{ a.î. } x * x' = x' * x = e.$$

Elementul notat prin x' este *simetricul lui x* .

Dacă elementele x , y și z sunt simetrizabile atunci $x * y$ și z' sunt și ele simetrizabile. În plus, sunt verificate identitățile

$$(x * y)' = y' * x' \quad \text{și} \quad (z')' = z.$$

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziție de tip aditiv este notat prin $-x$ și este numit *opusul lui x* .

Simetricul lui x în raport cu o lege de compoziție de tip multiplicativ este notat prin x^{-1} și este numit *inversul lui x* .

Definiție

Mulțimea nevidă M , înzestrată cu legea de compoziție $*$, este *monoid* dacă și numai dacă legea $*$ este asociativă și are element neutru:

$$\begin{aligned} (\forall) x, y, z \in M &\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z); \\ (\exists) e \in M \text{ a.î. } (\forall) x \in M &\Rightarrow x * e = e * x = x. \end{aligned}$$

Dacă legea de compoziție este comutativă atunci M este un *monoid comutativ*.

Definiție

Mulțimea nevidă G , înzestrată cu legea de compoziție $*$, este *grup* dacă legea $*$ este asociativă, are element neutru și toate elementele din G sunt simetrizabile.

Așadar, $(G, *)$ este grup d.d. sunt satisfăcute următoarele axiome:

$$\begin{aligned} (\forall) x, y, z \in G &\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z); \\ (\exists) e \in G \text{ a.î. } (\forall) x \in G &\Rightarrow x * e = e * x = x; \\ (\forall) x \in G (\exists) x' \in G \text{ a.î. } &x * x' = x' * x = e. \end{aligned}$$

Dacă legea de compoziție este comutativă atunci $(G, *)$ este un *grup comutativ* sau *abelian*.

Teoremă

Fie $(G, *)$ un grup și $a, b \in G$ două elemente arbitrare în G . Ecuațiile $a * x = b$ și $y * a = b$ au soluții unice în G , mai precis

$$\begin{aligned} a * x = b &\iff x = a' * b \quad \text{respectiv} \\ y * a = b &\iff y = b * a'. \end{aligned}$$

Dacă $(G, +)$ este un grup în care legea de compoziție este de tip aditiv atunci pentru orice $a \in G$ și orice numere întregi m, n , au loc identitățile:

$$ma + na = (m + n)a, \quad m(na) = (mn)a, \quad -(na) = n(-a), \quad 0a = 0.$$

Dacă (G, \cdot) este un grup în care legea de compoziție este de tip multiplicativ atunci pentru orice $a \in G$ și orice numere întregi m, n , au loc identitățile

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^n)^{-1} = a^{-n} \quad a^0 = 1.$$

Definiție

O submulțime nevidă $H \subset G$ a unui grup $(G, *)$ se numește subgrup al lui G dacă sunt satisfăcute următoarele condiții

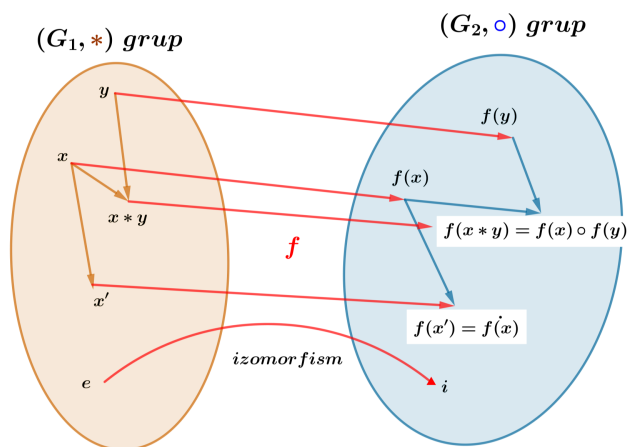
$$(\forall) x, y \in H \Rightarrow x * y \in H;$$

$$(\forall) x \in H \Rightarrow x' \in H.$$

Definiție

Fie $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) două grupuri; funcția bijectivă $f : G_1 \rightarrow G_2$ se numește *izomorfism* de grupuri dacă

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y) \quad (\forall) x, y \in G_1.$$



Exemplu

Funcția logaritm natural $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ realizează un izomorfism între $((0, +\infty), \cdot)$, grupul multiplicativ al numerelor pozitive și $(\mathbb{R}, +)$, grupul aditiv al numerelor reale. Într-adevăr, \ln este bijectivă și satisface condiția

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

Definiție

O mulțime nevidă A înzestrată cu două legi de compoziție, una aditivă și una multiplicativă, notate tradițional $+$ și \cdot , se numește inel dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$(A, +)$ este grup comutativ,

(A, \cdot) este monoid,

înmulțirea (\cdot) este distributivă față de adunare $(+)$, mai precis

$$(\forall) x, y, z \in A \quad x(y + z) = xy + xz \quad \text{și} \quad (y + z)x = yx + zx.$$

Dacă înmulțirea elementelor din A este o lege de compoziție comutativă atunci inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel *comutativ*.

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un inel fără divizori ai lui zero dacă

$$x \neq 0 \quad \text{și} \quad y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \neq 0.$$

Un inel comutativ (format din cel puțin două elemente) fără divizori ai lui zero se numește *domeniu de integritate*.

Elementele nenule $u, v \in A$ sunt divizori ai lui zero dacă $uv = 0$.

Exemplu

Inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate. Singurele elemente inversabile (adică simetrizabile față de operația multiplicativă \cdot) sunt 1 și -1 .

Definiție

Fie $(A_1, +, \cdot)$ și $(A_2, +, \cdot)$ două inele (fiecare înzestrată cu propriile sale legi de compoziție, deși acestea sunt notate similar); funcția bijectivă $f : A_1 \rightarrow A_2$ se numește *izomorfism* de inele dacă

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned} \quad (\forall) x, y \in A_1.$$

Definiție

Un inel $(K, +, \cdot)$ se numește corp dacă $0 \neq 1$ și orice element nenul x este inversabil.

Exemple

Mulțimile numerice \mathbb{Q} , \mathbb{R} și \mathbb{C} cu operațiile uzuale sunt corpuri comutative.

\mathbb{Z}_p , **inelul claselor de resturi modulo p**

Fie n un număr întreg arbitrar și p un număr natural fixat; conform teoremei împărțirii cu rest, există doi întregi, q și r unic determinați, astfel încât

$$n = qp + r \quad \text{cu} \quad 0 \leq r < p.$$

Numărul q se numește *cât* al împărțirii $n : p$ iar r se numește *rest*. Resturile posibile la împărțirea $n : p$ sunt $0, 1, 2, \dots, p - 1$. Astfel mulțimea numerelor

întregi \mathbb{Z} se poate descompune în p submulțimi disjuncte:

$$\begin{aligned} \{\dots, -p, \boxed{0}, p, 2p, \dots\} &= \{kp \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{0}, \\ \{\dots, -p+1, \boxed{1}, p+1, 2p+1, \dots\} &= \{kp+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{1}, \\ &\vdots \\ \{\dots, -p+r, \boxed{r}, p+r, 2p+r, \dots\} &= \{kp+r \mid k \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{not}}{=} \widehat{r}, \\ &\vdots \\ \{\dots, -p+(p-1), \boxed{p-1}, p+(p-1), \dots\} &= \{kp+(p-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \widehat{p-1}, \end{aligned}$$

numite clase de resturi modulo p . Mulțimea tuturor claselor de resturi modulo p se notează \mathbb{Z}_p :

$$\mathbb{Z}_p = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \dots, \widehat{p-1}\}.$$

Pe această mulțime se introduc două legi de compoziție după cum urmează:

$$\begin{aligned} \text{adunarea claselor modulo } p, \quad \widehat{a} + \widehat{b} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a+b} \quad \text{și} \\ \text{înmulțirea claselor modulo } p, \quad \widehat{a} \cdot \widehat{b} &\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \cdot b}. \end{aligned}$$

Adunarea și înmulțirea sunt corect definite deoarece, conform definiției claselor de resturi, dacă întregul $k \in \widehat{r}$ și $0 \leq r < p$ atunci $\widehat{k} = \widehat{r}$.

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel comutativ în care elementul neutru la adunare este $\widehat{0}$ iar elementul neutru la înmulțire este $\widehat{1}$.

Orice clasă de resturi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ are opus: $-\widehat{a} = \widehat{p-a}$.

Nu toate clasele de resturi din \mathbb{Z}_p sunt inversabile: elementul $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p$ este inversabil d.d. singurul divizor comun al lui a și p este 1.

În consecință, dacă a este divizor propriu al lui p ($a \neq 1$ și $a \neq p$) atunci $p = ab$ iar $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{p} = \widehat{0}$ deci \widehat{a} este divizor al lui zero.

i) Dacă p este neprim atunci $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ este inel cu divizori ai lui zero.

ii) Dacă p este un număr prim atunci toate elementele din $\mathbb{Z}_p \setminus \{\widehat{0}\}$ sunt inversabile ceea ce conferă lui $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ o structură de *corp comutativ*.

iii) Dacă p este un număr prim atunci $\widehat{a}^{p-1} = \widehat{1}$ oricare ar fi $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\widehat{0}\}$.

TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

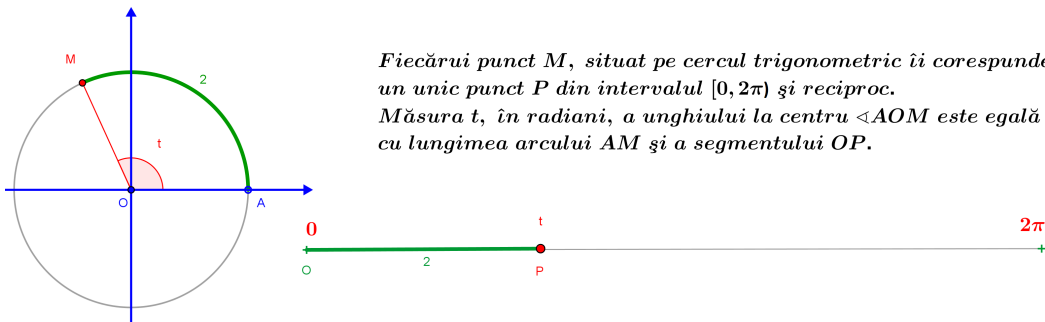
Funcțiile trigonometrice

$\mathcal{C}(O; 1) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ -cercul trigonometric (centrat în originea axelor de coordonate cu raza 1).

$M(x, y)$ -punctul curent pe cercul trigonometric.

$t \in [0, 2\pi)$ -măsura în radiani a unghiului la centru format de semiaxa Ox_+ cu raza vectoare OM .

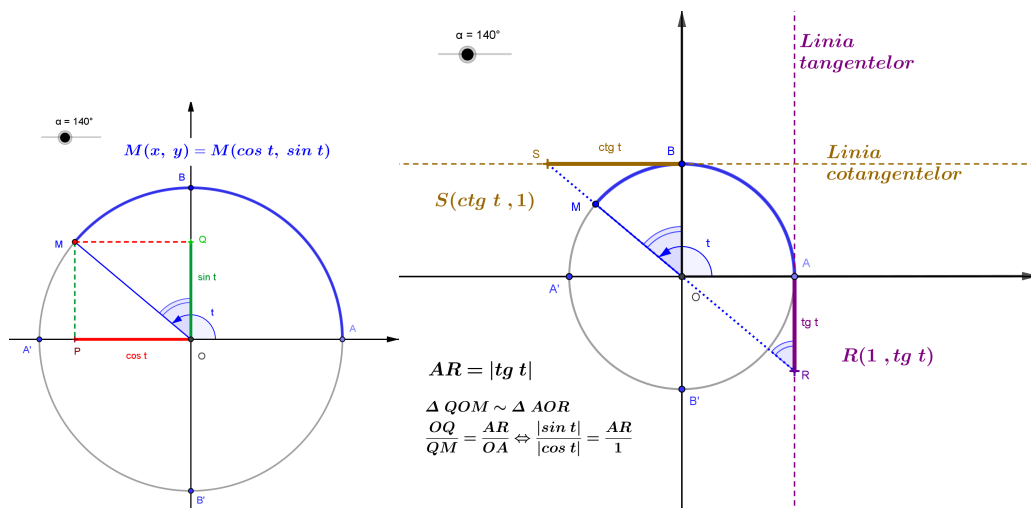
Correspondența $t \longleftrightarrow M(x, y)$ este bijectivă .



Fiecărui punct M , situat pe cercul trigonometric îi corespunde un unic punct P din intervalul $[0, 2\pi)$ și reciproc. Măsura t , în radiani, a unghiului la centru $\sphericalangle AOM$ este egală cu lungimea arcului AM și a segmentului OP .

Definiții

$$\cos t = x, \quad \sin t = y, \quad \operatorname{tg} t = \frac{y}{x} \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} t = \frac{x}{y}.$$



Definiția se poate extinde de la intervalul $[0, 2\pi)$ la \mathbb{R} prin procedeul numit ”reducerea la perioada principală”:

$$(\forall) t \in \mathbb{R} \quad (\exists!) t^* \in [0, 2\pi) \quad \text{a.î. } t = t^* + 2k\pi, \quad \text{unde } k \in \mathbb{Z}, \quad k = \left[\frac{t}{2\pi} \right]$$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos t = \cos t^* \quad \text{și} \quad \sin t = \sin t^*$$

Proprietățile funcțiilor cos și sin

cos și sin sunt *mărginite*: $|\cos t| \leq 1$ și $|\sin t| \leq 1$ $(\forall) t \in \mathbb{R}$.

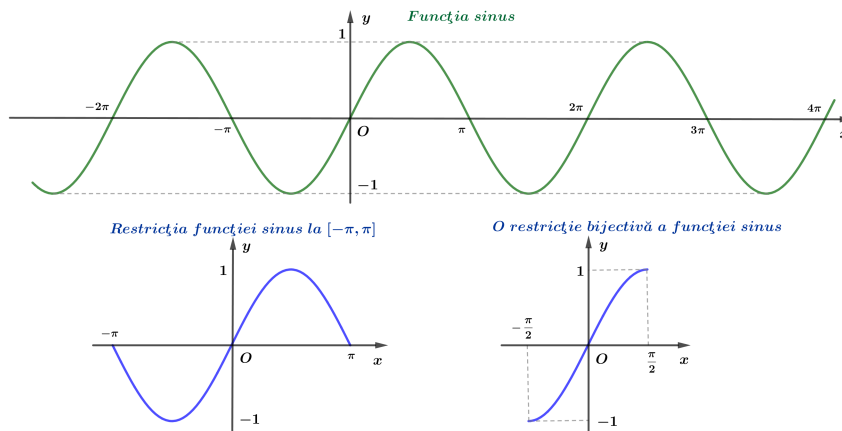
cos și sin sunt *periodice* cu *perioada* 2π : $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$ $(\forall) t \in \mathbb{R}$
 $\sin(t + 2k\pi) = \sin t$ $(\forall) k \in \mathbb{Z}$

cos : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este o funcție *pară*, adică $\cos(-t) = \cos t$.

Funcția cos este *pozitivă* în cadranele I și IV, resp. *negativă* în II și III.

sin : $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ este o funcție *impară*, adică $\sin(-t) = -\sin t$.

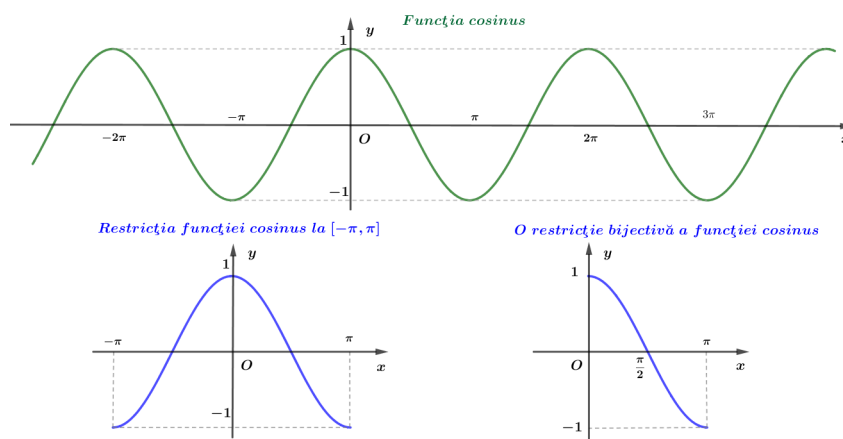
Funcția sin este *pozitivă* în cadranele I și II resp. *negativă* în III și IV.



Tabelul de valori al funcțiilor sin și cos

$^\circ$	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

°	180	210	225	240	270	300	315	330	360
rad	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Proprietățile funcțiilor tg și ctg

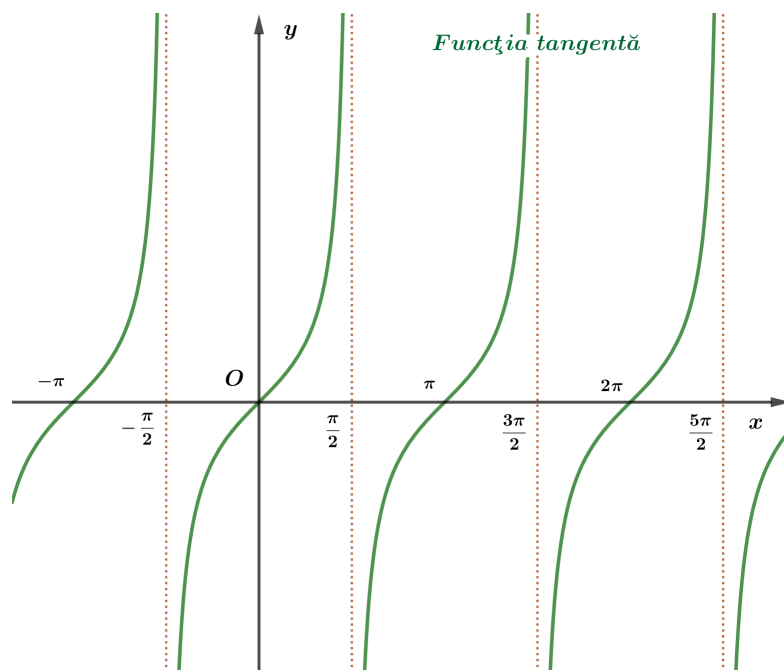
$$\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t \quad (\forall) t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\operatorname{ctg}(t + k\pi) = \operatorname{ctg} t \quad (\forall) t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție *impară*: $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$

$\operatorname{ctg} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție *impară*: $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$.

Funcțiile tg și ctg sunt *pozitive* în I și III resp. *negative* în II și IV.

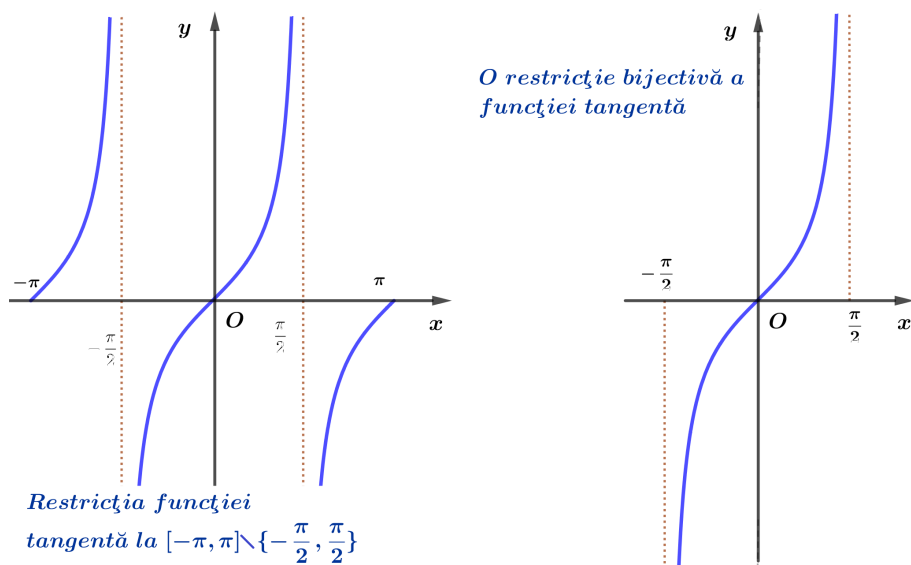


Dreptele $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt asimptote verticale la graficul funcției tangentă.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = +\infty, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} t = -\infty.$$

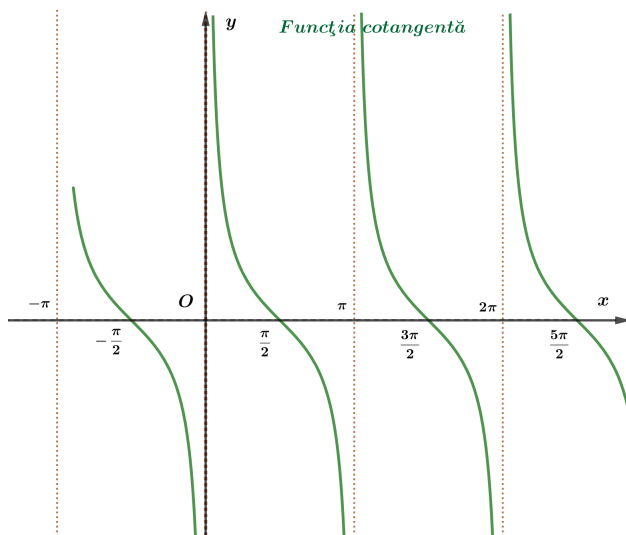
Dreptele $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt asimptote verticale la graficul funcției cotangentă.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \operatorname{ctg} t = +\infty, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \pi \\ t < \pi}} \operatorname{ctg} t = -\infty.$$



Tabelul de valori al funcțiilor tg și ctg

$^{\circ}$	0	30	45	60	90	120	135	150	180
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty -\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$-\infty +\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty +\infty$



Relații între funcțiile trigonometrice

Formule fundamentale

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad ; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \quad ; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} .$$

Funcțiile trigonometrice ale complementului

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t \quad ; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t \quad ; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t \quad ; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t . \end{aligned}$$

Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de arce

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b; \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b; \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b; \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b; \\ \operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}; \quad \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \end{aligned}$$

Funcțiile trigonometrice ale dublului și triplului unui arc

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \cos t \sin t; & \sin 3t &= 3 \sin t - 4 \sin^3 t; \\ \cos 2t &= 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t = \cos^2 t - \sin^2 t; & \cos 3t &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t; \\ \operatorname{tg} 2t &= \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}; & \operatorname{tg} 3t &= \frac{3 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^3 t}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 t}. \end{aligned}$$

Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul arcului dublu

$$\sin t = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{2}}; \quad \cos t = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2t}{2}}; \quad \operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2t}{1 + \cos 2t}};$$

Semnul din fața radicalului $\left\{ \begin{array}{l} \text{se stabilește cadrantul ce îl conține pe } t; \\ \text{se alege semnul funcției din cadrantul lui } t. \end{array} \right.$

Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice

$$\sin t = \frac{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}; \quad \cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}; \quad \operatorname{tg} t = \frac{2\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$$

Transformarea sumei/diferenței în produs

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}; & \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}; \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}; & \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}; \\ \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}; & \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q &= \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}. \end{aligned}$$

Transformarea produsului în sumă/diferență

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b); \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) + \frac{1}{2} \cos(a+b); \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b). \end{aligned}$$

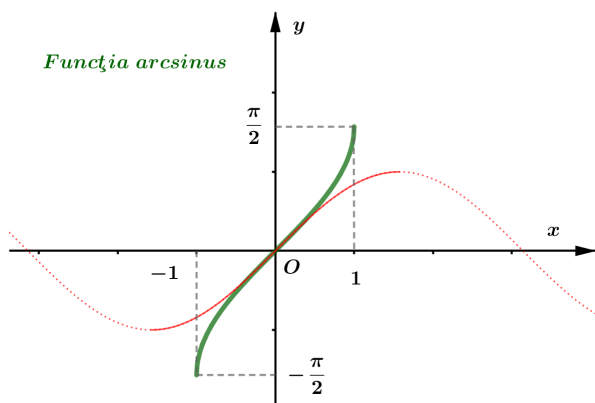
Funcțiile trigonometrice inverse

Restricția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\arcsin a =$ "arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ al cărui sinus este a " ($-1 \leq a \leq 1$)

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y$ $x \in [-1, 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

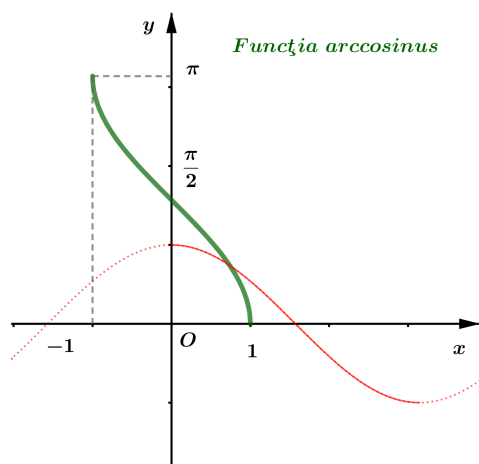
(arcsin este impară)

Restricția $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\arccos a =$ "arcul cuprins între 0 și π al cărui cosinus este a " ($-1 \leq a \leq 1$)

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$	$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y$
$x \in [-1, 1]$	$y \in [0, \pi]$



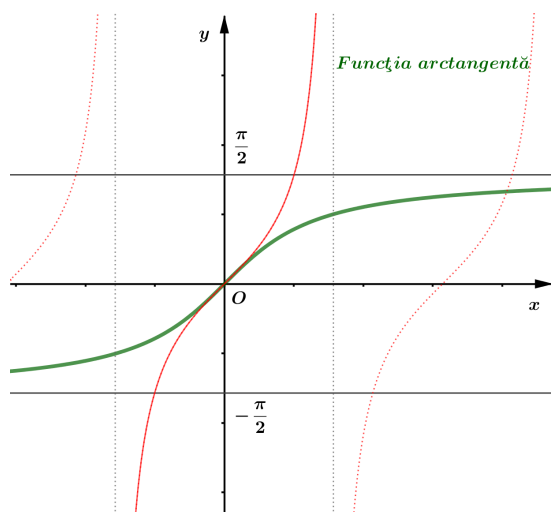
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

Restricția $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă (deci inversabilă).

Definiție

$\operatorname{arctg} a =$ "arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$ a cărui tangentă este a " ($a \in \mathbb{R}$)

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$
$x \in \mathbb{R}$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

(arctg este impară)

Dreptele $y = -\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{\pi}{2}$ sunt asimptote orizontale la graficul funcției arctangentă.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Relații remarcabile între funcțiile trigonometrice inverse

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1])$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}}$$

Ecuțiile trigonometrice elementare

1. Ecuația $\sin x = a$ are soluție d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\left\{(-1)^k \arcsin a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

În particular, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Ecuația $\cos x = a$ are soluție d.d. $a \in [-1, 1]$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\{\pm \arccos a + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Ecuația $\operatorname{tg} x = a$ are soluție $(\forall) a \in \mathbb{R}$.

Mulțimea soluțiilor sale este $\{\operatorname{arctg} a + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

În particular, $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuația liniară

$$a \cos t + b \sin t = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0)$$

are soluții dacă și numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Metode de rezolvare a ecuației liniare

- Substituția $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ conduce la sistemul $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
- Substituția $z = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ conduce la ecuația de gradul al doilea

$$a(1 - z^2) + 2bz = c(1 + z^2).$$

Această metodă are neajunsul de a pierde (eventual) soluțiile de forma $(2k+1)\pi$.

• Metoda unghiului auxiliar constă în transformarea expresiei din membrul stâng al ecuației.

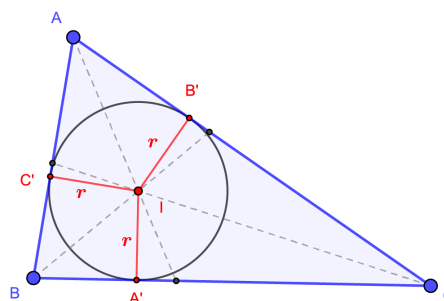
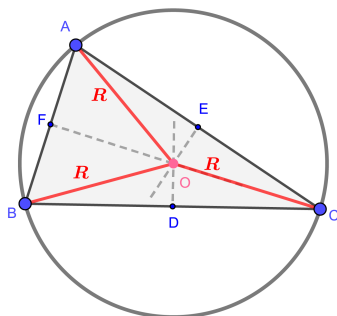
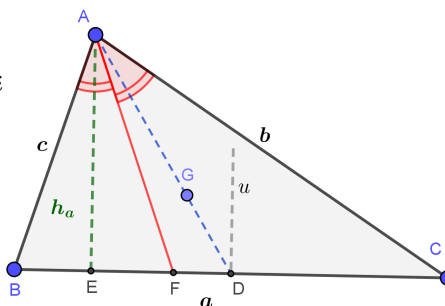
$$a \cos t + b \sin t = c \Leftrightarrow \cos t + \frac{b}{a} \sin t = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \cos t + \operatorname{tg} \varphi \sin t = \frac{c}{a},$$

unde $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numit unghi auxiliar este unicul cu proprietatea $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.
Rezultă imediat

$$\begin{aligned} \cos(t - \varphi) &= \frac{c}{a} \cos \varphi \Leftrightarrow \\ t &\in \left\{ \varphi \pm \arccos \left(\frac{c}{a} \cos \varphi \right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Aplicațiile trigonometriei în geometrie

$AE \perp BC$, h_a – lungimea înălțimii
 $\widehat{BAF} \equiv \widehat{CAF}$, AF – bisectoare
 $BD \equiv DC$, AD – mediană
 G , centrul de greutate
 $AG = \frac{2}{3} AD$ și $GD = \frac{1}{3} AD$
 $|Du \perp BC$, Du – mediatoare



Teorema lui Thales

$$M_2N_2 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_2}{BM_2} = \frac{AN_2}{CN_2}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$$

$$M_1N_1 \parallel BC \Rightarrow \frac{AM_1}{BM_1} = \frac{AN_1}{CN_1}$$

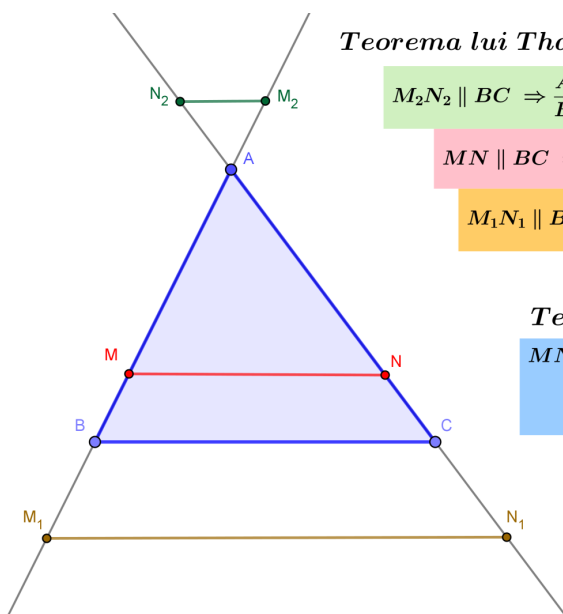
Teorema asemănării

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} (= \rho)$$

ρ , raportul de asemănare

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \rho^2$$



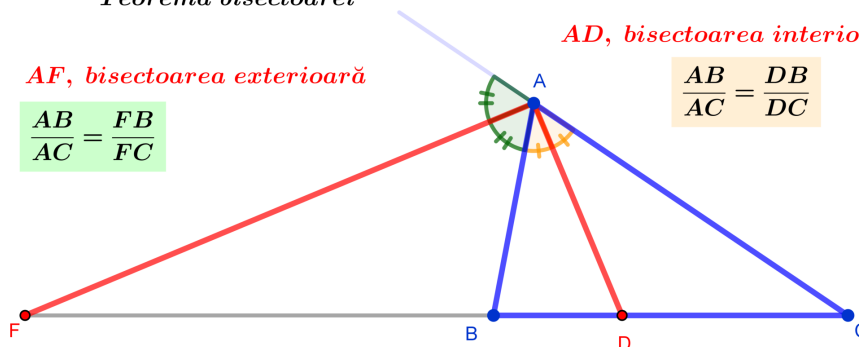
Teorema bisectoarei

AF, bisectoarea exterioară

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{FC}$$

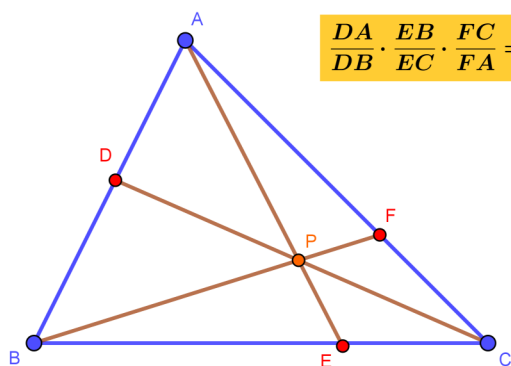
AD, bisectoarea interioară

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$



Teorema lui Ceva

$$\frac{DA}{DB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1$$

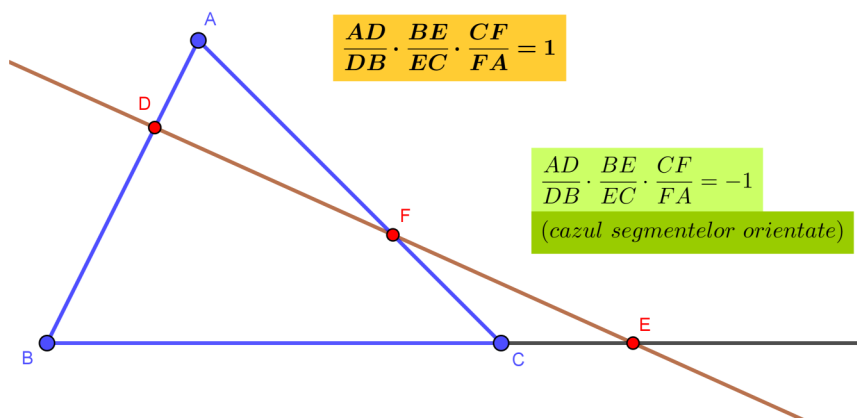


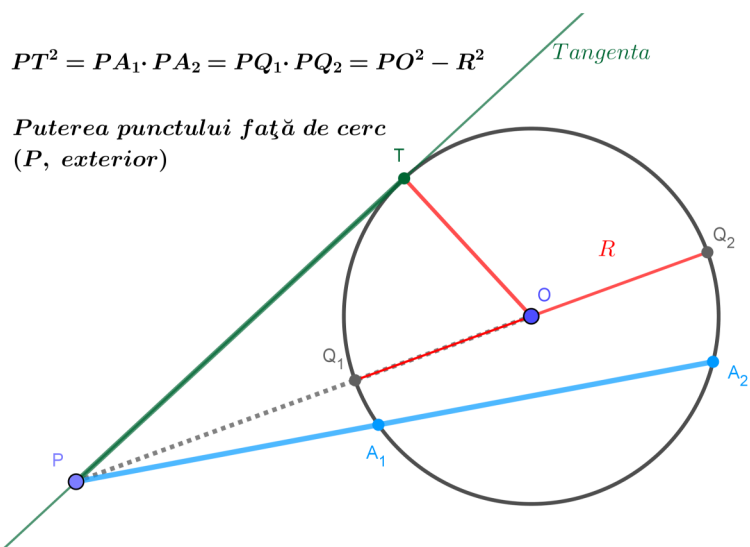
Teorema lui Menelaus

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1$$

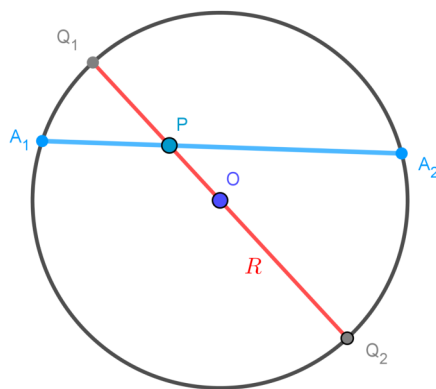
(cazul segmentelor orientate)





Puterea punctului față de cerc
(*P*, interior)

$$PA_1 \cdot PA_2 = PQ_1 \cdot PQ_2 = R^2 - PO^2$$



Teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Aria triunghiului

$$\begin{aligned} S &= \frac{ah_a}{2} &= \frac{bh_b}{2} &= \frac{ch_c}{2} \\ S &= \frac{bc \sin A}{2} &= \frac{ca \sin B}{2} &= \frac{ab \sin C}{2} \\ S &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} &= \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B} &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} \end{aligned}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$S = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formula lui Heron})$$

Numere complexe

Aplicațiile trigonometriei în algebră

$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ -mulțimea numerelor complexe

$z = x + iy$, forma algebrică a numărului complex z

$\operatorname{Re} z = x$, partea reală a numărului complex z

$\operatorname{Im} z = y$, partea imaginară a numărului complex z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, modulul numărului complex z

$\bar{z} = x - iy$, conjugatul numărului complex z

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Numărul complex $z = x + iy$ este *afixul* punctului $M(x, y)$ iar conjugatul său, $\bar{z} = x - iy$, este *afixul* simetricului punctului $M(x, y)$ față de axa Ox .

- se notează prin t unghiul format de dreapta OM ($M \neq O$) cu semiaxa pozitivă Ox (*argumentul* lui z);

- se notează prin r lungimea segmentului OM (*modulul* lui z);

- din definiția funcțiilor trigonometrice rezultă

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (r > 0 \text{ iar } t \in [0, 2\pi)).$$

$$z = r(\cos t + i \sin t) \text{ forma trigonometrică a lui } z$$

Numerele r și t sunt coordonatele polare ale punctului $M(x, y)$: r este *raza polară*, O este *polul* iar t este *argumentul* lui z .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ t &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi \end{aligned}$$

($k = 0$ pt. $M \in \text{Cadr I}$, $k = 1$ pt. $M \in \text{Cadr II} - \text{III}$, $k = 2$ pt. $M \in \text{Cadr IV}$).

Înmulțirea și împărțirea numerelor complexe $z_j = r_j(\cos t_j + i \sin t_j)$, $j = \overline{1, 2}$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)]$$

Formula lui Moivre

$$z = r(\cos t + i \sin t) \Rightarrow z^n = r^n [\cos nt + i \sin nt]$$

Rădăcina complexă de ordinul n a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Elemente de geometrie analitică

Vectorsi

Versorii axelor de coordonate: $\bar{\mathbf{i}} = (1, 0)$ și $\bar{\mathbf{j}} = (0, 1)$.

Vectorul de poziție al punctului $M(x, y)$: $\overline{OM} = x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}}$.

Lungimea vectorului \overline{OM} (distanța dintre M și origine): $\|\overline{OM}\|^2 = x^2 + y^2$
 $OM^2 = x^2 + y^2$.

Vectorul cu originea $T(a, b)$ și extremitatea $M(x, y)$:

$$\overline{TM} = (x - a)\bar{\mathbf{i}} + (y - b)\bar{\mathbf{j}}.$$

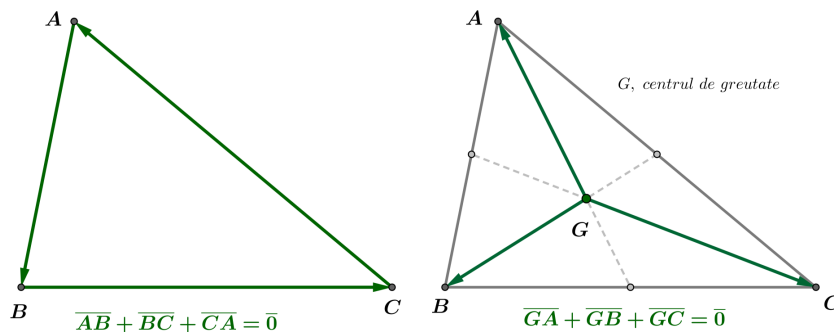
Lungimea vectorului \overline{TM} (distanța dintre punctele $T(a, b)$ și $M(x, y)$):

$$\|\overline{TM}\| = TM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Împărțirea segmentului PQ în raportul $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\overline{PM} = k\overline{MQ}$

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \Rightarrow M(x, y) \text{ cu } x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} \text{ și } y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Caz particular $k = 1$, mijlocul segmentului PQ : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.



Dreapta în plan

1. Ecuația generală explicită : $y = mx + n$
 (m , panta dreptei : $m = tg\varphi$, unde φ este unghiul dintre dreaptă și semiaxa pozitivă Ox).
 (Dreptele paralele cu axa Oy - dreptele verticale - sunt caracterizate prin ecuația $x = p$; panta acestora este infinită.)
2. Ecuația generală implicită : $Ax + By + C = 0$ ($m = -\frac{A}{B}$).
3. Ecuația dreptei prin tăieturi : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (dreapta taie Ox în a și Oy în b).
4. Ecuația dreptei ce trece prin $T(a, b)$ și are panta m : $y - b = m(x - a)$.
5. Ecuația dreptei ce trece prin $T(a, b)$ și $S(u, v)$ TS :
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Panta dreptei TS este $m_{TS} = \frac{v - b}{u - a}$.

Aria triunghiului ABC cu $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{adică modulul determinantului}).$$

A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$.

Distanța de la punctul $T(a, b)$ la dreapta $(d) Ax + By + C = 0$

$$\text{dist}(d, T) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unghiul ascuțit al dreptelor $(d_1) y = m_1x + n_1$ și $(d_2) y = m_2x + n_2$ este ψ cu

$$tg \psi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1} \right|.$$

În cazul dreptelor exprimate explicit (de pantă finită)

$$(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

$$(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \quad (\text{relație utilă la determinarea normalei!}).$$

Cercul

Cercul este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit centru).

1. Ecuația cercului de rază r și centru $C(u, v)$

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

2. Ecuația generală a cercului : $x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

3. Ecuația cercului ce trece prin punctele $A(m, n)$, $B(s, t)$ și $C(p, q)$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ m^2 + n^2 & m & n & 1 \\ s^2 + t^2 & s & t & 1 \\ p^2 + q^2 & p & q & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Intersecția dreptei cu cercul este dată de soluția sistemului:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ y = mx + n \end{cases}.$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

A. Șiruri de numere reale

O funcție reală f definită pe mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} (sau, echivalent, pe o secțiune \mathbb{N}_m a sa ce cuprinde toate numerele naturale ce depășesc o valoare fixată m) se numește *șir de numere reale*. Este convenabilă precizarea șirului prin intermediul termenului său general: $f(n) = a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) utilizând simplu notația $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este *monoton* dacă și numai dacă $\text{sgn}(a_{n+1} - a_n)$ este constant oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n > 0 \quad (\forall) n \in \mathbb{N} &\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textit{strict crescător} \\ a_{n+1} - a_n < 0 \quad (\forall) n \in \mathbb{N} &\Rightarrow (a_n) \text{ este } \textit{strict descrescător} \end{aligned}$$

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este *mărginit* dacă și numai dacă toți termenii săi se găsesc într-un interval mărginit:

$$(\exists) M > 0 \text{ a. î. } (\forall) n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq M .$$

Definiție

Șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este *convergent* dacă există un număr real l cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang n_ε astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|a_n - l| < \varepsilon$; spunem că numărul real l este *limita* șirului cu termenul general a_n și notăm aceasta prin $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sau $a_n \rightarrow l$.

Șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $+\infty$ ($-\infty$) dacă pentru orice număr $M > 0$ se poate preciza un rang n_M astfel încât, pentru orice $n \geq n_M$, are loc inegalitatea $a_n > M$ ($a_n < -M$).

Șirurile care au limita infinită sau cele pentru care limita nu există se numesc *divergente*.

Teoremă

Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri convergente având aceeași limită l iar $(x_n)_n$ este un alt șir care verifică dubla inegalitate:

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ oricare ar fi } n \geq n',$$

atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Consecința 1

Fie $(b_n)_n$ un șir convergent având limita 0 și $(x_n)_n$ un alt șir pentru care există numărul real l cu proprietatea

$$|x_n - l| < b_n \text{ pentru orice rang } n \geq n'$$

atunci și $(x_n)_n$ este convergent iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Consecința 2

Fie șirul $(x_n)_n$ cu termenul general de forma $x_n = a_n \cdot b_n$; dacă $(a_n)_n$ este un șir mărginit iar $(b_n)_n$ unul convergent cu limita 0 atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Proprietățile șirurilor convergente

- i) Limita unui șir convergent de numere reale este unică.
- ii) Orice șir convergent de numere reale este mărginit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow (\exists) A, B \in \mathbb{R} \text{ a.î. } (\forall) n \geq n', a_n \in [A, B].$$

Teoremă

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Reciproca este falsă: șirul $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent (cu limita 0) dar

nu este monoton.

Teoremă

Orice șir monoton are limită, finită sau infinită.

Limite remarcabile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0 \quad (r > 0) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p) = \begin{cases} -\infty, & a_0 < 0 \\ +\infty, & a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{a_0}{b_0}\right), & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^r} = 0 \quad (r > 0) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Șirul cu termenul general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător și mărginit în intervalul $[2, 3]$.

Șirul cu termenul general $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ este crescător și verifică inegalitățile

$$2 < e_n < E_n < e < 3.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Numărul $e \simeq 2,718281\dots$ este baza logaritmului natural: $\ln e = 1$.

Teorema Cauchy-d' Alembert

Fie (a_n) un șir de numere pozitive. Dacă șirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ are limită, atunci șirul $(\sqrt[n]{a_n})_{n \geq 3}$ are limită, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două șiruri de numere reale care verifică următoarele condiții

- (i) șirul (b_n) este strict crescător și nemărginit;
- (ii) raportul $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ are limită (finită sau infinită):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Atunci șirul cu termenul general $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Lema Cesàro-Stolz (cazul $\frac{0}{0}$)

Fie $(a_n), (b_n)$ două șiruri de numere reale care verifică următoarele condiții

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$;
- (ii) șirul (b_n) este strict descrescător;
- (iii) raportul $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ are limită (finită sau infinită):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l.$$

Atunci șirul cu termenul general $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și în plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = [-\infty, \infty]$

Operațiile cu limite sugerează prelungirea operațiilor algebrice din \mathbb{R} la $\overline{\mathbb{R}}$ după cum urmează:

$a + \infty = \infty + a = \infty \quad (\forall) a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty \quad (\forall) a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad (\forall) a \in (0, \infty]$ $a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty \quad (\forall) a \in [-\infty, 0)$	$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad (\forall) a \in \mathbb{R}$ $\frac{a}{+0} = \infty \quad (\forall) a \in (0, \infty]$ $\frac{a}{-0} = -\infty \quad (\forall) a \in (0, \infty]$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$\infty^b = \begin{cases} \infty, & (\forall) b \in (0, \infty) \\ 0, & (\forall) b \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $(-\infty)^{2k} = \infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*$ $(-\infty)^{2k+1} = -\infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}$ $\sqrt[k]{\infty} = \infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*, k > 1$ $\sqrt[2k+1]{-\infty} = -\infty \quad (\forall) k \in \mathbb{N}^*$	$a^\infty = \begin{cases} 0, & (\forall) a \in (0, 1) \\ \infty, & (\forall) a \in (0, \infty] \end{cases}$ $a^{-\infty} = \begin{cases} \infty, & (\forall) a \in (0, 1) \\ 0, & (\forall) a \in (0, \infty] \end{cases}$ $0^\infty = 0$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Cazuri de nedeterminare (operații fără sens)

$\infty + (-\infty)$	$0 \cdot \infty$	$\infty \cdot 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	0^0	∞^0	1^∞
$-\infty + \infty$	$0 \cdot (-\infty)$	$(-\infty) \cdot 0$	$\frac{\infty}{\infty}$			

Exemple

a) De ce $-\infty + \infty$ este operație fără sens?

Dacă $x_n = -n^2 + 1$ și $y_n = 2n^2 + n$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ se află în cazul $-\infty + \infty$ iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + 1) = \infty$.

Dacă $x_n = -n^2 + \frac{1}{n}$ și $y_n = n^2 + 1$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ se află de asemenea în cazul $-\infty + \infty$ dar, de această dată, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right) = 1$.

b) De ce 0^0 este operație fără sens?

Dacă $x_n = \frac{1}{n}$ și $y_n = \frac{1}{n}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n}$ se află în cazul 0^0 iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Dacă $x_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$ și $y_n = \frac{1}{n}$ atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n}$ se află de asemenea în cazul 0^0 dar, de această dată, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n \cdot n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$.

c) De ce 0^∞ nu reprezintă un caz exceptat?

Oricare două șiruri (x_n) cu $x_n > 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, respectiv (y_n) cu $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n}$ există și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n \cdot \ln x_n} = e^{\infty \cdot \ln(0+0)} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^{-\infty} = 0.$$

B. Limite de funcții și funcții continue

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un *punct de acumulare* al acesteia adică un punct pentru care există șiruri $(x_n)_n$ din D , $x_n \neq a$ a.î.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are limita l (finită sau infinită) în punctul a dacă pentru orice șir $(x_n)_n$ din D , $x_n \neq a$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ este verificată egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. Notăm aceasta prin $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Limita unei funcții într-un punct (de acumulare al domeniului de definiție), dacă există, este unică.

Dacă există două șiruri $(x'_n)_n$ și $(x''_n)_n$ în D , $x'_n, x''_n \neq a$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = a$ dar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ atunci funcția f nu are limită în punctul a .

Exemple

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nu există deoarece pentru șirurile $(n\pi)_n$ și $\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right)_n$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (4n+1)\frac{\pi}{2} = \infty$, șirurile valorilor funcției au limite diferite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, în timp ce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există deoarece pentru șirurile $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_n$ și $\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)_n$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(4n+1)\pi} = 0$, șirurile valorilor funcției au limite diferite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$, în timp ce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{(4n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1.$$

Limite laterale:

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \stackrel{not}{=} f(a-0)$ (limita la stânga) și $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \stackrel{not}{=} f(a+0)$ (limita la dreapta).

Dacă f are limite laterale egale $f(a-0) = f(a+0) = l$ atunci f are limită în a și $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Dacă f are limite laterale diferite $f(a-0) \neq f(a+0)$ atunci f nu are limită în a ($\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nu există).

Teoremă

Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții, a un punct de acumulare al domeniului D , V_a o vecinătate a lui a și l un număr real.

Dacă i) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ atunci f are limită în a și
 ii) $|f(x) - l| \leq |g(x)| \quad (\forall) x \in V_a \cap D$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Exemplu

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ deoarece } \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|.$$

Limite remarcabile

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p) = a_0 \cdot (\pm\infty)^p$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} 0, & p < q \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q \\ \frac{a_0}{b_0} (\pm\infty)^{p-q}, & p > q \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x a^{-x} = 0 \quad (a > 1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^r}{\ln x} = 0 \quad (r > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și $a \in D$ un *punct de acumulare* al domeniului de definiție.

Definiție

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *continuă* în a dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ există și coincide cu valoarea funcției în a , mai precis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *continuă pe mulțimea* $D_0 \subset D$ dacă este continuă în fiecare punct al mulțimii D_0 .

Punctele de acumulare ale domeniului în care funcția nu este continuă se numesc *puncte de discontinuitate*.

Funcția f prezintă o *discontinuitate de speța întâi* în $x = a$ dacă are limite laterale finite și diferite în a ($f(a-0) \neq f(a+0)$) sau acestea sunt finite egale dar diferite de $f(a)$. Orice punct de discontinuitate care nu este de speța întâi este clasificat de speța a doua.

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este discontinuă în $a = 0$; punctul $a = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

Prelungirea prin continuitate

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct de acumulare al domeniului D . Dacă

- i) a este situat în afara domeniului de definiție D și
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} l$ există, finită

atunci f se poate extinde în mod natural la $D \cup \{a\}$ prin:

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = a \end{cases}.$$

Funcția \tilde{f} se numește *prelungirea prin continuitate a lui f la $D \cup \{a\}$* .

Proprietăți ale funcțiilor continue

- Orice funcție continuă pe un interval mărginit și închis este mărginită și își atinge marginile. Mai precis, oricare ar fi $x \in [a, b]$ toate valorile $f(x)$ se găsesc în intervalul $[m, M]$ (m și M reprezintă minimumul, respectiv maximumul funcției) și în plus, există $x_m \in [a, b]$ și $x_M \in [a, b]$ așa încât $m = f(x_m)$ și respectiv, $M = f(x_M)$.

• Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și ia valori de semne diferite în capetele intervalului $[a, b]$ atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b) .

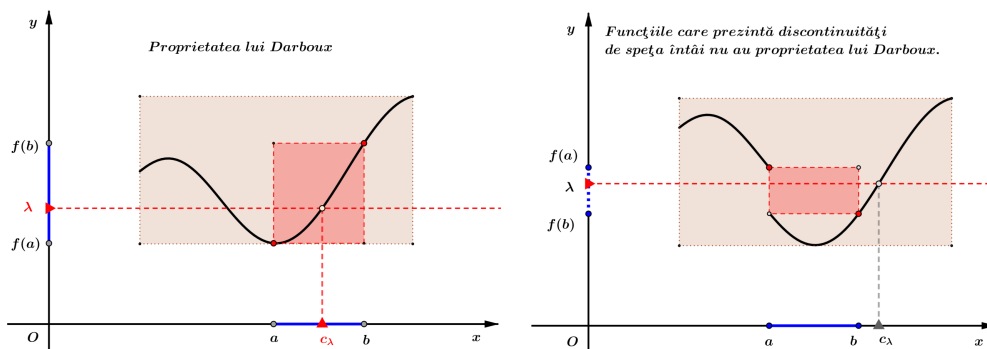
• Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I atunci imaginea acestuia $J = f(I) (= \text{Im}(f))$ este de asemenea un interval.

Observații asupra proprietății lui Darboux

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are *proprietatea lui Darboux* dacă oricare ar fi $a, b \in I$ ($a < b$) și λ situat între $f(a)$ și $f(b)$ există cel puțin un punct $c_\lambda \in (a, b)$ pentru care $\lambda = f(c_\lambda)$.

Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.

Funcțiile discontinue care prezintă o discontinuitate de speța întâi nu au proprietatea lui Darboux.

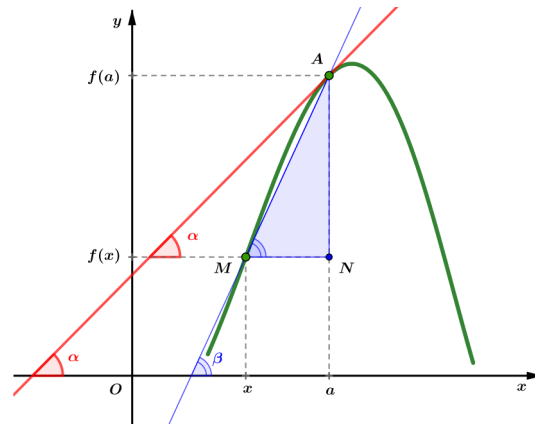


Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux deși este discontinuă (discontinuitatea este de speța a doua!).

C. Funcții derivabile

Definiție

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este *derivabilă* în punctul a (situat în intervalul I) dacă limita $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{not}}{=} f'(a)$ există și este finită.



Interpretarea geometrică a derivatei

Din punct de vedere geometric, raportul $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ este tangenta unghiului \widehat{AMN} (vezi figura) și urmare a trecerii la limită după $x \rightarrow a$, $f'(a)$ nu reprezintă altceva decât panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$. Cu alte cuvinte, $f'(a)$ este tangenta (trigonometrică a) unghiului pe care dreapta tangentă în punctul A îl face cu semiaxa pozitivă Ox . Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă a este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Uneori, pentru a pune în evidență și variabila independentă a funcției, se utilizează notațiile

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \quad , \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

O interpretare fizică a derivatei

Un mobil aflat în mișcare rectilinie parcurge în t unități de timp (secunde / minute / ore) distanța $s(t)$ (măsurată în metri / kilometri) sau, cu alte cuvinte, distanța parcursă de mobil poate fi privită ca o funcție $s : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă s este derivabilă pe $[0, T]$, atunci viteza sa la momentul t se definește prin $v(t) = s'(t)$, iar dacă și v este o funcție derivabilă atunci accelerația mobilului la momentul t este $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Condiția necesară de derivabilitate

Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct. Reciproca afirmației este falsă: spre exemplu funcția modul este continuă în origine fără a fi însă derivabilă.

Cum se studiază derivabilitatea unei funcții într-un punct?

- se verifică proprietatea de continuitate în punctul precizat (dacă funcția este discontinuă studiul derivabilității nu are sens),
- se calculează derivatele laterale

$$f'_s(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{și} \quad f'_d(a) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

Dacă derivatele laterale în a există, sunt finite și egale atunci funcția f este derivabilă în a . (Pentru punctele situate la extremitățile -finite- ale domeniului de definiție este suficient ca una singură din derivatele laterale să existe și să fie finită). În toate celelalte situații, funcția nu este derivabilă în punctul studiat.

Tabelul derivatelor

Identitățile din tabelele ce urmează se deduc cu formula

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ce rezultă din definiție prin schimbarea de variabilă $x - a = h$.

1.	$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(n \in \mathbb{N})$
	$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \in \mathbb{N})$
		$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	
	$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^r$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(r \in \mathbb{R})$
		$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
		$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	

2.	$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
		$(e^x)' = e^x$
3.	$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$
		$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
		$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$
4.	$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
5.	$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
6.	$f : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
		$(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
7.	$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
8.	$f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1)$
9.	$f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], f(x) = \arccos x$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1)$
10.	$f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$

Proprietăți ale funcțiilor derivabile

$$\begin{aligned}
 (cf)'(x) &= cf'(x) && c = \text{constantă} \\
 (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\
 (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0 \\
 \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{-g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0 \\
 (f \circ u)'(x) &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\
 (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} && y = f(x), \exists f^{-1} \text{ și } f'(x) \neq 0
 \end{aligned}$$

Teoremă (derivarea funcției inverse) Fie $f : I \rightarrow J$ o funcție continuă și bijectivă între două intervale.

Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$ atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și, în plus, $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Prin urmare, oricărui punct x din intervalul I îi corespunde un unic punct $y = f(x)$ în intervalul J și reciproc, oricărui punct y din J îi corespunde în mod unic $x = f^{-1}(y)$ din I ; dacă f este continuă pe I și derivabilă în punctul x_0 , cu derivata $\frac{df}{dx}(x_0)$ nenulă, atunci funcția inversă f^{-1} este și ea derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și derivata sa în y_0 , $\frac{df^{-1}}{dy}(y_0)$, se calculează cu ajutorul derivatei lui f în x_0 după cum urmează

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x_0)}.$$

Această reformulare a egalității din enunțul teoremei este mult mai precisă deoarece evidențiază variabilele de derivare: f se derivează în raport cu $x \in I$ pe când $g = f^{-1}$, se derivează în raport cu $y \in J$.

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe intervalul I atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe I .

Derivate de ordin superior

O funcție reală este de clasă \mathcal{C}^1 pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ dacă este derivabilă în fiecare punct din I și în plus, derivata sa f' este continuă pe I . Mulțimea funcțiilor de clasă \mathcal{C}^1 pe I se notează cu \mathcal{C}_I^1 iar \mathcal{C}_I^0 desemnează în mod natural clasa funcțiilor continue pe intervalul I .

În general, pentru un indice $n \in \mathbb{N}$ fixat, se spune că f este o funcție de clasă \mathcal{C}^n (notație $f \in \mathcal{C}_I^n$) dacă f e derivabilă de n ori pe I cu derivata $f^{(n)}$ continuă.

Funcțiile elementare cum ar fi e^x , $\cos x$, $\sin x$, polinoamele de orice grad, logaritmul (indiferent de bază) sunt funcții de clasă \mathcal{C}^∞ pe domeniul lor maxim de definiție I .

Tabelul derivatelor de ordinul n

$(x^p)^{(n)}$	$= p(p-1) \cdots (p-n+1) x^{p-n}$	$p \geq n, (p \in \mathbb{N})$
	$= 0$	$p < n, (p \in \mathbb{N})$
$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}$	$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$	$(x \neq 0)$
$(e^x)^{(n)}$	$= e^x$	
$(\sin x)^{(n)}$	$= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$(\cos x)^{(n)}$	$= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$	$(n \in \mathbb{N})$
$((1+x)^r)^{(n)}$	$= r(r-1) \cdots (r-n+1) (1+x)^{r-n}$	$(x > -1, r \in \mathbb{R})$

Aplicațiile derivatei

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct al domeniului de definiție D .

Punctul a este *punct de extrem local* pentru f dacă există o vecinătate a sa V_a în care creșterea funcției $f(x) - f(a)$ are semn constant; cu alte cuvinte, există $r > 0$ a.î.

$$\operatorname{sgn}(f(x) - f(a)) = \operatorname{const}. \quad (\forall) x \in (a-r, a+r) \cap D.$$

Mai precis,

$$\begin{array}{ll} a \text{ este } \textit{minim local} & \text{d.d. } f(x) - f(a) \geq 0, \\ a \text{ este } \textit{maxim local} & \text{d.d. } f(x) - f(a) \leq 0 \end{array} \quad (\forall) x \in (a-r, a+r) \cap D.$$

Teorema lui Fermat

Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și a un punct din domeniul de definiție D .

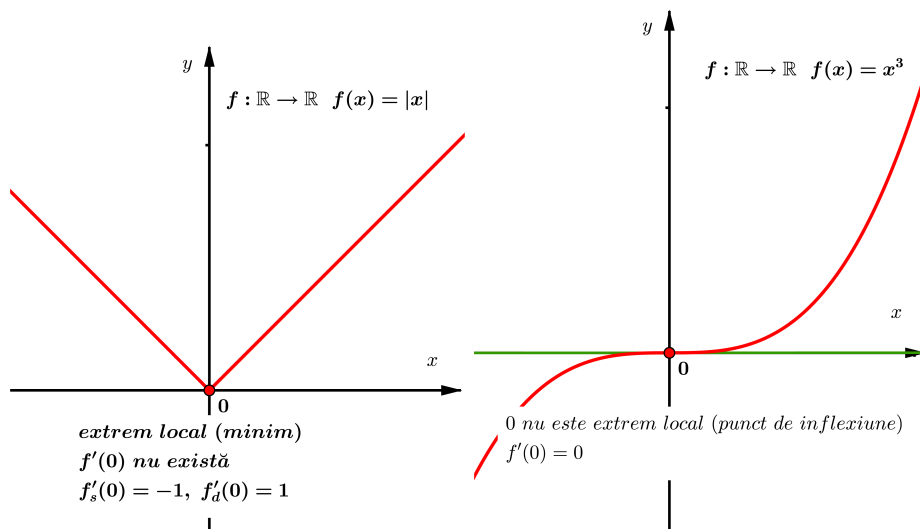
$$\text{Dacă } \begin{cases} a \text{ este interior lui } D \\ a \text{ este punct de extrem local} \\ f \text{ este derivabilă în } a \end{cases} \quad \text{atunci } f'(a) = 0.$$

Interpretarea geometrică

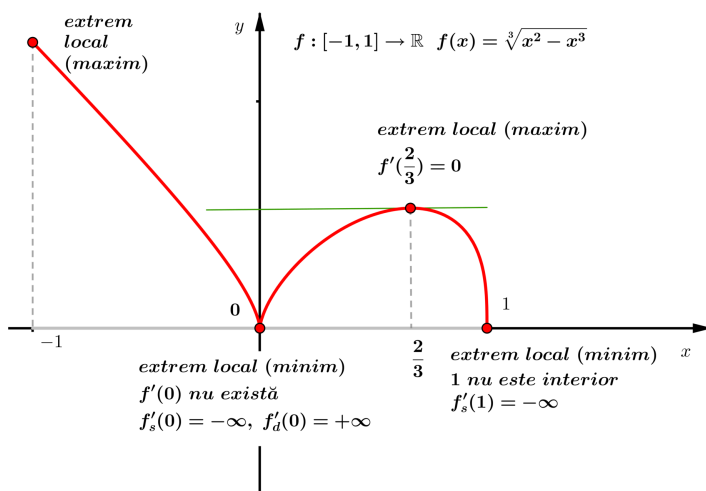
Tangenta la graficul funcției într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de definiție al unei funcții derivabile, este paralelă cu axa Ox .

Punctul x_0 este un *punct critic (staționar)* al funcției derivabile f dacă $f'(x_0) = 0$, deci conform teoremei lui Fermat, punctele critice sunt posibile puncte de extrem ale funcției.

Astfel, este posibil ca x_0 să fie punct de extrem local, dar funcția f să nu fie derivabilă în x_0 , respectiv ca $f'(x_0) = 0$, dar x_0 să nu fie punct de extrem local al funcției f :



În plus, capetele închise ale domeniului de definiție sunt puncte de extrem local:



Teorema lui Rolle

$$\text{Dacă } \begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \\ f(a) = f(b) \end{cases} \text{ atunci } (\exists) c \in (a, b) \text{ a.î. } f'(c) = 0.$$

În particular, dacă $f(a) = f(b) = 0$, teorema afirmă că între două rădăcini ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a derivatei.

Reciproc, între două rădăcini consecutive ale derivatei, dacă funcția își schimbă semnul, există o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

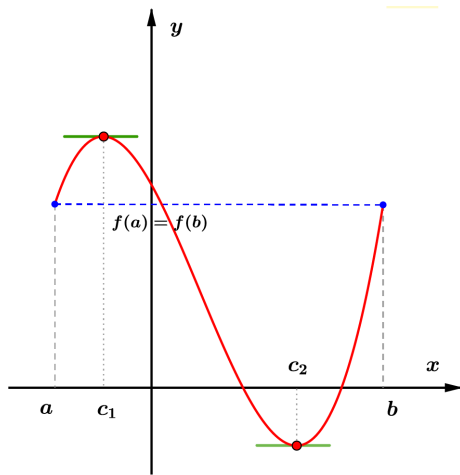
Aplicație

Separarea rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ cu ajutorul șirului lui Rolle

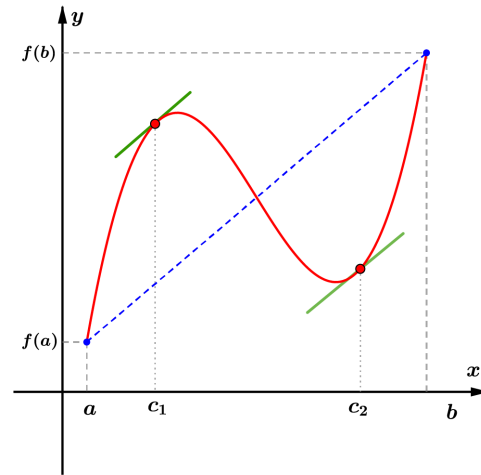
Dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și derivabilă (extremitățile intervalului pot fi infinite) și $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ sunt rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ atunci orice schimbare a semnelui în șirul lui Rolle

x	a	c_1	c_2	\dots	c_k	b
$\text{sgn}(f(x))$	$\text{sgn}(f(a))$	$\text{sgn}(f(c_1))$	$\text{sgn}(f(c_2))$		$\text{sgn}(f(c_k))$	$\text{sgn}(f(b))$

indică intervalele ce conțin câte o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.



Teorema lui Rolle



Teorema lui Lagrange

Teorema lui Lagrange

Dacă $\begin{cases} f \text{ este continuă pe } [a, b] \\ f \text{ este derivabilă pe } (a, b) \end{cases}$ atunci $(\exists) c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretarea geometrică

Există cel puțin un punct $(c, f(c))$, situat pe graficul funcției, în care tangenta este paralelă cu coarda ce unește extremitățile $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Consecințe

Orice funcție derivabilă pe un interval cu derivata pozitivă (negativă) este crescătoare (descrescătoare) pe acel interval.

Dacă derivata unei funcții este nulă pe un interval atunci funcția este constantă pe acel interval:

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe intervalul $I \subset D$

$$f'(x) = 0 \quad (\forall) x \in I \Rightarrow f(x) = c \text{ (constantă) pe } I.$$

Teorema lui Cauchy

Dacă $\begin{cases} f, g \text{ sunt continue pe } [a, b] \\ f, g \text{ sunt derivabile pe } (a, b) \\ g'(x) \neq 0 \text{ pe } (a, b) \end{cases}$ atunci $(\exists) c \in (a, b)$ a.î.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Limite de funcții (completări)

Calculul limitelor de funcții conduce cel mai adesea la situații exceptate de la regulile de calcul algebric, cum ar fi $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, și este nevoie de multă îndemânare pentru evitarea lor. În condiții rezonabile de derivabilitate a termenilor, *regula lui l'Hospital* poate fi de mare ajutor dacă este aplicată corect și cu discernământ. Pe scurt, *regula lui l'Hospital* reduce calculul limitei

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (a , finit sau infinit) aflată într-una din situațiile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, la calculul limitei (uneori mai simple) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Mai precis, dacă $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (finit sau infinit) atunci și $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Altfel spus,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

dacă limita raportului derivatelor există.

Exemple

a) $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 + x - 5)}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$, nedeterminare.

Se calculează

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\ln(x^2 + x - 5))'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x(x^2 + x - 5)} = \frac{5}{4}.$$

Conform regulii lui l'Hospital rezultă $L = \frac{5}{4}$.

b) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \sin^2 x^2}{\ln(1 + \sin^4 x)} = \frac{0}{0}$, nedeterminare.

Limita raportului derivatelor este dificil de calculat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x^4 + \sin^2 x^2))'}{(\ln(1 + \sin^4 x))'} = \dots \text{ (dar nu imposibil de calculat).}$$

Este recomandată metoda directă, bazată pe utilizarea limitelor remarcabile evidențiate mai sus:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + \sin^2 x^2}{\ln(1 + \sin^4 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^4 x} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sin x^2}{x^2}\right)^2}{\frac{\ln(1 + \sin^4 x)}{\sin^4 x}} = 1 \cdot \frac{1 + 1^2}{1} = 2.$$

c) $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$, nedeterminare. (Am văzut că $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.)

Limita raportului derivatelor nu există

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}}{\cos x},$$

deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există.

Totuși limita există:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

d) $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\infty}{\infty}$, nedeterminare.

Utilizarea (fără discernământ) a regulii lui l'Hospital nu duce la niciun rezultat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(\sqrt{x^2 + 1})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Totuși limita poate fi calculată cu metoda factorului forțat:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Ghid pentru reprezentarea grafică a funcțiilor

Etapele reprezentării grafice a funcțiilor reale de variabilă reală
 $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dots$

1. Stabilirea domeniului maxim de definiție E

Domeniul maxim de definiție E este alcătuit din toate numerele reale x pentru care expresia $f(x)$ are sens și este finită: $E = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Mulțimea E este de regulă o reuniune de intervale și eventual, de puncte "izolate".

2. Limitele funcției la extremitățile (finite și infinite) ale intervalelor din E

Domeniului de continuitate: $E_c = \{x \mid x \in E \text{ și } f \text{ este continuă în } x\}$

este o reuniune de intervale deschise sau închise.

Asimptote verticale:

a , extremitate de interval al domeniului E_c , $a \neq \pm\infty$;

$x = a$ este *asimptotă verticală* dacă cel puțin una dintre limitele laterale

$f(a-0)$ sau $f(a+0)$ este infinită.

Asimptote oblice (sau, în particular, orizontale):

$y = n$ este *asimptotă orizontală* dacă $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n$ sau $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = n$;

$y = mx + n$ este *asimptotă oblică* dacă $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ este infinită sau nu există, dar $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ și $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$ există și sunt finite.

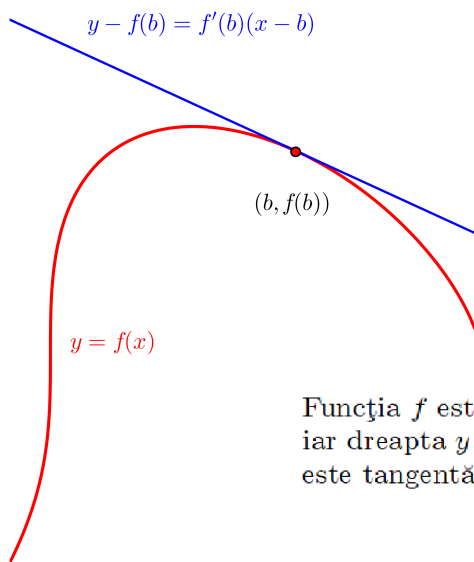
3. Studiul derivatei întâi

Calculul derivatei întâi $f'(x)$.

Domeniului de derivabilitate este domeniul maxim de existență al expresiei $f'(x)$: $E_d = \{x \mid x \in E_c \text{ și } f \text{ este derivabilă în } x\}$.

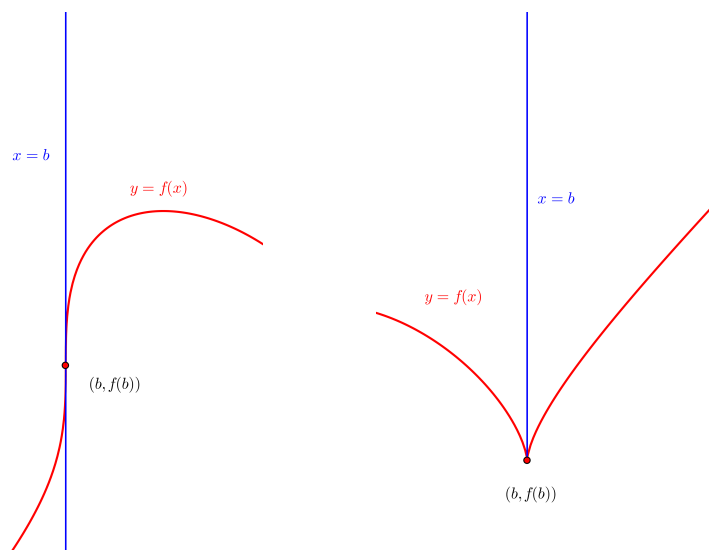
Practic, pentru precizarea domeniului E_d , se calculează derivatele laterale $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ în acele puncte b ale domeniului de continuitate E_c în care există dubii asupra existenței expresiei $f'(x)$.

- Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt finite și egale atunci b aparține domeniului de derivabilitate E_d .



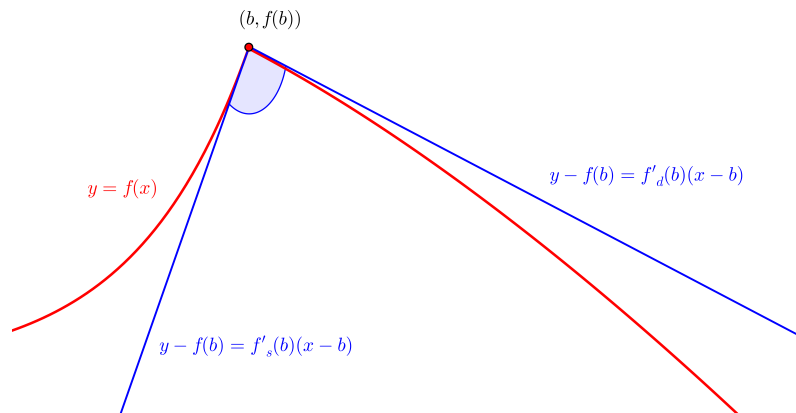
• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt infinite, egale atunci f nu este derivabilă în b , $(b, f(b))$ este un *punct de inflexiune cu tangentă verticală* al graficului iar dreapta $x = b$ este tangentă verticală.

• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt infinite, diferite atunci f nu este derivabilă în b , $(b, f(b))$ este un *punct de întoarcere* al graficului iar semidreapta $x = b$ (cu $y \geq f(b)$ sau cu $y \leq f(b)$), după caz) este semitangentă verticală.



• Dacă $f'_s(b)$ și $f'_d(b)$ sunt finite și diferite sau cel puțin una dintre derivatele

laterale este finită atunci funcția **nu** este derivabilă în b , $(b, f(b))$ este un *punct unghiular* al graficului.



Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$. Rădăcinile derivatei sunt *punctele critice* sau *staționare* ale funcției.

Importanța studiului amănunțit al derivatei întâi constă în următoarele:

-*punctele de extrem* ale funcției se găsesc printre punctele sale critice, unghiulare sau de întoarcere;

-*semnul* derivatei întâi oferă informații despre intervalele de monotonie:

$$f'(x) \geq 0 \text{ pe intervalul } I \subset E_d \Rightarrow f \text{ este crescătoare pe } I,$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ pe intervalul } I \subset E_d \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } I.$$

4. Studiul derivatei a doua

Calculul derivatei a doua $f''(x)$.

Precizarea domeniului maxim de existență al expresiei $f''(x)$.

Se determină rădăcinile ecuației $f''(x) = 0$.

Punctele de inflexiune ale funcției se găsesc printre rădăcinile derivatei a doua. Semnul derivatei a doua stabilește intervalele pe care funcția este concavă sau convexă:

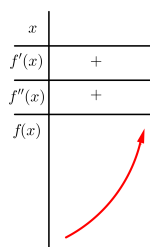
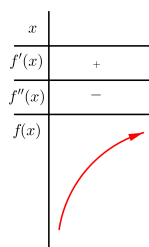
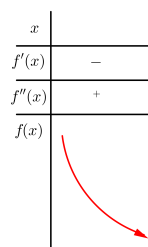
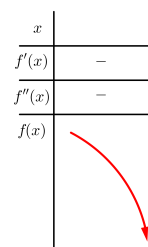
$$f''(x) \geq 0 \text{ pe intervalul } I \Rightarrow f \text{ este convexă pe } I,$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ pe intervalul } I \Rightarrow f \text{ este concavă pe } I.$$

Dacă expresia $f'(x)$ are o formă complicată (calculul lui $f''(x)$ ia mult timp) sau ecuația $f''(x) = 0$ este dificil de rezolvat, se poate renunța la studiul derivatei a doua.

5. Tabelul de variație al funcției

x	Se așază crescător punctele importante determinate mai sus.
$f'(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidențiat la rubrica x .
$f''(x)$	Se studiază semnul pe fiecare interval evidențiat la rubrica x .
$f(x)$	Pe fiecare interval se trasează săgețile ce indică monotonia și forma ramurilor ce alcătuiesc graficul funcției, respectând următoarele reguli:

Crescătoare,
convexăCrescătoare,
concavăDescrescătoare,
convexăDescrescătoare,
concavă

6. Valori importante

Se calculează coordonatele punctelor în care funcția nu este continuă, nu este derivabilă, ale punctelor critice și ale punctelor de inflexiune. Valorile găsite se trec în tabelul de variație al funcției.

Se calculează coordonatele punctelor de intersecție cu axele:

$$\cap Ox \quad y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (\text{se rețin doar valorile } x \in E).$$

$$\cap Oy \quad x = 0 \Rightarrow y = f(0) \quad (\text{doar dacă } 0 \in E).$$

7. Reprezentarea grafică

- se trasează axele de coordonate,
- se stabilește unitatea de măsură pe fiecare axă în parte,
- se trasează asimptotele și tangentele verticale,
- se așază pe grafic punctele importante ale căror coordonate au fost calculate mai sus,
- se trasează graficul funcției conform tabelului de variație.

8. *Observații*

Se studiază eventualele simetrii ale graficului.

• Dacă f este o funcție *pară*, adică $f(-x) = f(x) \quad (\forall) x \in E$, atunci graficul funcției este *simetric față de axa Oy*.

• Dacă f este o funcție *impară*, adică $f(-x) = -f(x) \quad (\forall) x \in E$, atunci graficul funcției este *simetric față de origine*.

Se studiază periodicitatea.

Funcția f este *periodică cu perioada T* dacă $f(x+T) = f(x) \quad (\forall) x \in E$; cel mai mic număr pozitiv T cu această proprietate (dacă există) se numește *perioada principală*.

Se precizează imaginea funcției: $\text{Im}f = \{y \mid (\exists) x \in E \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

D. Integrabilitate și aplicații*Definiție*

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, interval) este *primitivabilă* dacă există o funcție $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, numită *primitiva* lui f , având proprietățile:

- (i) F este derivabilă pe D
- (ii) $F'(x) = f(x), (\forall)x \in D$.

Mulțimea tuturor primitivelor lui f este notată prin simbolul " $\int f(x)dx$ " ce se citește "*integrala nedefinită a lui f în raport cu x*". Întrucât orice două primitive ale aceleiași funcții primitivabile diferă printr-o constantă (f este definită pe un interval!), pentru determinarea integralei nedefinite este suficientă găsirea unei singure primitive F . Are loc egalitatea de mulțimi

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

unde \mathcal{C} reprezintă mulțimea funcțiilor reale constante definite pe D .

Proprietatea (ii) din definiție permite alcătuirea unui tabel cu integrale nedefinite a cărui consultare atentă reprezintă o primă metodă de primitivare. În plus, din (ii) rezultă și proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

oricare ar fi $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, primitivabile și α, β numere reale.

Tabelul primitivelor elementare²

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}_+^*, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + \mathcal{C}, \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}, \quad \int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \mathcal{C} \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \mathcal{C} \quad x \in I \subset (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C} \quad x \in I \subset (-a, a)$$

² I reprezintă intervalul de integrare.

În practică își dovedesc utilitatea și următoarele trei formule de integrare ce se pot verifica imediat prin derivarea membrului drept:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + \mathcal{C}; \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + \mathcal{C};$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + \mathcal{C}.$$

Problema A

Cum se poate decide dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, interval) este sau nu primitivabilă?

Direct, problema poate fi rezolvată intuind (de exemplu cu ajutorul tabelului) forma pe care ar trebui s-o aibă primitiva F și verificând dacă sunt sau nu îndeplinite condițiile (i) și (ii) din definiție.

Posibilitatea rezolvării indirecte a problemei **A** se bazează pe următoarele rezultate:

- Orice funcție reală continuă pe intervalul $D \subset \mathbb{R}$ este primitivabilă pe D .
- Dacă f este o funcție reală primitivabilă pe intervalul $D \subset \mathbb{R}$ atunci din identitatea $f = F'$ rezultă imediat că f are proprietatea lui Darboux pe D .

a) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe intervalul D atunci f nu este primitivabilă pe D .

b) Dacă f are în punctul x_0 al intervalului D o discontinuitate de speța I (adică limitele laterale $f(x_0 - 0)$ și $f(x_0 + 0)$ sunt finite dar diferite) atunci f nu este primitivabilă pe D .

Astfel, pentru a dovedi primitivabilitatea unei funcții este suficient (nu și necesar) să se verifice continuitatea sa, ceea ce este mult mai comod în comparație cu verificarea condițiilor (i) și (ii) ale definiției.

Pentru a dovedi neprimitivabilitatea unei funcții este suficient (nu și necesar) să se verifice că f nu posedă proprietatea lui Darboux, adică faptul că există un interval $D_0 \subset D$ a cărui imagine prin f ,

$$f(D_0) = \{y \mid y \in \mathbb{R}, (\exists)x_0 \in D_0 : y = f(x_0)\},$$

nu este interval.

Problema B

Cum poate fi determinată integrala nedefinită $\mathcal{I} = \int f(x)dx$ a funcției primitivabile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$, interval)?

O primă metodă o constituie, așa cum remarcăm înainte, consultarea atentă a tabelului cu primitivele unor funcții elementare. Descriem în continuare câteva procedee de calcul a integralei nedefinite utile în rezolvarea problemelor.

Metode de integrare*METODA INTEGRĂRII PRIN PĂRȚI*

Dacă f se poate exprima sub forma

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x)$$

cu $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, atunci

$$\mathcal{I} = \int f(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx = \dots = F(x) + C$$

(cu alte cuvinte, calculul integralei inițiale $\int u(x) \cdot v'(x)dx$ se reduce la cel al integralei $\int u'(x) \cdot v(x)dx$ care, la o alegere judicioasă a funcțiilor u și v , poate fi mai simplă).

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (1)

Dacă f se poate exprima sub forma:

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

unde $\varphi : D \rightarrow E$ ($E \subseteq \mathbb{R}$ interval) este derivabilă iar $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ este primitivabilă cu primitiva G , atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x)dx = \int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx,$$

prin schimbarea de variabilă $t = \varphi(x)$, se reduce la calculul integralei nedefinite:

$$\mathcal{I}_t = \int g(t)dt = \dots = G(t) + C$$

și în final

$$\mathcal{I} = G(\varphi(x)) + C.$$

METODA SCHIMBĂRII DE VARIABILĂ (2)

Dacă $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$, interval) este bijectivă și derivabilă iar $(f \circ \Psi) \cdot \Psi'$ este primitivabilă pe E cu primitiva H atunci calculul integralei nedefinite

$$\mathcal{I} = \int f(x) dx$$

se reduce prin schimbarea de variabilă (substituția) $x = \Psi(t)$ la cel al integralei

$$\mathcal{I}_t = \int f(\Psi(t)) \cdot \Psi'(t) dt = \dots = H(t) + C,$$

iar în final, revenind la variabila inițială (în baza bijectivității lui Ψ , $t = \Psi^{-1}(x)$), se obține:

$$\mathcal{I} = H(\Psi^{-1}(x)) + C.$$

Substituții remarcabile

Utilizarea formei canonice a trinomului de gradul al-II-lea

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{4a}{4a} (ax^2 + bx + c) = \frac{1}{4a} (4a^2x^2 + 4abx + 4ac) = \\ &= \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 - \Delta] \end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_x = \int f(ax^2 + bx + c) dx \quad \text{cu } f \text{ integrabilă}$$

$$t = 2ax + b \Rightarrow \mathcal{I}_t = \frac{1}{2a} \int g(t) dt, \quad \text{unde } g(t) = f\left(\frac{t^2 - \Delta}{4a}\right).$$

Primitivarea funcțiilor raționale

$$\mathcal{I} = \int R(x) dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

$$grP \geq grQ \Rightarrow R = C + \frac{\rho}{Q} \quad (\rho, \text{restul}) \Rightarrow \mathcal{I} = \int C(x) dx + \int \frac{\rho(x)}{Q(x)} dx$$

$$grP < grQ \Rightarrow Q \quad \text{se descompune în produs de factori de gr.I și II la diverse puteri}$$

$$R = \frac{P}{Q} \quad \text{se descompune în fracții simple de forma}$$

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{respectiv} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} \quad (\text{cu } \Delta < 0)$$

care se vor primitiva fiecare în parte

Substituții trigonometrice pentru eliminarea radicalului

$$\int f(\sqrt{a^2-x^2}) dx \quad x = a \cdot \sin t$$

$$\int f(\sqrt{x^2+a^2}) dx \quad x = a \cdot \operatorname{tg} t$$

$$\int f(\sqrt{x^2-a^2}) dx \quad x = \frac{a}{\cos t}$$

Substituțiile lui Euler

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \quad \text{cu } R, \text{ rațională}$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow t \pm \sqrt{ax} = \sqrt{ax^2+bx+c} \\ \Delta > 0 \Rightarrow t = \sqrt{a \frac{x-x_1}{x-x_2}} \end{cases}$$

Integrale reductibile la integrale de funcții raționale

$$\int R \left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \quad R, \text{ rațională}$$

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \text{unde } m = [p, \dots, q]$$

reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor p, \dots, q .

$$\int R(e^x) dx \quad R, \text{ rațională} \quad t = e^x$$

$$\int R(\cos x, \sin x) dx \quad R, \text{ rațională} \quad \begin{cases} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ R(u, -v) = -R(u, v) \Rightarrow t = \cos x \\ R(-u, v) = -R(u, v) \Rightarrow t = \sin x \\ R(-u, -v) = R(u, v) \Rightarrow t = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Precizăm în încheiere că alegerea schimbării de variabilă ține de imaginația și experiența rezolvitorului care poate aborda o aceeași problemă prin două sau chiar mai multe modalități. Este interesant să comparați în asemenea situații rezultatele obținute și să explicați diferențele remarcate. De asemenea este util ca la integralele nedefinite întâlnite să reflectați asupra intervalelor maxime pe care sunt definite funcțiile de sub semnul integralei.

Construcția integralei definite

Oricărei funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i se poate atașa un număr real σ_f după cum urmează:

- se construiește o *diviziune* a intervalului de definiție:

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

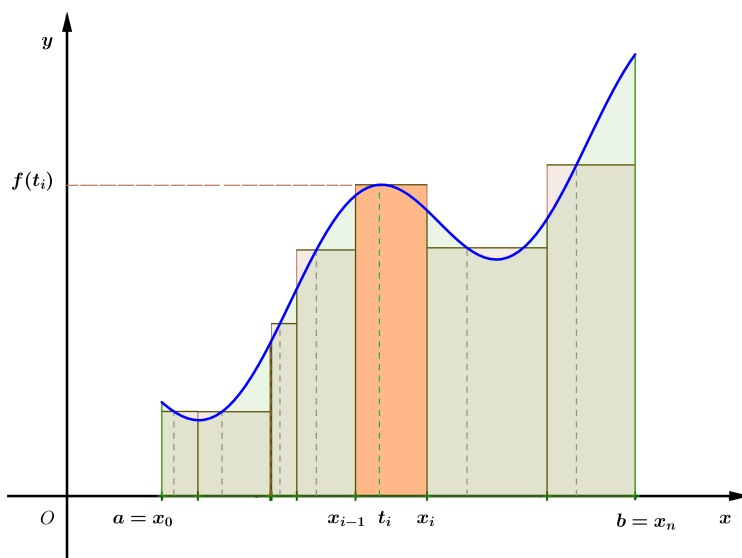
- se alege un *sistem de puncte intermediare* diviziunii:

$$(\tau) \quad \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = \overline{1, n}),$$

- se definește

$$\sigma_f(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Numărul $\sigma_f(\Delta, \tau)$ se numește *suma integrală Riemann* a lui f relativ la diviziunea (Δ) și sistemul de puncte intermediare (τ) . Din punct de vedere geometric, pentru funcții pozitive, acest număr reprezintă o aproximare a ariei "de sub grafic".



Definiție

Funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă* (în sens Riemann) d.d. există un număr real \mathbb{I} care verifică următoarea proprietate:

”pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ așa încât oricare ar fi diviziunea (Δ) cu norma $\mu(\Delta) := \max_i (x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon$ și oricare ar fi sistemul de puncte (τ) , intermediare diviziunii (Δ) , are loc inegalitatea $|\sigma_f(\Delta, \tau) - \mathbb{I}| < \varepsilon$ ”.

Numărul \mathbb{I} , dacă există, se notează $\int_a^b f(x)dx$ și reprezintă ”*integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$ în raport cu variabila x* ”.

În cazul particular al partiției uniforme cu norma $\frac{b-a}{n}$ rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Problema C

Cum se poate decide dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este sau nu integrabilă?

Utilizarea definiției, deși incomodă, este uneori inevitabilă.

Următoarele rezultate sunt utile pentru evitarea definiției în studiul integrabilității:

- Oricare funcție integrabilă pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.
- Funcțiile reale nemărginite nu sunt integrabile.
- Orice funcție reală monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.
- Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b] \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ iar punctele de discontinuitate x_i ($i = \overline{1, k}$) sunt toate de speța întâi ($f(x_i - 0)$ și $f(x_i + 0)$ există, sunt finite dar diferite) atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Problema D

Cum poate fi calculată integrala definită $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)dx$?

Pentru a calcula integralele este bine să cunoașteți:

a) *Proprietatea de liniaritate:*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) *Proprietatea de aditivitate la interval:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

g integrabilă iar $c \in [a, b]$.

Formula lui Leibniz-Newton

Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și primitivabilă iar F este o primitivă a sa atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Există funcții integrabile care nu sunt primitivabile ceea ce face ca formula să nu poată fi aplicată. Un caz aparte, în care nu se poate utiliza (direct) formula este acela al integralei unei funcții, integrabile și primitivabile, a cărei primitivă nu este exprimabilă prin funcții elementare. Asemenea funcții sunt e^{-x^2} , $\cos x^2$, $\frac{\sin x}{x}$.

METODE DE INTEGRARE

Integrarea prin părți se aplică dacă $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = \dots$$

Schimbarea de variabilă (1) se aplică dacă $f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$t = \varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{și} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

Schimbarea de variabilă (2) se aplică dacă $f(x)$ are o formă specială (vezi lista substituțiilor remarcabile)

$$\mathcal{I} = \int_a^b f(x) dx$$

$$t = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(t) \quad (\psi = \varphi^{-1})$$

$$x = \psi(t) \Rightarrow dx = \psi'(t) dt$$

$$x = a \Rightarrow t = \varphi(a) \quad \text{și} \quad x = b \Rightarrow t = \varphi(b)$$

$$\mathcal{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = H(\varphi(b)) - H(\varphi(a))$$

Proprietățile integralei definite

Teoremă

Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci

i) f este integrabilă pe $[a, b]$,

ii) f este primitivabilă pe $[a, b]$ iar $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ este o primitivă a lui f .

Pentru orice funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are loc identitatea

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Observație

Integrarea și derivarea sunt operații "inverse" una celeilalte în sensul că

$$\int g'(x) dx = g(x) + C \quad \text{și} \quad \left(\int_a^x g(t) dt \right)' = g(x)$$

Teoremă

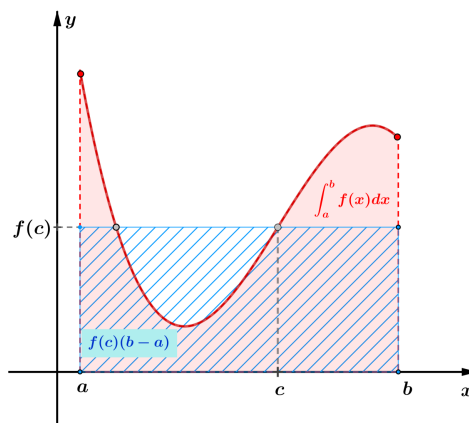
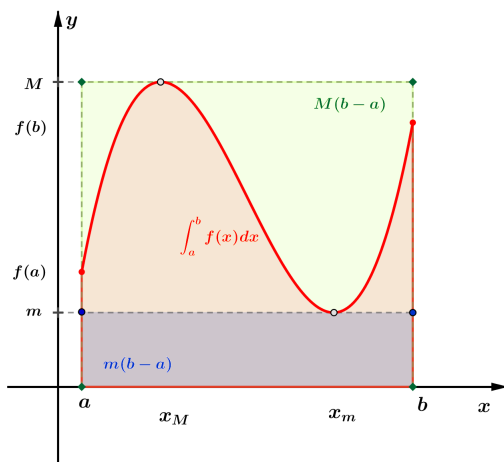
Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile atunci

$$f(x) \leq g(x), \quad (\forall)x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Teoremă

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă și $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ respectiv $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$



Teoremă (formula de medie)

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci există un punct c situat între a și b așa încât

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

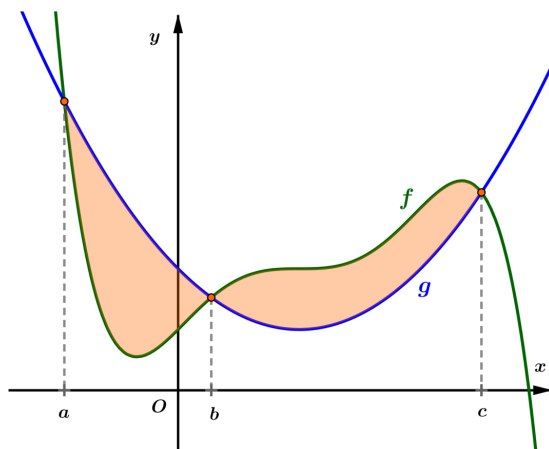
Numărul $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ se numește *valoarea medie a funcției f pe intervalul $[a, b]$* .

Aplicații ale integralei definite în geometrie

i) *Aria domeniilor mărginite cuprinse între graficele a două funcții*

Dacă $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue ale căror grafice se intersectează în punctele de abscise $a < b < c$ determină un domeniu mărginit a cărui arie este

$$A_{f,g} = \int_a^c |g(x) - f(x)| dx.$$



Exemplu

Aria discului circular de rază r (centrat în origine)

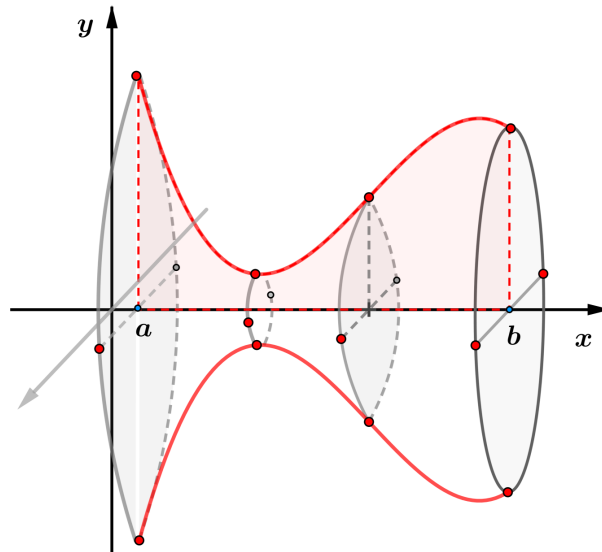
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} = \{(x, y) \mid -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Aria}(D) &= \int_{-r}^r \left| \sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right) \right| dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left(2r^2 \arcsin \frac{x}{r} + 2x\sqrt{r^2 - x^2} \right) \Big|_0^r = r^2\pi. \end{aligned}$$

ii) Volumul corpurilor generate prin rotirea graficului funcției în jurul axei Ox

Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă atunci corpul generat prin rotirea porțiunii de grafic cuprinsă între punctele $x = a$ și $x = b$ în jurul axei Ox are volumul

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze

$$\{3, 3\} + \{-3, 3\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- a) 0 b) 0,3 c) 0,6 d) 6,6 e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

- a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluțiilor ecuației $|x| + |x + 2| = 3$.

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\}$?

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

- a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ b) $(-\infty, -1)$ c) \mathbb{R}
d) \emptyset e) $(1, +\infty)$ f) $(-\infty, -2)$

AL 6 Andrei și Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câștigă prima rundă, iar Cristian o câștigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârșitul celei de-a doua runde?

- a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 7 Maria cheltuiește $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie și $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câștigă dublu față de Maria, cheltuiește un sfert din salariul său pe chirie și jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată și suma pe care o câștigă fetele împreună?

- a) $\frac{17}{72}$ b) $\frac{17}{24}$ c) $\frac{17}{48}$ d) $\frac{23}{24}$ e) $\frac{23}{72}$ f) $\frac{23}{48}$

AL 8 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent crește b ?

- a) 56,25% b) 40% c) 20%
d) 0,025% e) 0,5% f) 60%

AL 9 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se mărește de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor crește suma medie depusă în fiecare cont?

- a) 2 b) 8 c) 9,8 d) 12 e) 12,5 f) 13

AL 10 Prețul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depășesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depășește p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este prețul transportului?

- a) $s + 0,05x$ b) $s + 0,05p$ c) $0,05(s - p + x)$
 d) $s + 0,05(x - p)$ e) $s + 0,05(p - x)$ f) $s + 0,05(x + p)$

AL 11 Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \frac{1}{[x]},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[k, k + \frac{1}{k} \right]$ c) $\{n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$
 d) $\{1\}$ e) $[0, 1]$ f) $(0, 1)$

AL 12 Să se calculeze suma soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}.$$

- a) $\frac{19}{15}$ b) $\frac{20}{15}$ c) $\frac{14}{15}$ d) 1 e) $\frac{13}{15}$ f) $\frac{10}{15}$

AL 13 Să se calculeze media aritmetică a soluțiilor ecuației

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

- a) 0 b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{7}{16}$ f) 1

AL 14 Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$[a]^2 - (2a - 1)[a] + 3a = 0.$$

- a) $[-1, 4] \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ b) $[0, 4] \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ c) $[0, 5)$
 d) $\{-3, -2, 0, 4, 5\}$ e) $(-1, 4] \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ f) $\{0, 4\}$

AL 15 Care dintre următoarele variante reprezintă negația afirmației

” $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ”?

- a) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 b) $\exists \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$
 d) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| \geq \eta$ și $|f(x) - l| \geq \varepsilon$
 e) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| \geq \varepsilon$
 f) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : |x - x_0| < \eta$ și $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

AL 16 A demonstra prin contrapozitie afirmația $p \rightarrow q$ înseamnă a demonstra că este adevărată implicația $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$. Care dintre enunțurile de mai jos trebuie argumentat pentru a demonstra prin contrapozitie proprietatea

” $\forall m \in M, \forall n \in N, p(m, n) \wedge q(m, n) \rightarrow r(m, n)$ ” ?

- a) $\forall m \in M, \forall n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 b) $\exists m \in M, \exists n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 c) $\exists m \in M, \exists n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \wedge \bar{q}(m, n)$
 d) $\forall m \in M, \exists n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$
 e) $\forall m \in M, \forall n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \wedge \bar{q}(m, n)$
 f) $\exists m \in M, \forall n \in N, \bar{r}(m, n) \rightarrow \bar{p}(m, n) \vee \bar{q}(m, n)$

AL 17 Despre mulțimile A, B, C, D, E se știe că: toate elementele lui A sunt și în B , toate elementele lui B sunt și în C , există elemente ale lui C care nu sunt în B , toate elementele lui D sunt și în C , dar nu toate elementele din C sunt în D , nu există elemente comune mulțimilor A și D , există elemente care aparțin atât lui B , cât și lui D , unele elemente ale lui E sunt și elemente ale lui D , dar nu sunt elemente ale lui B . Care din următoarele afirmații rezultă din ipotezele anterioare?

- a) există elemente ale lui E care aparțin lui A
- b) mulțimea E este inclusă în mulțimea B
- c) toate elementele lui E aparțin și lui C
- d) există elemente ale lui B care sunt și în A și în E
- e) unele elemente ale lui E sunt elemente ale lui C
- f) mulțimile C și E nu au elemente comune

AL 18 Fie propozițiile p și q . Să se precizeze în câte cazuri din cele prezentate în următoarele tabele de adevăr se poate trage concluzia că propoziția q este adevărată:

$\frac{p}{1} \mid \frac{p \rightarrow q}{1}$	$\frac{p}{0} \mid \frac{p \vee q}{1}$	$\frac{p}{1} \mid \frac{\bar{q} \rightarrow \bar{p}}{1}$	$\frac{p}{0} \mid \frac{\bar{q} \rightarrow p}{1}$	$\frac{p}{1} \mid \frac{p \vee q}{1}$
----------------------------------------------	---------------------------------------	----------------------------------------------------------	----------------------------------------------------	---------------------------------------

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 19 Să se calculeze suma $\sum_{i=1}^{100} \left(\sum_{j=1}^i j \right)$.

- a) 171700
- b) $\frac{5050}{3}$
- c) 17
- d) 206040
- e) 2550
- f) $\frac{51}{2}$

AL 20 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuația

$$|x| + |y| < 10?$$

- a) 181 b) 180 c) 90 d) 91 e) 101 f) $4 \cdot 181$

AL 21 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuația

$$x + y + z = 10 ?$$

- a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 22 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuația

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0 ?$$

- a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 23 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

- a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 24 Câte numere pare de 4 cifre încep și se termină cu aceeași cifră?

- a) 324 b) 360 c) 400 d) 500 e) 900 f) 1000

AL 25 Se formează un număr alăturând, unul după altul, pătratele numerelor naturale diferite de zero, consecutive: 149162536... Să se determine în acest număr cifra așezată pe poziția 99.

- a) 2 b) 1 c) 4 d) 0 e) 7 f) 3

AL 26 Într-un șir a_1, a_2, \dots , fiecare termen, începând cu al doilea, se obține mărinind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

- a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 27 Se consideră șirul de numere raționale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Să se determine al câtelea termen al șirului este numărul $\frac{2016}{2015}$.

- a) 8120450 b) 8118435 c) 2015
 d) 2016 e) 8000111 f) 8000

AL 28 O particulă se mișcă în sistemul cartezian de coordonate după următoarea schemă: pornește din origine, după primul pas se mișcă o unitate la dreapta, la cel de-al doilea pas se mută 2 unități în sus, la al treilea pas 3 unități la stânga, la al patrulea pas 4 unități în jos, la al cincilea 5 unități la dreapta, etc. În ce punct se va afla particula după 2022 de pași?

- a) (1011, 1012) b) (1021, 1020) c) (1020, 1020)
 d) (1001, -1020) e) (1004, 1005) f) (1010, 1011)

AL 29 Fie a_1, \dots, a_n, \dots termenii unei progresii aritmetice de rație r . Știind că $a_{21} = 20$ și $a_{101} = 60$, să se determine r și formula termenului a_{n+1} .

- a) $r = \frac{1}{4}, a_{n+1} = n - 1$ b) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$
 c) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$ d) $r = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{2}$
 e) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{4}$ f) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{6}$

AL 30 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 6 cm mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

- a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm f) 15 cm

AL 35 Populația unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populația numără 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populația va atinge 24300 de bacterii?

- a) 10 min b) 15 min c) 20 min
 d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 36 Fie $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, o progresie geometrică cu termeni nenuli și rație $q \neq 1$. Știind că $b_1 = 1$ și $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q și suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

- a) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ b) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$
 c) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ d) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$
 e) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ f) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$

AL 37 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație q și termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + \dots + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

- a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 38 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație $q \neq \pm 1$ și termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n+1}^2 \quad \text{și} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_{n+1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 39 Se consideră un pătrat de arie S_1 . Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2 . În același mod, construim succesiv un șir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

- a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 40 O particulă se mișcă în sistemul de coordonate xOy după următoarea regulă: la fiecare pas, din punctul de coordonate (x, y) particula se mută în punctul de coordonate $(x + y, -x)$. Dacă particula pleacă din punctul $(1, 1)$, unde se va afla după 2022 pași?

- a) $(1, 1)$ b) $(1, 0)$ c) $(0, 0)$
d) $(0, -1)$ e) $(-1, 1)$ f) $(2, -1)$

AL 41 Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- a) $\frac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\frac{1}{f(x)}$ f) $\frac{1}{f(-x)}$

AL 42 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \text{ și } g(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcția compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x(x^2 - x)$ c) $(3x - 1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 43 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{și } g(x) = x - 2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases} & \text{b) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} \\ \text{c) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 2x - 7, & x \geq -2 \end{cases} \\ \text{e) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} & \text{f) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

AL 44 Să se determine toate funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \quad \text{și} \quad g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

știind că $f \circ g = g \circ f$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x + 1, g(x) = x & \text{b) } f(x) = ax + 1, g(x) = x \\ \text{c) } f(x) = x + 1, g(x) = x + b & \text{d) } f(x) = ax + 1, g(x) = x + 1 \\ \text{e) } f(x) = ax + 1, g(x) = x \text{ sau } f(x) = x + 1, g(x) = x + b & \\ \text{f) } f(x) = x + 1, g(x) = x \text{ și } f(x) = x + 1, g(x) = x - 1 & \end{array}$$

AL 45 Să se determine funcția de gradul întâi, știind că graficul său taie axa Ox în $x = \sqrt{3}$ și trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}}x + 2 & \text{b) } \frac{2}{\sqrt{3}}x - 2 & \text{c) } \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2 \\ \text{d) } \frac{3}{\sqrt{3}}x + 1 & \text{e) } \frac{2}{\sqrt{3}}x - 1 & \text{f) } \frac{2}{\sqrt{3}}x \end{array}$$

AL 46 În câte puncte taie axa Ox graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} ?$$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 47 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m - 1)x, & x \in [2, 4) \\ x + 8, & x \in [4, \infty) \end{cases} .$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care f este strict monotonă pe \mathbb{R} .

- a) $(1, 2)$ b) $(1, 4)$ c) $(1, 4]$ d) $(1, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $(1, \infty)$

AL 48 Fie ecuația

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuație să aibă exact trei soluții reale diferite.

- a) \mathbb{R} b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ c) \emptyset
d) $(-\infty, 1]$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

AL 49 Fie ecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o relație independentă de a între x_1 și x_2 .

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ | b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$ |
| c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ | d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$ |
| e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ | f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$ |

AL 50 Să se calculeze expresia $E = x_1^4 - x_2^4$, știind că x_1 și x_2 , cu $x_1 > x_2$, sunt soluțiile ecuației $x^2 - ax - a^2 = 0$, unde $a \in (0, \infty)$.

- | | | |
|-----------------------|---------------|-----------------------|
| a) $E = 5a^4\sqrt{3}$ | b) $E = a^3$ | c) $E = 3a^4\sqrt{5}$ |
| d) $E = a^4\sqrt{5}$ | e) $E = 4a^3$ | f) $E = 3a^4$ |

AL 51 Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ și } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

- | | |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------|
| a) $y^2 + \frac{5a^2 + 1}{a^2} y + a = 0$ | b) $y^2 - \frac{1}{a^2} y - a = 0$ |
| c) $y^2 + a = 0$ | d) $y^2 + \frac{5a^2 + 5a + 1}{a^2} y - a = 0$ |
| e) $y^2 - a = 0$ | f) $y^2 - 2a + 3 = 0$ |

AL 52 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real nenul a știind că inecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|--------------------|-------------------|----------------|
| a) $(-\infty, -1]$ | b) $[1, +\infty)$ | c) $\{1\}$ |
| d) $(0, 1]$ | e) \mathbb{R}^* | f) \emptyset |

AL 53 Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) \mathbb{R} f) \emptyset

AL 54 Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a , știind că intersecția $A \cap B$ are exact două elemente.

- a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$
d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) \emptyset f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 55 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ și trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc .

- a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 56 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P) . Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

- a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) \mathbb{R} d) \emptyset e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 57 Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ și este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

- a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$
 d) $x^2 - 2x + 1$ e) nu există f) $-4x^2 + 3x + 1$

AL 58 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a - 2)x + 2a \quad \text{și} \quad g(x) = x^2 + (b + 1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a și b , știind că graficele funcțiilor f și g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox .

- a) $a = 0, b = -2$ b) $a = 1, b = -2$ c) nu există
 d) $a = 0, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = -1, b = -2$

AL 59 Presiunea dintr-un recipient variază în timp după legea

$$p : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7,$$

unde t este exprimat în minute. După câte minute presiunea este minimă?

- a) 4,5 b) 6,0625 c) 0 d) 1 e) 9 f) 6,5

AL 60 Fie funcția $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m și maximă M a funcției f .

- a) $m = 0, M = 1$ b) $m = -4, M = 5$ c) $m = -4, M = 4$
 d) $m \in \emptyset, M = 5$ e) $m = -4, M = 1$ f) $m = -4, M = +\infty$

AL 61 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a , știind că imaginea funcției f este un interval de lungime 1.

- a)
- $[0, +\infty)$
- b)
- $(0, 1]$
- c)
- $\{2\}$
- d)
- \emptyset
- e)
- $\{1\}$
- f)
- $(-\infty, 0]$

AL 62 Dacă numerele reale x și y satisfac relația $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

AL 63 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right|.$$

- a) 6 b)
- $\frac{1}{2}$
- c)
- $\frac{1}{5}$
- d)
- $\frac{2}{5}$
- e) 1 f) 2

AL 64 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluție.

- a)
- -2
- b) 2 c) 4 d) 3 e)
- -1
- f)
- -6

AL 65 Dacă $x + y = 2$ și $x^3 + y^3 = -4$, să se calculeze $x^4 + y^4$.

- a)
- -8
- b)
- -4
- c)
- -2
- d) 2 e) 4 f) 8

AL 66 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a astfel încât între soluțiile complexe z_1 și z_2 ale ecuației $z^2 + (2a - 1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relația

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

- a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$
 d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

AL 67 Să se determine suma modulelor soluțiilor ecuației

$$z^2 - (6 - i)z + 5 - i = 0.$$

- a) $2 + \sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1 + \sqrt{26}$

AL 68 Să se determine suma modulelor soluțiilor ecuației

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

- a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 69 Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2013}}.$$

- a) 2013 b) $2013i$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 70 Se consideră numerele complexe z și w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{și} \quad |z + w| = \sqrt{2013}.$$

Să se determine valoarea lui $|z - w|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 71 Se consideră numerele complexe z și w astfel încât

$$|z| = 2, |w| = 8 \quad \text{și} \quad |z - w| = 6 .$$

Să se determine valoarea lui $|z + w|$.

- a) 16 b) 10 c) $\sqrt{31}$ d) 12 e) $\sqrt{1001}$ f) 24

AL 72 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 + z = 1 + i\}$ și $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulțimea $\{z^{4n}, z \in A\}$.

- a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
d) \emptyset e) $\{(i - 1)^n\}$ f) $\{(i(i - 1))^n\}$

AL 73 Fie z un număr complex ce verifică ecuația $z^2 - iz - 1 = 0$. Să se determine valoarea expresiei

$$\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right)^3 .$$

- a) i b) 1 c) -1 d) $-i$ e) 0 f) $2i$

AL 74 Știind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^9$.

- a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos \frac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 75 Numărul complex z satisface condițiile $|z - i| = |z - 1| = |z + 5|$. Să se determine $|z|$.

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 76 Se știe că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1 + 2i$, $-2 - 2i$ și $3 + i$. Care este cel de-al patrulea număr?

- a) $3 - 2i$ b) $-2 + 3i$ c) $2 - 3i$
 d) $-3 + 2i$ e) $2 - 2i$ f) $3 - 3i$

AL 77 Fie numărul complex z care verifică ecuația $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$.

- a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 78 Numărul complex z are proprietățile $|z + 2| = |z - 6(1 + i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 79 Care este valoarea expresiei

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \right)^{24} ?$$

- a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^8 f) -2^8

AL 80 Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ și $z_2 = -2 + i$. Să se determine numerele complexe z cu proprietățile

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

- a) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$
 c) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{4}$
 e) $-\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

AL 81 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + z + 1 = 0\}$. Știind că $z \in A$, să se calculeze

$$\frac{z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^3 - 4}{z^{2013} + 2}.$$

- a) z b) z^2 c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 82 Să se determine suma soluțiilor ecuației

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0.$$

- a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 83 Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condițiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \quad \text{și} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Să se determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

- a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 84 Dacă numărul complex z satisface relația

$$|z-2|^2 + |z-3|^2 = |z-5|^2,$$

atunci $|z|$ este egal cu:

- a) 4 b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 2 e) $3\sqrt{2}$ f) $\sqrt{3}$

AL 85 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puțin o soluție reală.

- a) 2 b) $1 \pm \sqrt{2}$ c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
 d) $-2, 1 \pm \sqrt{2}$ e) $2 \pm \sqrt{2}$ f) $0, 1 \pm \sqrt{2}$

AL 86 Să se găsească mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{1-x-2x^2} = -x-1.$$

- a) {1} b) {0, -1} c) {0, 2}
 d) {-1} e) \emptyset f) {0}

AL 87 Să se determine mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

- a) {-1, 0, 1} b) {-1, 1, 2} c) {-1, 0, 2}
 d) {0, 1, 2} e) {0, 1, $\sqrt{2}$ } f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

AL 88 Fie mulțimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1, \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum_{x \in M} x^2$.

- a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

AL 89 Să se determine numărul natural nenul n cu proprietatea

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{9}{10}.$$

- a) 99 b) 24 c) 999 d) 624 e) 9 f) 399

AL 90 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + 2\sqrt{|2 + x - 3x^2|} > 1.$$

- a) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, \infty)$ b) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{7}{13}, 1\right) \cup (1, \infty)$
c) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (1, \infty)$
e) $\left(-\frac{7}{13}, 0\right] \cup (1, \infty)$ f) $\left(-\infty, -\frac{9}{11}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

AL 91 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

- a) $[1, \infty)$ b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ c) $[-8, -4]$
d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ e) $(-\infty, -4]$ f) $[-2, \infty)$

AL 92 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{25x^2 - 44x - 12} \geq 1 - 4x.$$

- a) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$ b) $(-\infty, -2]$
c) $\left[\frac{6}{25}, \infty\right)$ d) $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{6}{25}, \infty\right)$
e) $\left[\frac{13}{3}, \infty\right)$ f) $\left[\frac{6}{25}, \frac{13}{3}\right)$

AL 93 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{2x^2 - x - 1} + 2x \geq -1.$$

- a) \mathbb{R} b) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ c) $[-2, 1)$
 d) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ e) $\left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ f) $[1, \infty)$

AL 94 Să se determine suma modulelor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+8} = 3.$$

- a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

AL 95 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluții reale distincte.

- a) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$
 d) $(1, 2]$ e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

AL 96 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât

$$\frac{2002}{10^{-b}}$$

să aparțină intervalului $[1, 100]$.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{-2, -1\}$ c) $\{-3, -2\}$
 d) $\{-4, -3, -2\}$ e) \emptyset f) $\{-3, -1\}$

AL 97 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ și $c = \frac{1-a-b}{2-2b}$. Să se determine 12^c .

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 4

AL 98 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ și $n \geq 2$. Să se calculeze

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \dots + \frac{1}{\log_n a}.$$

- a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\frac{1}{\log_{n^n} a}$
d) $\frac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a \frac{n(n+1)}{2}$ f) $\log_n a$

AL 99 Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ și notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

- a) $x + y$ b) xy c) $\frac{1}{x + y}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{x + y}{xy}$ f) $\frac{xy}{x + y}$

AL 100 Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 101 Fie numerele reale x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, \dots, x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 \dots x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots + \log_{x_n}(x_1 x_2 \dots x_n).$$

- a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 102 Fie a și b numere reale strict pozitive care satisfac relațiile

$$a^b = b^a \quad \text{și} \quad b = 9a.$$

Să se determine valoarea lui a .

- a) $1/9$ b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 103 Să se rezolve ecuația

$$2^{3^x} = 3^{2^x}.$$

- a) -1 b) 0 c) 1
 d) $\ln 3 - \ln 2$ e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ f) $\frac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$

AL 104 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{5\}$ d) $\{0\}$ e) \emptyset f) $\{-2\}$

AL 105 Să se rezolve ecuația $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

- a) $\left\{0, \frac{2 \ln 2}{\ln 2 + 2 \ln 3}\right\}$ b) $\left\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ c) $\left\{1, \frac{\ln 2}{2 \ln 2 + \ln 3}\right\}$
 d) $\left\{1, \frac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ e) $\left\{0, \frac{\lg 2}{\lg 2 + 2 \lg 3}\right\}$ f) $\left\{0, \frac{\lg 3}{1 + 2 \lg 2}\right\}$

AL 106 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

- a) $\{-2\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) \emptyset f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

AL 107 Fie S mulțimea soluțiilor ecuației

$$0, 5^{x-1} + 9 = 0, 2^{x+1}.$$

Să se calculeze

$$\sum_{x \in S} x^2.$$

- a) 5 b) 9 c) 25 d) 2 e) 6 f) 4

AL 108 Să se găsească produsul tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$x^{\log_2 x} = 16.$$

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 109 Numerele reale strict pozitive x și y verifică relațiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x + y).$$

Să se determine raportul $\frac{y}{x}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ c) $\log_2 3$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ f) $\log_3 2$

AL 110 Fie $x > 10$. Câte cifre are soluția ecuației $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

- a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10} + 1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 111 Să se determine numărul soluțiilor ecuației $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

- a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 112 Să se rezolve inecuația

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 2x + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3).$$

- a) $x \in [-1, +\infty)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty)$
c) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in \emptyset$
e) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, 0]$

AL 113 Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația

$$\log_x (x^2 - x + 2) > 2 \log_x (x + 1).$$

- | | | |
|----------------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | b) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ | c) $x \in (1, \infty)$ |
| d) $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ | e) $x \in (0, 1)$ | f) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ |

AL 114 În ce interval se află soluția strict pozitivă a ecuației

$$(x^2 + 9) \frac{1}{\log_x (x^2 + 9)} = \sqrt[3]{-x^2 + 6x} ?$$

- | | | |
|--------------|----------------------------------------------|-------------|
| a) $(2, 3]$ | b) $(0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ | c) $(1, 6)$ |
| d) $(-1, 0)$ | e) $[-1, 1]$ | f) $(1, 2)$ |

AL 115 Să se determine mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3} + 4)^x - 3(\sqrt{3} + 1)^x + 2 < 0\}.$$

- | | | |
|-------------------|-----------------|------------------------------------------------------------|
| a) \emptyset | b) \mathbb{R} | c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}\right)$ |
| d) $(0, +\infty)$ | e) $(0, 1)$ | f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}, +\infty\right)$ |

AL 116 Fie e baza logaritmului natural și x_1, x_2 soluțiile ecuației

$$\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + e^3 \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x - e(e + 1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\frac{x_1}{x_2}$.

- a) $e(e+1)$ b) e c) 1 d) e^3 e) 2 f) nu există

AL 117 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x < -1 \\ mx - 3, & x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă și să se determine în acest caz funcția ei inversă.

- a) $m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{y - 3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$
- b) $m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y - 3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$
- c) $m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y \geq -1 \\ \frac{-y - 3}{2}, & y < -1 \end{cases}$
- d) $m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y + 3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$
- e) $m = -3, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y - 3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$
- f) $m = -1, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} 2 + y, & y > -1 \\ \frac{-y - 3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$

AL 118 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x astfel încât se poate calcula $C_{7x}^{x^2+10}$.

- a) $\{2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) \mathbb{N} e) \mathbb{R} f) \mathbb{Z}

AL 119 Să se calculeze suma

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 100 \cdot 100! .$$

- a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$
 d) $101! - 1$ e) $200! + 1$ f) $200! - 1$

AL 120 Fie șirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine mulțimea $\left\{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3}\right\}$.

- a) $\{3, 4\}$ b) $\{5, 6, 7\}$ c) $\{2, 3, 4\}$
 d) \emptyset e) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ f) $\{2, 4, 6\}$

AL 121 Să se calculeze suma

$$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7.$$

- a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

AL 122 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq (C_{n+1}^3)^2.$$

- a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{1, 2, 3, 4\}$ c) \emptyset
 d) $\{2\}$ e) $[2, +\infty)$ f) $\{2, 3, 4, 5\}$

AL 123 Fie $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ mulțimea cifrelor și S_k mulțimea stringurilor binare formate din k biți, adică

$$S_k = \{b_1 b_2 \cdots b_k : b_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, k}\}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze câte funcții $h : S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_8 \rightarrow \{c_1 c_2 c_3 : c_1, c_2, c_3 \in C\}$ se pot defini.

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) 1000^{510} | b) 900^{512} | c) 512^{1000} |
| d) 1000^{256} | e) 256^{1000} | f) 256^2 |

AL 124 Fie $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Câte funcții impare $f : A \rightarrow A$ există?

- | | | | | | |
|---------|--------|--------|------|-------|-------|
| a) 1250 | b) 125 | c) 625 | d) 5 | e) 20 | f) 25 |
|---------|--------|--------|------|-------|-------|

AL 125 Să se determine numărul funcțiilor pare

$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

- | | | | | | |
|---------|--------|--------|------|---------|-------|
| a) 1250 | b) 125 | c) 625 | d) 5 | e) 1000 | f) 25 |
|---------|--------|--------|------|---------|-------|

AL 126 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin exact un număr impar?

- | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|--------|
| a) 5 | b) 16 | c) 32 | d) 64 | e) 37 | f) 160 |
|------|-------|-------|-------|-------|--------|

AL 127 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, \dots, 10\}$ au produsul elementelor divizibil cu 10?

- | | | | | | |
|--------|--------|---------|-------|--------|--------|
| a) 512 | b) 100 | c) 1024 | d) 45 | e) 752 | f) 256 |
|--------|--------|---------|-------|--------|--------|

AL 128 Câte numere de 10 cifre conțin 4 cifre de 3 și 6 cifre de 7?

- | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a) 24 | b) 120 | c) 210 | d) 240 | e) 256 | f) 720 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|

AL 129 Câte din submulțimile de trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

- a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 130 Câte dintre submulțimile nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ au suma elementelor divizibilă cu 5?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 16

AL 131 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

- a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$
 d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 132 Câte numere de 12 cifre au exact cinci cifre de 1, patru cifre de 2 și trei cifre de 3?

- a) $12!$ b) $11!$ c) $\frac{12!}{5!4!3!}$ d) $C_{12}^5 C_{12}^4 C_{12}^3$ e) $A_{12}^5 A_{12}^4 A_{12}^3$ f) 3^{12}

AL 133 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete și 7 băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete și 2 băieți pentru a participa la un concurs?

- a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 134 Alfabetul unui limbaj este format din literele A, B, E, L, R, T, aceasta fiind și ordinea lor alfabetică. Dicționarul acestui limbaj conține doar cuvinte de 6 litere, fiecare literă din alfabet fiind luată o singură dată în oricare cuvânt. Dacă așezarea în dicționar se face ținând cont de ordinea alfabetică a cuvintelor, atunci cuvântul aflat pe poziția 538 în acest dicționar este:

- a) *REBLTA* b) *LERBAT* c) *TBERLA*
 d) *RABLET* e) *TRABLE* f) *ALBERT*

AL 135 Considerăm un alfabet format din simbolurile \diamond , \heartsuit , $*$ și $\#$. Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

- a) 24 b) 256 c) 16 d) 1 e) 64 f) 32

AL 136 Un tren este format din 5 vagoane notate cu literele A, B, C, D, E. În câte moduri pot fi așezate aceste vagoane astfel încât vagonul A să se afle mereu înaintea vagonului B?

- a) 60 b) 20 c) 40 d) 80 e) 30 f) 45

AL 137 Câte secvențe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

- a) 1 b) 160 c) 32 d) 192 e) 128 f) 162

AL 138 O anagramă a unui cuvânt este orice cuvânt (cu sens sau fără sens) obținut prin permutarea literelor sale (inclusiv permutarea identică). Câte anagrame ale cuvântului SINUS pot fi construite?

- a) 15 b) 30 c) 45 d) 60 e) 90 f) 120

AL 139 Să se determine câte permutări $\sigma \in S_5$ satisfac simultan condițiile $\sigma(i) < \sigma(i+2)$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$ și $\sigma(j) < \sigma(j+3)$ pentru orice $j \in \{1, 2, 3\}$.

- a) 1 b) 8 c) 7 d) 9 e) 24 f) 120

AL 140 Fie $M_1 = \{X, Y, Z\}$ și $M_2 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Un cod este format dintr-o literă din M_1 pe prima poziție și 3 cifre distincte din M_2 pe următoarele 3 poziții. Câte coduri ce conțin cel puțin una din cifrele 3, 5, 7 pot fi formate?

- a) 210 b) 510 c) 630 d) 720 e) 1530 f) 2160

AL 141 Aveți la dispoziție 2 piese albe, 3 piese negre și mai multe piese de culoare violetă, toate de aceeași formă pătrată. Acestea se așează în felul următor: o piesă pe primul rând, dedesubt 2 piese, sub acestea 3 și așa mai departe, obținând 8 rânduri, ultimul cu 8 piese. În câte moduri pot fi așezate aceste piese?

- a) $10 C_{36}^5$ b) $10 C_{28}^5$ c) A_{28}^5 d) A_{36}^5 e) $C_{28}^2 \cdot C_{28}^3$ f) $C_{36}^2 \cdot C_{36}^3$

AL 142 Un examen de matematică are două părți. Partea A conține 5 probleme, iar partea B conține 4 probleme. Fiecare student trebuie să rezolve în total 5 probleme, dintre care cel puțin două trebuie să fie din partea A și cel puțin 2 din partea B a examenului. Să se determine numărul de moduri diferite în care se pot alege cele 5 probleme pentru rezolvare.

- a) 100 b) 60 c) 40 d) 224 e) 2400 f) 120

AL 143 La o ședință cu părinții participă opt femei și șapte bărbați, printre care doamna X și domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei femei și patru bărbați, știind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

- a) 1540 b) 1960 c) 420
d) 282240 e) 5040 f) 277200

AL 144 Cinci prietene își fac una alteia cadouri astfel încât fiecare din ele oferă un cadou și primește un cadou (desigur, niciuna nu primește propriul cadou). În câte moduri diferite își pot oferi cadouri?

- a) 44 b) 10 c) 5 d) 120 e) 70 f) 20

AL 145 Un pătrat 3×3 este împărțit în 9 pătrățele 1×1 . Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrățele 1×1 . În câte moduri se poate face colorarea astfel ca o linie să rămână necolorată?

- a) 12 b) 15 c) 16 d) 18 e) 24 f) 32

AL 146 Un pătrat 3×3 este împărțit în 9 pătrățele 1×1 . Trebuie colorate cinci din cele nouă pătrățele 1×1 astfel încât să existe cel puțin un pătrățel colorat pe fiecare linie și pe fiecare coloană. În câte moduri se poate face colorarea?

- a) 27 b) 63 c) 72 d) 81 e) 90 f) 126

AL 147 Câți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3})^{99}$?

- a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 148 Fie $x > 0$. Câți termeni din dezvoltarea

$$\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$$

nu-l conțin pe x , știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 1024?

- a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 149 Fie binomul $\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n$, $x > 0$. Știind că termenul T_{13} este de forma c_1x , să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma c_2x^{-22} , unde c_1 și c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x .

- a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 150 Fie

$$A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \dots + 100C_{100}^{100}.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- a) A este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$
d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $A = 100 \cdot 2^{99}$

AL 151 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 5x + 4x^3)^{10}$.

- | | | |
|---------------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) $40 \cdot C_{10}^2$ | b) $200 \cdot C_{10}^2$ | c) $5^4 \cdot C_{10}^4$ |
| d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$ | e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$ | f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$ |

AL 152 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x + 2y + 3)^8$.

- a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

AL 153 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5 + 2x)^{16}$ este cel mai mare.

- | | | |
|------------------------------------------------|--------------|--------------|
| a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$ | b) $(0, 1)$ | c) $(1, 3)$ |
| d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ | e) $(-2, 2)$ | f) $(-1, 1)$ |

AL 154 Care este probabilitatea p , respectiv q , ca alegând una din soluțiile ecuației $(x + 2)(x^2 - x - 1) = 0$ aceasta să fie reală, respectiv întregă ?

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| a) $p = \frac{1}{3}, q = 0$ | b) $p = 1, q = \frac{1}{3}$ | c) $p = q = \frac{1}{3}$ |
| d) $p = 1, q = 0$ | e) $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ | f) $p = q = \frac{1}{2}$ |

AL 155 Care este probabilitatea p , respectiv q , ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n \in \mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101 ?

- | | | |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| a) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{4}{101}$ | b) $p = \frac{51}{101}, q = \frac{4}{101}$ | c) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{5}{101}$ |
| d) $p = \frac{51}{101}, q = \frac{5}{101}$ | e) $p = \frac{50}{101}, q = \frac{3}{101}$ | f) $p = \frac{49}{100}, q = \frac{3}{101}$ |

AL 156 Din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ se aleg aleator șase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{10}$

AL 157 Amestecăm un pachet de 52 de cărți de joc și extragem simultan două cărți la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi ași de aceeași culoare?

- a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{1}{51 \cdot 52}$ c) $\frac{1}{51 \cdot 26}$ d) $\frac{A_4^2}{52}$ e) $\frac{C_4^2}{52}$ f) $\frac{1}{51 \cdot 13}$

AL 158 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obținem suma punctelor 6?

- a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 159 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba și 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziționează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus și unul Sony?

- a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 160 Se aruncă o monedă de 5 ori. Să se determine probabilitatea să se obțină aceeași față de exact 2 ori?

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{4}{5}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 161 Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca produsul numerelor apărute să fie număr par?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{25}{36}$

AL 162 Din mulțimea numerelor de patru cifre se extrage aleator un număr. Calculați probabilitatea ca numărul să conțină două cifre de 5 și celelalte două de 7.

- a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{250}$ c) $\frac{1}{375}$ d) $\frac{1}{750}$ e) $\frac{1}{1500}$ f) $\frac{1}{3000}$

AL 163 Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 13. Se extrag aleator două bile. Care este probabilitatea ca suma numerelor de pe bilele extrase să fie un număr par?

- a) $\frac{6}{13}$ b) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{5}{26}$ d) $\frac{7}{26}$ e) $\frac{42}{169}$ f) $\frac{84}{169}$

AL 164 Un program folosește aleator cifrele din mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$ pentru a scrie numere de patru cifre distincte. Se rulează programul. Care este probabilitatea ca numărul scris să fie număr par?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{9}$ f) $\frac{7}{9}$

AL 165 Un tabel cu 2 linii și 6 coloane este completat aleator folosind toate numerele de la 1 la 12. Care e probabilitatea ca pe prima linie să fie doar numere impare?

- a) $\frac{1}{A_{12}^6}$ b) $\frac{1}{C_{12}^6}$ c) $\frac{1}{6!}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2^6}{12!}$ f) $\frac{1}{4}$

AL 166 Un tabel cu mai multe linii și coloane completat cu 0 și 1 se numește *matrice binară*. Determinați probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii și 4 coloane, aceasta să aibă un singur element nenul.

- a) $\frac{1}{15!}$ b) $\frac{1}{16!}$ c) $\frac{2}{7!}$ d) $\frac{1}{2^{12}}$ e) $\frac{1}{2^8}$ f) $\frac{1}{2^4}$

AL 167 Un tabel cu mai multe linii și coloane completat cu 0 și 1 se numește *matrice binară*. Determinați probabilitatea ca alegând aleator o matrice binară cu 4 linii și 4 coloane, aceasta să aibă urma cel puțin egală cu doi.

a) $\frac{3!}{16!}$ b) $\frac{11}{16}$ c) $\frac{8!}{2^{16}}$ d) $\frac{15}{32}$ e) $\frac{7}{16!}$ f) $\frac{4!}{2^{16}}$

AL 168 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (3 \ -1 \ -2) \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL 169 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = -2, y = -2$
d) $x = 2, y = -1$ e) $x = 1, y = -2$ f) $x = 2, y = 2$

AL 170 Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \ 1 \ 2)$$

și funcția

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(X) = X^2 - 3X + I_2.$$

Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ și $f(B)$.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, 2B & \text{b)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B \\ \text{e)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B & \text{f)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

AL 171 Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

- | | | |
|-------|--------|--------------|
| a) 10 | b) e | c) nu există |
| d) 1 | e) 2 | f) 5 |

AL 172 Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- P_1 : Dacă A^2 se poate calcula, atunci A este o matrice pătratică;
 P_2 : Dacă AB și BA se pot calcula, atunci A și B sunt matrice pătratice;
 P_3 : Dacă AB și BA se pot calcula, atunci AB și BA sunt matrice pătratice;
 P_4 : Dacă $AB = B$, atunci A este matricea identitate ?

- | | |
|--------------------|-------------------------------------|
| a) P_1, P_2, P_3 | b) P_2, P_3 |
| c) P_1, P_2 | d) P_1, P_3 |
| e) P_2, P_3, P_4 | f) nici o afirmație nu este corectă |

AL 173 Fie A și B două matrice pătratice. Care dintre următoarele matrice sunt întotdeauna egale cu $(A - B)^2$?

$$M_1 = A^2 - B^2$$

$$M_2 = (B - A)^2$$

$$M_3 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$M_4 = A(A - B) - B(A - B)$$

$$M_5 = A^2 - AB - BA + B^2$$

- a) M_2, M_4, M_5 b) M_1, M_2, M_3 c) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5
d) M_2, M_3 e) M_2, M_3, M_5 f) M_1, M_2, M_3, M_4

AL 174 Să se determine numărul matricelor din mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & c \\ b & 0 & b \\ c & 1 & a-1 \end{pmatrix} \mid M^2 = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & x \end{pmatrix}, a, b, c, x, y \in \mathbb{N} \right\}.$$

- a) 0 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4 f) 2

AL 175 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz} , dacă matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relația

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

- a) 4 b) x c) 8 d) 2 e) e f) 1

AL 176 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a + b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

- a) -2 b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) -1

AL 177 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$\text{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A) \dots (I_2 + 2018A)],$$

unde $\text{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratice X .

- | | | |
|----------|----------------|----------------|
| a) 0 | b) 2018! | c) $1 + 2017!$ |
| d) 2019! | e) $1 + 2018!$ | f) $1 + 2019!$ |

AL 178 Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

astfel încât $AB \neq O_2$ și $BA = O_2$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B .

- | | | |
|------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| a) $\{2k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ | b) \mathbb{N} | c) \mathbb{Z} |
| d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ | e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ | f) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ |

AL 179 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută prin înmulțire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

- | | |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| a) $x_{11} = x_{22}, x_{12} = x_{21} = 0$ | b) $x_{11} = -x_{22}, x_{12} + x_{21} = 1$ |
| c) $x_{11} = x_{12} = 0, x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ | d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$ |
| e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ | f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$ |

AL 180 Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{c) } (2 \ -3 \ 1) \\ \text{d) } (2 \ -1 \ 3) & \text{e) } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

AL 181 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2018}.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2019^{2018} + 1}{2018} A & \text{b) } \frac{2018^{2016} + 1}{2017} A & \text{c) } \frac{2019^{2018} - 1}{2018} A \\ \text{d) } 2018A & \text{e) } 1009 \cdot 2019 A & \text{f) } \frac{2018^{2016} - 1}{2017} A \end{array}$$

AL 182 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

$$\text{a) } 2 \quad \text{b) } 3 \quad \text{c) } 4 \quad \text{d) } 5 \quad \text{e) } 6 \quad \text{f) } 7$$

AL 183 Fie matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

$$\text{a) } X \quad \text{b) } I_2 \quad \text{c) } O_2 \quad \text{d) } -X \quad \text{e) } -I_2 \quad \text{f) } X^2$$

AL 184 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j, \\ 0, & i > j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & i < j. \end{cases}$$

Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcție de matricea identitate I_3 și de puterile matricei $B = A - I_3$.

a) $A^n = nB^n + 2I_3$

b) $A^n = \left(\frac{n^2 - n}{2} + 1\right) B + nI_3$

c) $A^n = \frac{n^2 - n}{2} B^2 + nB + I_3$

d) $A^n = \frac{n^2 - n}{2} B + nI_3$

e) $A^n = nB^2 + \frac{n^2 - n}{2} B + I_3$

f) $A^n = \frac{n^2 - n - 1}{2} B^2 + nB + I_3$

AL 185 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei A^n , $n \geq 2$.

a) $3^n + 2^{n+1}$

b) $4 \cdot 3^n - 2^n$

c) $4 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-1} + 6^{n-1}$

d) $3^{n+1} + n \cdot 2^{n-1}$

e) $4 \cdot 3^n - 2^{n-1}$

f) $3^{n+1} - 2^n + 6^{n-1}$

AL 186 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 - x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 - x \end{pmatrix}, \quad x \neq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix} \quad \text{f) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1 - 4035^n \end{pmatrix}$$

AL 187 Să se determine numerele reale a și b pentru care soluția ecuației

$$X^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) $a = 0, b = 0$

b) $a = 2017, b = \frac{1}{2017}$

c) $a = \frac{1}{2017}, b = 2017$

d) $a = 0, b = \frac{1}{2017}$

e) $a = 2017, b = 0$

f) $a = \frac{1}{2017}, b = \frac{1}{2017}$

AL 188 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad = bc$ și $a+d \neq 0$.

Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

a) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$

b) $(a+b+c+d)^n + 2$

c) $\frac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$

d) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$

e) $(a+b+c+d+2)^n$

f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

AL 189 Să se calculeze A^{36} , unde $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

- a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

AL 190 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017} .

- a) $2^{2017}A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

AL 191 Se consideră mulțimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1 + 4m & 6m \\ -2m & 1 - 3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a + b + ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 6(2^n - 1) \\ 2 + 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$ b) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} - 6 \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$
 c) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ d) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n + 1) \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$
 e) Da, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n - 1) \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix}$ f) Nu, $\begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$

AL 192 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

și $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n , unde n este un număr natural nenul.

- a) 2^{n+1} b) $5^n - 2^{n-1}$ c) $\frac{5^{n+1}}{3}$
d) $\frac{2^n}{3}$ e) $5^n - 1$ f) $\frac{4^n + 5^n}{3} + 1$

AL 193 Să se determine suma tuturor elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

- a) -2015 b) -2013 c) -2015 sau 2023
d) 2018 e) -2017 sau 2023 f) -2017 sau -2013

AL 194 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{2020} \begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$ f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 195 Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \dots + A^n(a)$ și să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{1}{n} B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a impar
- b) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a impar
- c) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a par
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a par
- e) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a impar
- f) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$, a par

AL 196 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$.

- a) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$
- b) 1
- c) $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$
- d) 0
- e) $-a_1 + b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3$
- f) -1

AL 197 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1 + \log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\text{tr}(A))^{\det A}$, unde $\text{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A .

- a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$
- b) 1
- c) 0
- d) $\frac{1}{2} \log_2 3$
- e) $\frac{3}{2} \log_3 2 + 3$
- f) $\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_2 3 + 3$

AL 198 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \sum_{k=1}^n A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B .

- a) $(2^{n+1} - 1)(3^n - 1)$
- b) 1
- c) 0
- d) $3(2^n - 1)(3^n - 1)$
- e) 6^n
- f) $\frac{1}{6^n}$

AL 203 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiția $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, 3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A .

- a) 2017 b) -2017 c) 1 d) -1 e) 0 f) 1009

AL 204 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ și

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - a - 1 & ac - a & a^2 - b^2 - c \\ b^2 + ab - a - 1 & a^2 - c^2 - b & ab - a \\ b^2c + bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

- a) $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ c) 1
 d) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 205 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c^3} & -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

- a) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$
 b) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$
 c) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$

$$d) \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$e) \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

$$f) \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$$

AL 206 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \leq i \leq n-1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$

f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 207 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluțiile ecuației $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $|x_1| + |x_2| + |x_3|$.

- a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) -3 f) 4

AL 208 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relațiile $AA^t = A^tA = I_3$ și are determinantul egal cu 1.

- a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 209 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A . Câte elemente are mulțimea $\{I_2, A, A^2, \dots, A^{2018}\}$?

- a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 210 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $AB \neq BA$ și $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \operatorname{tr}(A + B),$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X .

- a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 211 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

să aibă soluție nesingulară.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) \mathbb{R}
d) \emptyset e) $\{0\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

AL 212 Fie ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) 12 b) 5 c) -9 d) -4 e) 7 f) 3

AL 213 Să se determine mulțimea tuturor soluțiilor ecuației matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$
c) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$ f) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$

AL 214 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relația

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------|
| a) $2a + b = \det A$ | b) $a = 1, b = 2, c = 0$ |
| c) $a = 0, b = 2, c = -1$ | d) $a = -1, b = 2, c = 0$ |
| e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ | f) $a = 1, b = -2, c = 0$ |

AL 215 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \text{ sau } i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \text{ și } i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 216 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$ | b) $\left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ | c) $\left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup (1, +\infty)$ |
| d) $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$ | e) $\left(-\infty, \frac{1}{3} \right] \cup [2, +\infty)$ | f) $\left[\frac{2}{3}, 1 \right]$ |

AL 217 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc - 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine abc .

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 218 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ și

$$A^4 - (a + d)^2 A^2 + (ad - bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existența inversei lui A și în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1} .

- a) $\frac{a+d}{ad-bc} I_2$ b) nu există
c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{a+d} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$
e) A f) $\frac{1}{bc-ad} \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 219 Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ două matrice de forma

$$A = [a \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4], \quad \text{respectiv} \quad B = [b \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4],$$

unde a, b, c_2, c_3, c_4 sunt coloanele acestor matrice. Dacă

$$\det(A) = 1 \quad \text{și} \quad \det(B) = 4,$$

cât este determinantul matricei $C = [c_2 \mid a+b \mid c_3 \mid c_4]$?

- a) $\pm\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 224 Pentru câte valori ale parametrului real m , matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 225 Să se determine valorile parametrilor reali a și b pentru care matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

au același rang.

- a) $a = 1, b = 0$ b) $a = -1, b = 0$ c) $a = 0, b = 0$
d) $a = 0, b = 1$ e) $a = 0, b = -1$ f) $a = 1, b = 1$

AL 226 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$
d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

AL 227 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5y + mz + 8t = 7 \\ x - y + 5z - 3t = n \\ 3x - my + z + pt = 7, \end{cases}$$

unde $m, n, p \in \mathbb{R}$ și $n \neq 0$. Să se calculeze suma $m + p$ astfel încât sistemul să fie compatibil, iar rangul matricei sale extinse să fie egal cu 2.

- a) 1 b) 34 c) 17 d) -10 e) -20 f) -7

AL 228 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m - 1)z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

- a) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

AL 229 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz + 4t = p \\ 2x + 3y + z + 6t = 1 \\ -x - 2y + 3z + nt = 2, \quad m, n, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil și rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

- a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 230 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $-\frac{1}{10}$

b) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$

d) $\frac{1}{10}$

e) $-\frac{1}{20}$

f) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{20} \right\}$

AL 231 Fie sistemul

$$\begin{cases} -2x + my - 6z = m - 1 \\ mx - 2y + 7z = 1 - m \\ x + y + z = m^2 - 1, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $m = -2$

b) $m \in \emptyset$

c) $m = 3$

d) $m = 1$

e) $m = 2$

f) $m = -1$

AL 232 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

a) $(-24, 14, 19)$

b) $(-2, -3, 3)$

c) $(21, 10, -14)$

d) $(-5, -3, 6)$

e) $(-14, -21, 24)$

f) $(3, -2, -3)$

AL 233 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

Care din următoarele relații este verificată de soluțiile sistemului?

- a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$ b) $x + y + z = 3$ c) $x^2 + y - z^2 = -1$
 d) $x + y^2 - z^2 = 1$ e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ f) $x^2 + y + z^2 = 4z$.

AL 234 Soluția sistemului $(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$,

este $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată pentru orice valori posibile ale lui x_1 , x_2 și x_3 .

- a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
 d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 235 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}^* . \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) \mathbb{R}^* d) \mathbb{R}_+^* e) \mathbb{Q}^* f) $\{-1\}$

AL 236 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care soluția sistemului verifică relația $3x + 3y - z = 0$.

- a) $\{0\}$ b) \mathbb{R} c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 237 Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- a) $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(1, 0, 0)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$
c) $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, -1)$ d) $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$
e) $(0, 0, 1)$, $\left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ f) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$, $(0, 0, 1)$

AL 238 Fie sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

și (x_0, y_0, z_0) o soluție nebanală a sistemului. Să se determine valoarea raportului

$$\frac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}.$$

- a) $\frac{23}{5}$ b) 1 c) $\frac{7}{5}$ d) 2 e) -1 f) $-\frac{7}{5}$

AL 239 Fie sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluție.

- a) $a = b = c$ b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ c) $a \neq b, b \neq c, c \neq a$
 d) $\nexists a, b, c \in \mathbb{R}$ e) $a = b \neq c$ f) $a \neq b = c$

AL 240 Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită și soluții diferite de soluția banală.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\}$ c) $\{\pm 1\}$
 d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$

AL 241 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a + 3) = 0, \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este o soluție a sistemului.

- a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 242 Pentru care din următoarele cazuri de mai jos, sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este incompatibil?

- a) $a - b + c = 0$ b) $a, b, c \in \emptyset$ c) $a + b - c = 0$
d) $a + b - c \neq 0$ e) $a + b + c = 0$ f) $a + b + c \neq 0$

AL 243 Fie sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Care dintre următoarele propoziții matematice este adevărată?

- a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat
b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil
c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat
d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat
e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil
f) Toate afirmațiile sunt false

AL 244 Fie (x_t, y_t, z_t) soluția sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{t+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^t - \frac{1}{2^t} \\ 2x + y + z = 1 + 2^t + \frac{1}{2^t}, t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se determine

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t y_t z_t.$$

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 245 Fie S mulțimea soluțiilor reale ale sistemului

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 3y + 4z = 2. \end{cases}$$

Să se determine $\min_{(x,y,z) \in S} (x^2 + y^2 + z^2)$.

- a) 1 b) 1,4 c) 1,6 d) 2 e) 2,4 f) 3

AL 246 Pe mulțimea $(0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$.

Să se calculeze

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{50}.$$

- a) $\frac{1}{1225}$ b) $\frac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\frac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\frac{1}{1300}$

AL 247 Pe mulțimea $(-1, 1)$ se consideră legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Să se calculeze

$$\underbrace{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \dots * \frac{1}{2}}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4 \cdot 3^n - 32}{3^n - 4} & \text{b)} \frac{2^n}{2^n + 1} & \text{c)} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} \\ \text{d)} \frac{7 \cdot 2^{n-2} - 1}{13 \cdot 2^{n-3} + 1} & \text{e)} \frac{3^n - 1}{3^n + 1} & \text{f)} \frac{4^{n+1} - 1}{4^{n+1} + 1} \end{array}$$

AL 248 Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție

$$x \circ y = (x - a)^2 (y - a) + a, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației $x \circ x = x$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \{a, a - 1\} & \text{b)} \{a, a + 1\} & \text{c)} \{a - 1, a, a + 1\} \\ \text{d)} \{-a, 1 - a\} & \text{e)} \{-a, -a - 1\} & \text{f)} \{-a, 1 - a, -a - 1\} \end{array}$$

AL 249 Pe mulțimea numerelor reale se definește operația algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v) , $u, v > 0$, este soluția sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ (x \circ 2) + (y \circ 3) = 2\sqrt{13}, \end{cases}$$

să se determine $u + v$.

$$\text{a)} 1 \quad \text{b)} 0 \quad \text{c)} 5 \quad \text{d)} 19 \quad \text{e)} \sqrt{13} \quad \text{f)} \sqrt{19}$$

AL 250 Se consideră \mathbb{R} cu legea de compoziție $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operația de înmulțire a matricelor "·". Știind că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, să se determine mulțimea valorilor lui a .

- a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) \mathbb{R} d) \emptyset e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 251 Să se determine $k \in \mathbb{R}$, știind că mulțimea $[1, 3]$ este parte stabilă în raport cu operația $x \circ y = xy - 2x - 2y + k$.

- a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = 2$ d) $k = 3$ e) $k = 6$ f) $k = -2$

AL 252 Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua $\det A$, știind că și $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 253 Fie mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se determine valorile parametrilor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât (\mathcal{M}, \cdot) să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

- a) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ b) $\alpha = \beta, \gamma = 0$ c) $\beta = 2\alpha, \gamma = 1$
 d) $\alpha = 2\beta, \gamma = -1$ e) $\alpha = 2\beta, \gamma = 1$ f) $\alpha = -\beta, \gamma = 1$

AL 254 Pe mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziție $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. În care din următoarele cazuri legea este asociativă și comutativă?

- a) $a \in \{-3, 2\}, b = a$ b) $a \in \{-2, 3\}, b = a$ c) $a \in \{-1, 2\}, b = a$
 d) $a = -2, b = 3$ e) $a = -1, b = 2$ f) $a = -3, b = 2$

AL 255 Să se determine o relație între parametrii reali a și b astfel încât legea de compoziție $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe \mathbb{R} să fie asociativă.

- a) $a^2 = a + b$ b) $a = a^2 + b$ c) $b^2 + a = a^2$
d) $a + a^2 = b$ e) $2a = b + a^2$ f) $2b + a = a^2$

AL 256 Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$x * x = -2.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{-1\}$ c) $\{1, -1\}$ d) $\{2, -2\}$ e) $\{1, -2\}$ f) $\{-2\}$

AL 257 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi și să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

- a) $e = 1 + i, -1$ b) $e = 1 + i, i$ c) $e = 1, 1 - 2i$
d) $e = 1 - i, i$ e) $e = -i, 2 - i$ f) $e = 2 + i, 1 - i$

AL 258 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy + 2i(x + y) - 4 - 2i.$$

Să se determine elementul neutru e al acestei legi și să se calculeze

$$w = (1 - i) * (1 - i)^2 * (1 - i)^3 * (1 - i)^4 * (1 - i)^5.$$

- a) $e = 1 - 2i$ și $w = 1 - i$ b) $e = 2i$ și $w = -2i$
c) $e = 2i$ și $w = 1 - i$ d) $e = 2 - i$ și $w = -i$
e) $e = 1 - 2i$ și $w = -2i$ f) $e = -i$ și $w = 2 - i$

AL 259 Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

- a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 260 Pe mulțimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z} + 1$ se definește operația

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulțimea elementelor simetrizabile ale monoidului $(2\mathbb{Z} + 1, *)$.

- a) $\{-3, 1\}$ b) $2\mathbb{N} + 1$ c) $2\mathbb{Z} + 1$
 d) $\{-5, -3, 1, 3\}$ e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

AL 261 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului (\mathcal{M}, \cdot) , unde " \cdot " reprezintă operația de înmulțire a matricelor.

- a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 262 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2).$$

Să se determine elementele simetrizabile în raport cu această lege.

AL 266 Pe mulțimea \mathbb{R}_+^* se consideră legea de compoziție

$$x * y = 2^{\sqrt[3]{\log_2^3 x + \log_2^3 y - 8}}.$$

Știind că elementele 2^p și 2^q (unde $p, q \in \mathbb{R}$) sunt simetrice în raport cu legea dată, să se calculeze $p^3 + q^3$.

- a) 16 b) 2 c) 4 d) 32 e) 8 f) 24

AL 267 Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile față de legea $*$ din mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- a) $(b, 1), b \in \mathbb{Z}$ b) $(b, 0), b \in \mathbb{Z}$ c) $(b, \pm 1), b \in \mathbb{Z}$
 d) $(\pm 1, b), b \in \mathbb{Z}$ e) $(0, b), b \in \mathbb{Z}$ f) $(1, b), b \in \mathbb{Z}$

AL 268 Pe mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră legea de compoziție asociativă și comutativă $*$ definită prin

$$A * B = AB - 2A - 2B + 6I_2.$$

Să se studieze simetrizabilitatea elementelor lui \mathcal{M} în raport cu legea $*$. Dacă A' desemnează simetricul elementului A , să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată:

- a) În mulțimea \mathcal{M} nu există element neutru în raport cu $*$;
 b) I_2 este element neutru în raport $*$ și $A' = A^{-1}$ ($\forall A \in \mathcal{M}$);
 c) $3I_2$ este element neutru și toate elementele din \mathcal{M} sunt simetrizabile;
 d) $3I_2$ este element neutru și ($\forall A \in \mathcal{M}$ cu $x \neq 2$) este simetrizabil;
 e) I_2 este element neutru și $A' = (A - 2I_2)^{-1} + 2I_2$;
 f) $-I_2$ este element neutru și toate elementele din \mathcal{M} sunt simetrizabile.

AL 269 Pe mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

- a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 270 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dat și mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C}, A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are grupul G în raport cu înmulțirea matricelor?

- a) $(n-1)^2$ b) n c) $n-1$
d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) n^2

AL 271 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

Știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ și (G, \cdot) , unde relația " $*$ " este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar " \cdot " este înmulțirea matricelor, să se determine valoarea parametrului a .

- a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25

AL 272 Fie \mathbb{R}^* dotată cu legea de compoziție definită prin $a * b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulțirea matricelor " \cdot ". Știind că funcția

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow M, f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ și (M, \cdot) , să se determine mulțimea valorilor lui k .

- a) \mathbb{R} b) \mathbb{Z} c) \mathbb{Q} d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 273 Fie $G = (1, +\infty)$ care are o structură de grup față de operația ” $*$ ” definită prin

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : (0, +\infty) \rightarrow G, \quad f(x) = \sqrt{ax + b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

- a) $a = 0, b = 2$ b) $a = 1, b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0, b = 1$
 d) $a = 0, b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = b = 1$

AL 274 Pe mulțimea \mathbb{Z} se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ și } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile (\mathbb{Z}, \perp) și (\mathbb{Z}, \top) .

- a) $(1, -10), (-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$
 d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0), (-1, -10)$ f) $(1, 0)$

AL 275 Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5$, $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $a \neq \hat{0}$. Să se găsească toate funcțiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f_{a,b}^4 = f_{\hat{2},\hat{0}}^{2018} \circ f_{\hat{2},\hat{2}}^{2020} \circ f_{\hat{2},\hat{4}}^{2022},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n\text{-ori}}$.

- a) $f_{\hat{2},\hat{2}}$ b) $f_{\hat{1},\hat{2}}$ c) $f_{\hat{1},\hat{4}}; f_{\hat{2},\hat{1}}$ d) $f_{\hat{3},\hat{0}}$ e) $f_{\hat{2},\hat{0}}$ f) $f_{\hat{4},\hat{0}}$

AL 276 Fie legile de compoziție

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{și} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

- a) $e_{\perp} = \widehat{10}, e_{\top} = \widehat{3}$ b) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{3}$ c) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{6}$
d) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{4}$ e) $e_{\perp} = \widehat{4}, e_{\top} = \widehat{3}$ f) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{11}$

AL 277 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulțimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

- a) $\mathbb{Z}[i]$ b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ c) $\{1, i\}$
d) $\{\pm 1, \pm i\}$ e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ f) \emptyset

AL 278 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{și} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

- a) $a = b = c = 17$ b) $a = b = 1, c = 56$ c) $a = b = c = 7$
d) $a = b = 1, c = 7$ e) $a = b = c = 1$ f) $a = b = c = -1$

AL 279 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x * y = x + y - 2 \quad \text{și} \quad x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

- a) $a = 1, b = 0$ b) $a = 1, b = 1$ c) $a = 1, b = 2$
d) $a = 2, b = 1$ e) $a = 1, b = -2$ f) $a = -1, b = 2$

AL 280 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în \mathbb{Z}_{11} cu soluția (x_0, y_0) . Dacă y'_0 este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my'_0 = x_0$.

- a) $\widehat{5}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{3}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{10}$ f) $\widehat{9}$

AL 281 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluția $(\widehat{3}, \widehat{2})$ și să se specifice numărul total al soluțiilor.

- a) $a = \widehat{2}$, 5 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții b) $a = \widehat{4}$, 7 soluții; $a = \widehat{6}$, 3 soluții
 c) $a = \widehat{1}$, 3 soluții; $a = \widehat{5}$, 8 soluții d) $a = \widehat{3}$, 8 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții
 e) $a = \widehat{1}$, 5 soluții; $a = \widehat{5}$, 3 soluții f) $a = \widehat{3}$, 6 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții

AL 282 În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuația

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 283 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4}x \\ \widehat{6}x & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluțiile ecuației $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

AL 286 Fie polinoamele $f = X^3 + 2X^2 - X - 5$ și $g = X^2 + 1$. Să se determine câtul c și restul r ale împărțirii lui f la g .

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $c = X + 2, r = 0$ | b) $c = X^2 + 1, r = X + 2$ |
| c) $c = X + 2, r = -2X - 7$ | d) $c = -2X - 7, r = X + 2$ |
| e) $c = X + 1, r = -2$ | f) $c = X - 1, r = 0$ |

AL 287 Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că -1 este rădăcină a polinomului f și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6. Să se găsească apoi restul împărțirii lui f la $X^2 - X - 2$.

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $a = 1, b = 4, X + 1$ | b) $a = -1, b = 4, 2X + 2$ |
| c) $a = 1, b = 4, 2X + 2$ | d) $a = -1, b = 2, 2X + 1$ |
| e) $a = 1, b = 2, X + 2$ | f) $a = -1, b = 4, X - 1$ |

AL 288 Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ și restul împărțirii lui f la $X + 1$ să fie 3.

- | | |
|---------------------------|------------------------------------------|
| a) $a = 3, b = 2, c = 5$ | b) $a, b, c \in \emptyset$ |
| c) $a = -2, b = 3, c = 5$ | d) $a = 2, b = 3, c = 5$ |
| e) $a = 3, b = 2, c = -5$ | f) $b = 3, c = 2a + 1, a \in \mathbb{R}$ |

AL 289 Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $a, b, c \in \emptyset$ | b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ |
| c) $a = b = c = 0$ | d) $a = c = 1, b = -1$ |
| e) $a = c = -1, b = 1$ | f) $a = 1, b = -5, c = 4$ |

AL 290 Să se determine polinomul cu coeficienți raționali de grad minim care împărțit la $X^2 + 2X - 3$ dă restul $3X + 11$ și împărțit la $X^2 - 4X + 5$ dă restul $7X - 3$.

- a) $-X^3 - 4X + 12$ b) $X^3 + 2X - 17$ c) $-X^3 + 4X + 11$
d) $X^3 - 4X + 17$ e) $X^3 + 3X + 15$ f) $-X^3 + 17X - 5$

AL 291 Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

- a) X b) 0 c) $X - 2000$
d) $X + 2014$ e) $2016 \cdot 2014$ f) $X - 2016$

AL 292 Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât polinomul $f = (X - 1)^7 + a(X - 1)^4 + bX + c$ să se dividă cu $(X + 1)^3$.

- a) $a = 28, b = 448, c = 128$ b) $a = 56, b = 448, c = 576$
c) $a = 56, b = 320, c = 81$ d) $a = 28, b = 448, c = 192$
e) $a = 84, b = 320, c = 81$ f) $a = 28, b = 320, c = 128$

AL 293 Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul $X^9 + mX^2 + n$ să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

- a) $m = 0, n = 0$ b) $m = 0, n = -1$ c) $m = -1, n = 0$
d) $m = -1, n = -1$ e) $m = 1, n = 0$ f) $m = 0, n = 1$

AL 294 Să se determine restul împărțirii polinomului X^n la polinomul $X^2 + 2X - 3$.

- a) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$ b) $\frac{1}{4}[(1 + (-3)^n)X + 3 + (-3)^n]$
 c) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 - (-3)^n}{4}$ d) $\frac{2 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$
 e) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + 3^n}{4}$ f) $\frac{1}{4}[(1 + 3^n)X + 3 + (-3)^n]$

AL 295 Să se determine restul împărțirii polinomului $(X^3 + X + 1)^{19}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) -1 b) X c) $X + 1$ d) 0 e) $X - 1$ f) 1

AL 296 Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$ și să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0,$$

știind că are rădăcini opuse.

- a) $a = -3, \{1, 2, \pm\sqrt{2}i\}$ b) $a = -1, \{\pm 1, \pm 2\}$
 c) $a = 2, \{1, 2, \pm 2i\}$ d) $a = -2, \{1 \pm i, \pm 1\}$
 e) $a = -1, \{\pm 2, \pm i\}$ f) $a = -3, \{\pm 1, \pm\sqrt{2}i\}$

AL 297 Fie polinomul $f = X^4 + a^2X^3 - 7X^2 + aX + 6$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

- a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $\left\{-1, \frac{8}{9}\right\}$
 d) $\left\{-1, 0, \frac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1, 0\}$ f) $\{-1\}$

AL 298 Fie polinomul $f = X^3 + X^2 - 2X - 2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

- a) $(X + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ b) $(X - 1)(X^2 + 2)$
c) $(X + 1)(X^2 - 2)$ d) $(X - 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$
e) $(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ f) $(X + 1)(X^2 + 2)$

AL 299 Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

- a) $(X + \widehat{4})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ b) $(X + \widehat{4})(X + \widehat{2})(X^2 + \widehat{1})$
c) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})^2(X + \widehat{1})$ d) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})(X^2 + \widehat{1})$
e) $(X + \widehat{2})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ f) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{4})(X^2 + X + \widehat{1})$

AL 300 Fie polinomul $f = (1 - 2X)^{2017} + (3X - 2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .

- a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 301 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluția $1 + i$ și să se găsească celelalte soluții.

- a) $a = -6, b = 12, \{1 - i, -1, -6\}$ b) $a = -3, b = 6, \{1 - i, 1 + i, -1\}$
c) $a = 12, b = -6, \{1 - i, 1, 12\}$ d) $a = 6, b = -12, \{1 + i, -1, -3\}$
e) $a = -6, b = 12, \{1 - i, -1, 6\}$ f) $a = 4, b = 6, \{1 + i, 1, 6\}$

AL 302 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Știind că

$$xP(x - 1) = (x - 3)P(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

- a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

- a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) 0 f) $-\frac{3}{7}$

AL 309 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n , știind că restul împărțirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3 - \sqrt{3}$.

- a) $m = 0, n = 1$ b) $m = 1, n = 1$ c) $m = 1, n = 2$
d) $m = 2, n = 1$ e) $m = 2, n = 2$ f) $m = 1, n = 0$

AL 310 Știind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 , să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

- a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 311 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik}X^{k-1}, \quad i = \overline{1, 3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- a) -1 b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$
c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ d) 0
e) 1 f) $a_{12}a_{23}a_{31}$

AL 312 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde $x_i, i = \overline{1,3}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

- a) -1 b) 0 c) 1 d) 11 e) -11 f) 2

AL 313 Fie ecuația $x^3 - ax + a^2 = 0, a \in \mathbb{R}$, cu soluțiile x_1, x_2, x_3 . Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) $-a^2$ c) a^2 d) $2a^2$ e) $-3a^2$ f) $-2a^2$

AL 314 Știind că x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) 3 c) -17 d) $\frac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 315 Se consideră ecuația $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3 și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2 .

- a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 316 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1i & a_1 - b_1i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2i & a_2 - b_2i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3i & a_3 - b_3i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluțiile ecuației $x^3 + \alpha_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 3}$.

- a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1b_2c_3$
c) 0 d) 1
e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)(b_3 - c_3)$

AL 317 Fie $f = X + a$ și $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $-(a + b + c)^2$ e) 1 f) abc

AL 318 Suma soluțiilor comune ale ecuațiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

- a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1 + \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 319 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condițiile:

- (i) $P + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$;
(ii) $P - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.
Să se calculeze $P(0)$.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 320 Fie $P \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condițiile:

(i) $P + X$ este divizibil cu $(X - \sqrt{2})^2$;

(ii) $P - X$ este divizibil cu X^3 .

Să se calculeze $P(2)$.

- a) 2 b) 1 c) 3 d) -2 e) 4 f) -1

AL 321 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție injectivă. Să se determine suma coeficienților polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relația

$$-2x + 4 + 5f(x + 2) = 4f(3x - 2) + f(2x - 7P(x - 1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 322 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuației $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, atunci ele verifică relația:

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$

b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}$

c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$

d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$

e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$

f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$

AL 323 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3, m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine mulțimea valorilor parametrului m pentru care are loc relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

- a) \emptyset b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{ \pm \sqrt{\frac{10}{3}} \right\}$ e) $\left\{ \pm \sqrt{\frac{3}{10}} \right\}$ f) $\left\{ \pm \frac{10}{3} \right\}$

AL 324 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4 . Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} + \frac{1}{2-x_4}.$$

- a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 325 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2 .

- a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$
c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$
e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 326 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că soluțiile ecuației

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu rația număr natural.

- a) $a = 5, b = 67, c = 100$ b) $a = -15, b = 70, c = -120$
c) $a = 15, b = 70, c = 120$ d) $a = -5, b = 67, c = 100$
e) $a = 15, b = -70, c = 120$ f) $a = 5, b = -67, c = -100$

AL 327 Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b, a, b \in \mathbb{R}$, au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condițiile $x_1^3 = x_2$ și $x_2^3 = x_1$?

- a) niciunul b) 100 c) 4
d) 1000 e) o infinitate f) unul

AL 328 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

- a) 0 b) $9c - a^2 + 2ab$ c) $2ab - a^3 - 9c$
 d) $4ab - 9c - a^3$ e) $9c + a^2 - 4ab$ f) $c - a + bc$

AL 329 Împărțind polinomul X^8 la $X - 1$ se obține câtul q_1 și restul r_1 , împărțind polinomul q_1 la $X - 1$ se obține câtul q_2 și restul r_2 , iar continuând procedeul și definind recursiv polinoamele q_{k+1} și restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul și restul împărțirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, să se determine r_5 .

- a) 1 b) 2 c) 7 d) 70 e) 100 f) 700

AL 330 Fie α, β, γ soluțiile ecuației $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. Să se determine $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}$.

- a) -3 b) $-\frac{1}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) 3 e) 27

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120^\circ - \cos^2 30^\circ$.

- a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Se consideră expresia $E(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- a) 1 b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ e) 0 f) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2 \cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{12}$ f) $\frac{5\pi}{12}$

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \frac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ este:

- a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

TG 7 Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\cos x = -\cos 40^\circ,$$

unde $x \in (0, 360^\circ)$.

- a) $x \in \{140^\circ, 220^\circ\}$ b) $x \in \{135^\circ, 200^\circ\}$ c) $x \in \{135^\circ, 315^\circ\}$
d) $x \in \{45^\circ, 315^\circ\}$ e) $x \in \{125^\circ, 320^\circ\}$ f) $x \in \{135^\circ, 345^\circ\}$

TG 8 Se consideră următoarele propoziții matematice:

- (i) $\sin 144^\circ = \cos 54^\circ$; (ii) $\cos 2018^\circ = -\cos 38^\circ$;
(iii) $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$; (iv) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 85^\circ = \frac{3}{2}$;
(v) $(\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 80^\circ) \cos 70^\circ = 2 \sin 110^\circ$.

Câte dintre afirmațiile date sunt false?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 9 Care dintre numerele:

$a = \cos 55^\circ$, $b = \sin 155^\circ$, $c = \sin 15^\circ$, $d = \cos 170^\circ$, $e = \cos 100^\circ$, $f = \sin 106^\circ$

este cel mai aproape de zero?

- a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 10 Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ astfel încât $\cos a + \cos b = 0$.

- a) $\operatorname{tg}(a + b) + 1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 11 Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

- a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

TG 12 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 13 Să se calculeze $\cos \frac{3a}{2}$, știind că $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

- a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 14 Să se determine partea întreagă a numărului $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$.

- a) -4 b) -3 c) -1 d) 3 e) 4 f) 5

TG 15 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ astfel ca $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2$. Să se calculeze $\sin x$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 16 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) 2 b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 17 Să se calculeze $\sin^8 \frac{\pi}{8} + \cos^8 \frac{\pi}{8}$.

- a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{32}$ e) $\frac{7}{16}$ f) $\frac{19}{32}$

TG 18 Să se calculeze $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sqrt{3}$

TG 19 Fie $E(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă și valoarea minimă a expresiei.

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8

TG 20 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

TG 21 Să se calculeze $\cos 8x$ știind că $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

- a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

TG 22 Să se calculeze $\cos(x + 2y)$ știind că $x = \frac{4\pi}{3}$ și $\operatorname{tg} y = 2 - \sqrt{3}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 23 Fie a și b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ și } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a - b)$.

- a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

TG 24 Fie funcția $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

- a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

TG 25 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Să se determine imaginea funcției f .

- a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
 d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 26 Într-un triunghi dreptunghic ABC au loc relațiile $\cos B > \cos C$ și $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 6$. Să se calculeze $\sin B - \sin C$.

- a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

TG 27 Fie triunghiul ABC cu $AB = 4$ și $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ astfel încât latura (BC) are cea mai mică valoare posibilă. Dacă punctul P este egal depărtat de laturile triunghiului, să se calculeze AP .

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 1

TG 28 Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic în care între catete există relația $c - b = 1$, iar $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 30^\circ$, este:

- a) $\sqrt{3} + 1$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 1$ e) $3 + \sqrt{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 29 Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c cu $b = 5$, $c = 8$ și $\cos A = \frac{1}{4}$. Să se afle a .

- a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 30 Fie triunghiul PQR cu $PQ = 4$, $QR = 5$ și $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

- a) $\frac{29}{35}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{4}{7}$

TG 31 În triunghiul ABC , $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

TG 32 Aria triunghiului ABC este $10 m^2$. Să se determine AB știind că $AC = 4 m$ și unghiul \widehat{BAC} are 30° .

- a) $\frac{10}{3} m$ b) $5 m$ c) $\frac{10\sqrt{3}}{3} m$ d) $10 m$ e) $20 m$ f) $8 m$

TG 33 Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul \widehat{ABC} de 30° . Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

- a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) $4\sqrt{3}\text{ cm}$ e) $3\sqrt{3}\text{ cm}$ f) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

TG 34 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ și $\text{tg } A = -\sqrt{2}$. Să se determine BC .

- a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 35 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$ și punctul $P \in (BC)$ astfel încât $BP = 6$. Să se calculeze AP .

- a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 36 Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin C$.

- a) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 37 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 și un unghi de 60° . Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 38 Se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ și $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC .

- a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{20}{\sqrt{89} + 40\sqrt{3}}$ f) 4

TG 39 În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

- a) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{29\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{29\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{3\sqrt{29}}{5}$ e) $\frac{29\sqrt{5}}{45}$ f) $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

TG 40 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ și $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei (AD), $D \in (BC)$, a unghiului \widehat{BAC} .

- a) $3 - \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} - 6$ c) $\sqrt{6} - 2$
d) $3\sqrt{6} - 6$ e) $\sqrt{6} - 6$ f) $3\sqrt{6} - 3$

TG 41 Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul

$$\mathcal{P} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

și măsurile unghiurilor direct proporționale cu numerele 3, 4, 5. Să se afle aria triunghiului ABC .

- a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} + 3$ c) $\sqrt{3} + 3$
d) $4\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $6 + \sqrt{2}$

TG 42 Se consideră triunghiul ABC de laturi a, b, c , în care $m(\widehat{C}) = \frac{3\pi}{8}$, iar $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{8}$. Să se calculeze $E = 4\frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{c}$.

- a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $\sqrt{2} + 3$ d) 4 e) $3\sqrt{3} + 3$ f) $\sqrt{2} - 1$

TG 43 Triunghiul ABC are o latură de 9 cm și perimetrul de 50 cm. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

- a) 90 cm^2 b) 120 cm^2 c) $120\sqrt{2} \text{ cm}^2$
d) 200 cm^2 e) 400 cm^2 f) $300\sqrt{2} \text{ cm}^2$

TG 44 În triunghiul ABC , $AB = 2\sqrt{3}BC$ și $m(\widehat{C}) = m(\widehat{A}) + 30^\circ$. Să se calculeze $\sin B$.

- a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{11}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 45 Fie G centrul de greutate al triunghiului echilateral ABC ce are aria egală cu 18. Se notează cu \mathcal{M}_G mulțimea punctelor din interiorul triunghiului situate mai aproape de G decât de oricare dintre vârfurile triunghiului. Să se calculeze aria mulțimii \mathcal{M}_G .

- a) 6 b) $6\sqrt{3}$ c) 9 d) $9\sqrt{3}$ e) 12 f) 15

TG 46 Fie triunghiul ABC cu $CA = 2 \cos 15^\circ \cdot BC$ și $m(A) = m(B) - 15^\circ$. Să se determine $\cos C$.

- a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 47 Triunghiul obtuzunghic ABC are laturile $AC = 3$ și $BC = 7$, iar aria sa este egală cu $4\sqrt{5}$. Să se determine $\sin B$.

- a) $\frac{2}{7}, \frac{4\sqrt{5}}{21}$ b) $\frac{4}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{21}$ c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}$
 d) $\frac{4}{21}, \frac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{7}$ f) $\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{8\sqrt{5}}{7}$

TG 48 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmațiile:

- (i) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$; (ii) $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$;
 (iii) $\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OF} = \vec{0}$; (iv) $\vec{AO} - \vec{FO} = \vec{FA}$;
 (v) $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$; (vi) $\vec{CE} = -2\vec{AB} + \vec{BC}$.

Câte dintre afirmațiile de mai sus sunt corecte?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 1

TG 49 Asupra unui corp punctiform acționează două forțe cu aceeași origine, una de $8N$ și cealaltă de $7N$. Să se calculeze mărimea forței rezultante, știind că unghiul dintre cele două forțe este de 60° .

- a) $13N$ b) $\sqrt{41}N$ c) $\sqrt{111}N$
d) $15N$ e) $\sqrt{113 + 56\sqrt{3}}N$ f) $14N$

TG 50 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P și Q împart latură (BC) în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 51 În pătratul $ABCD$ cu latura de 6, punctele M și N aparțin laturii (BC) astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

- a) 12 b) $4\sqrt{10}$ c) $\frac{25}{2}$ d) 13 e) $8\sqrt{3}$ f) $9\sqrt{2}$

TG 52 Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC . Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ fie respectiv punctele D și E astfel ca $AB = 3 \cdot AD$ și $AC = 2 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care

$$k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4

- a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$
d) 30 e) $8\sqrt{5} + 12$ f) $6\sqrt{5} + 14$

TG 59 Fie triunghiul ABC cu $A(1, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(5, -1)$ și dreapta d de ecuație $x - y - 2 = 0$. Atunci:

- a) $A \in d$ b) $d \perp BC$ c) $d \cap [AB] = \emptyset$
d) d este bisectoarea unghiului ABC e) $d \parallel BC$
f) niciunul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat

TG 60 Fie punctele $A(1, 1)$, $B(2, \frac{1}{2})$, $C(-1, -4)$, $D(\frac{5}{2}, 3)$, $P(a, b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $a \cdot b$ știind că punctele A, B, P , respectiv C, D, P sunt coliniare.

- a) $\frac{28}{25}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{21}{16}$ d) $\frac{11}{10}$ e) 1 f) 2

TG 61 Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

- a) 6 b) 4 c) -6 d) -4 e) 3 f) -3

TG 62 Punctul $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, situat pe cercul trigonometric, se rotește în sens trigonometric în jurul originii cu 90° . Fie (a, b) coordonatele sale după rotire. Să se calculeze $\log_4 \left| \frac{a}{b} \right|$.

- a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4} - \log_2 3$ c) $\log_2 3 - \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

TG 63 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(2, 6)$. Să se calculeze distanța de la punctul $O(0, 0)$ la punctul de intersecție dintre dreapta suport a medianei din A cu dreapta suport a înălțimii din B .

- a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

TG 64 Pornind din punctul A de coordonate $(6, -1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant față de dreapta $d: x + 2y + 2 = 0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanța parcursă de P între cele două axe de coordonate.

- a) $\frac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

TG 65 Se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-3, -4)$, $D(4, 3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanța de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $\frac{5}{3}$

TG 66 Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele $d_1: 3x + 4y - 10 = 0$ și $d_2: y = mx + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 67 Fie punctele $A(0, 4)$ și $B(4, 0)$. Punctul $C(a, b)$ aparține segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a - b$.

- a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5} - 8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2} - 2$ f) $2\sqrt{5} - 4$

TG 68 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) și $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanță de A se intersectează dreptele MN și BC ?

- a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

TG 69 Prin simetricul punctului $A(-2, 3)$ față de punctul $B(1, 2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta d .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 70 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3})$. Câte drepte ce conțin cel puțin două din punctele considerate pot fi construite?

- a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 71 Fie $O(0, 0)$, $A(-1, 4)$, $B(5, 1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui față de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB .

- a) $(\frac{34}{15}, \frac{53}{15})$ b) $(2, 3)$ c) $(\frac{11}{5}, \frac{18}{5})$
d) $(\frac{7}{3}, \frac{11}{3})$ e) $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ f) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

TG 72 Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă d se numește *bine plasat* dacă distanța de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conține dreapta $d : 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 73 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC , unde $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ și $C(5, 4)$. Să se calculeze distanța de la P la dreapta AB .

- a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10 + \sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10 + \sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10 - \sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 74 Fie $A(2, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(5, a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $O(x_o, y_o)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , să se determine $x_o - y_o$.

- a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 75 Fie punctele $A(1, 3)$, $B(3, 5)$ și $C(c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Dacă $\{P\} = CA \cap Ox$, $\{Q\} = CB \cap Oy$, să se determine coeficientul unghiular al dreptei PQ .

- a) 1 b) 2 c) $-\frac{9}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) c

TG 76 Fie $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ și fie $C(a, b)$ pe dreapta $x + y = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC , să se determine $x_0 + y_0$.

- a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 77 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
 d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$

TG 78 Pe laturile AB , BC , CA ale triunghiului de vârfuri $A(4, 0)$, $B(3, 0)$ și $C(1, 4)$, se consideră respectiv punctele M , N , P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = 3, \quad \frac{NB}{NC} = 2, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{1}{6}.$$

Să se studieze dacă dreptele AN , BP și CM sunt concurente și în caz afirmativ să se găsească coordonatele punctului de concurență.

- a) nu sunt concurente b) $\left(\frac{19}{10}, \frac{12}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
 d) $\left(\frac{10}{7}, \frac{24}{7}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ f) $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

TG 79 Pe laturile AB și BC ale triunghiului de vârfuri $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(2, 5)$ se consideră respectiv punctele M , și N astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = a, \quad \frac{NB}{NC} = b, \quad a, b > 0.$$

Pentru ce valori ale lui a și b distanțele de la punctul I , de intersecție a dreptelor AN și CM , la cele trei laturi ale triunghiului ABC sunt egale între ele?

- a) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 1$ b) $a = \frac{\sqrt{130}}{5}$, $b = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ c) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$
 d) $a = 2$, $b = 2$ e) $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = 2$ f) $a = \sqrt{5}$, $b = 1$

TG 80 Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ față de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P și Q . Să se calculeze aria triunghiului POQ .

- a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 81 Se consideră punctele $A(1, 0)$ și $C(3, 1)$. Dacă (AC) este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor B și D .

- a) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 d) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{20}\right)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{29}{20}\right)$ f) $(2, -1)$, $(1, 1)$

TG 82 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x + 2y - 9 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$ și $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0, 0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C . Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}; 1$ d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2}; 1$

TG 83 Se dau punctele $A(4, 0)$ și $B(0, 2)$. Fie M, N proiecțiile punctului P , mijlocul segmentului (AB) , pe Ox , respectiv Oy . Dacă Q este punctul de intersecție al perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP , iar R punctul de intersecție al perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP , să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

- a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 84 Prin punctul A de intersecție al dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se arate că raportul distanțelor de la P la d_1 , respectiv la d_2 este constant și să se determine valoarea lui.

- a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 85 Fie punctele $A(2, 1), B(6, 1), C(4, 5)$ și mulțimea \mathcal{M}_A a punctelor din primul cadran situate mai aproape de A decât de celelalte două puncte date. Să se calculeze aria mulțimii \mathcal{M}_A .

- a) 12 b) 13 c) 14 d) $\frac{23}{2}$ e) $\frac{25}{2}$ f) $\frac{31}{2}$

TG 86 Prin simetricul punctului $A(4, 2)$ față de punctul $B(-1, 1)$ se construiește o dreaptă d de pantă $\frac{3}{2}$. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează d în punctul C . Să calculeze aria triunghiului ABC .

- a) $\frac{49}{2}$ b) 13 c) 26 d) $\frac{39}{2}$ e) 36 f) $\frac{13}{2}$

TG 87 Mulțimea punctelor $P(x, y)$ aflate la distanța r de punctul $Q(a, b)$ formează cercul de centru Q și rază r . Să se determine ecuația ce descrie acest cerc.

- a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ b) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - r^2 = 0$
 c) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$ d) $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
 e) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$ f) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

TG 88 Se consideră punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanța r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care din următoarele ecuații este verificată de toate punctele $P(x, y)$ ce se află la distanța r de punctul Q .

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0$
 c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 3 = 0$ d) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$
 e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

TG 89 Să se determine $m \in (0, \sqrt{10})$ pentru care există punctele N și P situate în primul cadran astfel încât $ON = OP = \sqrt{10}$ și $MNPQ$ este pătrat, unde $M(m, 0)$ și $Q(0, m)$.

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) 1 c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{2}$ e) 2 f) $\sqrt{5}$

TG 90 Se consideră punctul $Q(1, 0)$ și cercul de ecuație

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 100 .$$

Dacă punctul $P_0(x_0, y_0)$ este situat pe cerc la distanța maximă de Q să se calculeze $x_0 + y_0$.

- a) 12 b) 0 c) 14 d) 16 e) 24 f) 22

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(simbol AM)

AM 1 Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 2}$, $(y_n)_{n \geq 1}$, $(z_n)_{n \geq 9}$, $(w_n)_{n \geq 0}$ cu termenii generali

$$x_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}, y_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2}, z_n = \frac{\sqrt{n!} + (-1)^n}{n!}, w_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{2^{2n}}.$$

Atunci

- | | | |
|----|---------------------------|---------------------------|
| a) | (x_n) este descrescător | (x_n) nu este monoton |
| | (y_n) nu este monoton | (y_n) nu este monoton |
| | (z_n) nu este monoton | (z_n) este descrescător |
| | (w_n) nu este monoton | (w_n) este descrescător |
| c) | (x_n) nu este monoton | (x_n) este descrescător |
| | (y_n) nu este monoton | (y_n) este crescător |
| | (z_n) nu este monoton | (z_n) nu este monoton |
| | (w_n) nu este monoton | (w_n) este descrescător |
| e) | (x_n) este descrescător | (x_n) , descrescător |
| | (y_n) este descrescător | (y_n) , nu este monoton |
| | (z_n) nu este monoton | (z_n) , descrescător |
| | (w_n) nu este monoton | (w_n) , nu este monoton |

AM 2 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + n^{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

- a) 1 b) 2 c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{10}$ f) nu există

AM 3 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^n \sin \frac{n! \pi}{49}$.

- a) $\frac{1}{7}$ b) 0 c) $\frac{\pi}{7}$ d) 7 e) $\frac{1}{49}$ f) nu există

AM 4 Se considera limitele $L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{3n+5} - \sqrt{3n-5})}$,
 $L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{4n+5} - \sqrt{3n-5})}$ și $L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} (\sqrt{3n^2+5} - \sqrt{3n^2-5})}$.

Atunci

- a) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = \infty$ b) $L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0$
c) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = 0$ d) $L_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, L_2 = \infty, L_3 = \infty$
e) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = 0, L_3 = \infty$ f) $L_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = 0$

AM 5 Să se determine parametrii reali a și b astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{8n^3 + bn^2 + a} - an + b \right) = 13.$$

- a) $a = -2, b = 12$ b) $a = 2, b = 12$ c) $a = 2, b = 10$
d) $a = 2, b = 8$ e) $a = -2, b = 13$ f) $a = 2, b = 6$

AM 6 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

- a) ∞ b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{e}$ e) $\frac{1}{2}$ f) nu există

AM 7 Fie $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n + \frac{k}{n}}, n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $1 - \ln 2$ d) 1 e) 2 f) ∞

AM 8 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{n^3 + k^2}$.

- a) 2 b) 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) ∞

AM 9 Fie $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k j^2 \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{n^4}.$$

- a) 1 b) e c) e^3 d) e^4 e) e^{12} f) ∞

AM 10 Să se calculeze limita șirului cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k-1}{3^k \cdot k!}$.

- a) 0 b) 1 c) 3 d) $\ln 3$ e) 2 f) ∞

AM 11 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{25k^2 - 15k - 4}$.

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) 0 d) 5 e) $\frac{4}{25}$ f) 15

AM 12 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6k+1}{4^k}$.

- a) ∞ b) 7 c) 6 d) $\frac{3}{2}$ e) 0 f) 3

AM 13 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \arctan \frac{2}{(k-1)^2}$.

- a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $L = \infty$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{4}$ f) nu există

AM 14 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^1 + 2(n-1)C_n^2 + 3(n-1)^2 C_n^3 + \dots + n(n-1)^{n-1} C_n^n}{1 + nC_n^1 + n^2 C_n^2 + \dots + n^n C_n^n}.$$

- a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e+1$ f) ∞

AM 15 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$x_n = \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{3}{4}$ d) $\ln 3$ e) $\frac{1}{2}$ f) ∞

AM 16 Fie limitele

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi n + (-1)^{n+1}}{4n} \right) \text{ și } L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi n^2 + (-1)^n}{4n^2} \right).$$

Atunci

- a) $L_1 = L_2 = 1$ b) $L_1 = \frac{1}{4}$ și L_2 nu există
c) $L_1 = \frac{1}{4}, L_2 = 1$ d) L_1 nu există și $L_2 = 1$
e) $L_1 = L_2 = \frac{1}{4}$ f) L_1 și L_2 nu există

AM 17 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \geq 1$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 3 f) ∞

AM 18 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Atunci:

- a) șirul este crescător și mărginit
 b) șirul este crescător și are limita ∞
 c) șirul este crescător și are limita $\sqrt{2}$
 d) șirul este descrescător și nemărginit
 e) șirul este descrescător și are limita $\sqrt{2}$
 f) șirul este mărginit și nemonoton

AM 19 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

- a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e e) $e + 1$ f) ∞

AM 20 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$.

- a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 21 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - \ln(x^2 + 1)}{x^2}$.

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 22 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 2^x}{2^x - 4}$.

- a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\frac{1}{\ln 2}$ e) $\ln \sqrt{2}$ f) e

AM 23 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{12x} + 1)}{\ln(1 + e^{3x})}$.

- a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) $+\infty$ f) 1

AM 24 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) $\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{2}$

AM 25 Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \pi}{x - \pi} \right)^x$.

- a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^π d) π^2 e) π f) e

AM 26 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1) - \cos x + e^{x^2}}{10x^2}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{5}{4}$

AM 27 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 28 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\pi})^{\frac{1}{x}}$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) $+\infty$ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 29 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(e^{\frac{1}{x^2+1}} - e^{\frac{1}{x^2}} \right)$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 30 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{x}{4} \right]}{x}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 31 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1))$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 32 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2} \right).$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) ∞

AM 33 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x \right)$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) -1 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 34 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + a) - x)(e^x + x) = 1.$$

- a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 35 Să se determine mulțimea tuturor valorilor posibile ale parametrului $a \geq 0$ pentru care limita

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x^a}$$

există și este un număr real nenul.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2, +\infty)$ e) $(0, 2)$ f) $\{0, 3\}$

AM 36 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x.$$

- a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) $+\infty$

AM 37 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\frac{1}{e^2}$

AM 38 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{e^x - 1}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) nu există c) 1 d) $+\infty$ e) 3 f) 2

AM 39 Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(2 - \{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\frac{3}{2}$

AM 40 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 41 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$$

- a) 0 b) 1 c) $n(n + 1)$
 d) $\frac{n(n + 1)}{2}$ e) $n + 1$ f) n

AM 42 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 43 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{|x|}$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 44 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x}.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) $+\infty$ e) $\frac{n}{2}$ f) $\frac{n(n+1)}{4}$

AM 45 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (26 - 5x)^{\frac{1}{x-5}}$.

- a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^5 f) e^{-1}

AM 46 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\frac{1}{\ln x} \right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , iar în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) $+\infty$ f) nu există

AM 47 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln |x|} \right\},$$

unde $\{t\}$ este partea fracționară a lui t , iar în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{2}{e}$

AM 48 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

- a) $+\infty$ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 49 Fie $a > 0$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

- a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 50 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^{2018}) - \ln^{2018}(1 + x)}{x^{2019}}.$$

- a) 2018 b) 0 c) 1 d) 1009 e) 2017 f) 1010

AM 51 Să se calculeze limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{12} - \sin^{12}(x)}{x^{14}}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 6 e) 12 f) 24

AM 52 Se consideră funcția $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, unde a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere naturale nenule și diferite de 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \dots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

AM 53 Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |2x^2 + x|, g(x) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Să se calculeze media geometrică a următoarelor trei limite:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{g(x)}, l_2 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)^{g(x)}, l_3 = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)^{g(x)}.$$

- a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c) $\sqrt[3]{e}$ d) e e) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ f) \sqrt{e}

AM 54 Să se calculeze limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right].$$

- a) $-\frac{e}{2}$ b) $-e$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) e f) $\frac{e}{2}$

AM 55 Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x.$$

- a) $y = 0$ b) $y = \frac{1}{2}$ c) $y = 2x - \frac{1}{2}$
d) $y = -2x - \frac{1}{2}$ e) $y = -2x + \frac{1}{2}$ f) $y = 2x + \frac{1}{2}$

AM 56 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ | b) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$ | c) $y = \pm \frac{\pi}{2}x + 1$ |
| d) $y = \pm \frac{\pi}{2}x - 1$ | e) nu există | f) $y = \frac{\pi}{2}x$ |

AM 57 Să se studieze existența asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine ecuația sa.

- | | | |
|-----------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------|
| a) $y = x + \frac{1}{2}$ | b) $y = \sqrt{2}x$ | c) $y = x + 1$ |
| d) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$ | e) nu există | f) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ |

AM 58 Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|------------------------|----------------|-----------------------|
| a) $y = x$ | b) $y = x + 1$ | c) $y = 0$ |
| d) nu există asimptote | e) $x = 0$ | f) $x = 0$ și $y = 0$ |

AM 59 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|----------------|------------|--------------|
| a) $y = 0$ | b) $y = x$ | c) nu există |
| d) $y = x + 1$ | e) $x = 0$ | f) $y = 2x$ |

AM 60 Fie funcția $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$. Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

- a) $y = 0$ b) $y = 2$ c) $y = 1$
d) $y = 2x$ e) $y = x$ f) toate răspunsurile sunt false

AM 61 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- a) $(0, +\infty)$ b) $\{1\}$ c) $(-1, 2)$
d) \emptyset e) $[0, +\infty)$ f) \mathbb{R}

AM 62 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine toate valorile parametrilor reali a, b astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

- a) $a = 0, b = -2$ b) $a = 1, b = 0$ c) $a = 0, \forall b \in \mathbb{R}$
d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -2, \forall b \in \mathbb{R}$ f) $a = 0, b = 0$

AM 63 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine toate asimptotele la graficul funcției f .

- a) $x = 0$ este asimptotă verticală
b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$
c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$
d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

AM 64 Se consideră $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $y = 0$ | b) $y = x - 1$ | c) $y = -\frac{\pi}{2}$ |
| d) $y = -\frac{\pi}{2}x$ | e) $y = -\frac{\pi}{4}$ | f) $y = 2\pi x$ |

AM 65 Să se determine asimptotele la graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

- a) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- c) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- d) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- f) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 66 Să se determine asimptotele la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}.$$

- a) $y = 2x, y = -2x$ b) $y = 1 + x, y = -x$ c) $y = 1 - x, y = x$
d) $y = x, y = -x$ e) $y = 1 - x, y = 1 + x$ f) $y = 2x, y = 1 - x$

AM 67 Fie $a > 0$ și funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a},$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiție. Știind că funcția f nu are asimptote verticale, să se studieze existența altor asimptote la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- a) $y = 0, y = -x$ b) $y = 0$ c) $y = 0, y = x$
d) $y = 0, y = x + 1$ e) $y = 1, y = x$ f) nu are asimptote

AM 68 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiție. Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

- a) $x + y + 2 = 0$ b) $y = x - 2$ c) $x = 2$
d) $y = 2 - x$ e) $x = 2, y = -x - 2$ f) $y = \pm x + 2$

AM 69 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$. Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?

P_1 : f nu admite asimptotă orizontală spre $-\infty$.

P_2 : f admite asimptotă oblică spre $-\infty$.

P_3 : Axa Ox este una dintre asimptotele funcției f .

P_4 : f admite cel puțin o asimptotă verticală, printre care dreapta de ecuație $x = 1$.

P_5 : f admite cel mult o asimptotă orizontală.

P_6 : f admite exact o asimptotă oblică, care este o dreaptă ce trece prin origine.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 70 Fie $f : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f . Câte dintre următoarele propoziții sunt adevărate?

P_1 : Dreapta de ecuație $y = 2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_2 : Dreapta de ecuație $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_3 : Nu se pune problema existenței asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

P_4 : Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

P_5 : Dreapta de ecuație $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției f .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 71 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x|x|(1 - \cos x)$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și în cazul în care acestea există, să se determine ecuațiile lor.

- a) $y = -2$ este asimptotă spre $-\infty$ b) $y = -\frac{x}{2}$ este asimptotă spre $-\infty$
 $y = 2$ este asimptotă spre ∞ $y = \frac{x}{2}$ este asimptotă spre ∞
 $x = 0$ este asimptotă verticală $x = 0$ este asimptotă verticală

- c) $y = \frac{x}{2}$ este asimptotă spre ∞ d) $y = -\frac{x}{2}$ este asimptotă spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală $y = \frac{x}{2}$ este asimptotă spre ∞

- e) f nu admite asimptote f) $y = -x + 2$ este asimptotă spre $-\infty$
 $y = x - 2$ este asimptotă spre ∞

AM 72 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \left[\frac{2}{x} \right], & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

- a) 0 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\frac{1}{3}$

AM 73 Se consideră funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & \text{dacă } x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

- a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 74 Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

- a) f este continuă pe $[0, 1]$
b) f este discontinuă în punctul $x = 0$
c) f este discontinuă în punctul $x = \frac{1}{2}$
d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$
e) f este discontinuă în punctul $x = 1$
f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 75 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \setminus \{\pi\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|$$

în punctul π . În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelungete \tilde{f} .

- a) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$
- b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$
- c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$
- d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
- e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$
- f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

AM 76 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(3 \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

în punctele $a = -1$ și $b = 1$. În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelungete \tilde{f} .

- a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1, 1]$
- b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

- c) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$
- d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3\pi, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$
- e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} -3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x = 1 \end{cases}$
- f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

AM 77 Fie funcția continuă $f : [1, 100) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x . Dacă $\text{Im} f = [m, M]$, să se determine $M - m$.

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $a^2 + a$ d) ab e) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ f) $\frac{(a+b)^2}{4}$

AM 78 Se consideră funcțiile $f, g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [1, e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(1+f(x))}.$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0, e) : g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ și } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine S .

- a) 1 b) $1 + e$ c) $1 - e$ d) $e - 1$ e) 0 f) e

AM 79 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f . Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale funcției f .

- a) $[1, 4)$ b) $[1, 4]$ c) $(0, \infty)$ d) $[1, \infty)$ e) $(1, \infty)$ f) $[1, \infty) \setminus \{4\}$

AM 80 Se consideră funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1+|x|}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se determine mulțimea C a punctelor de continuitate ale lui f , respectiv mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f .

- | | |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| a) $C = D_1 = (0, \infty)$ | b) $C = [0, \infty), D_1 = (0, \infty)$ |
| c) $C = D_1 = \mathbb{R}$ | d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$ |
| e) $C = \mathbb{R}, D_1 = \mathbb{R}^*$ | f) $C = [-1, 1], D_1 = (-1, 1)$ |

AM 81 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) f este continuă și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 b) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 c) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $2f(1) = f'(1)$
 d) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = f'(1)$
 e) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = 2f'(1)$
 f) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = -f'(1)$

AM 82 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției în punctul $x_0 = 1$ și în caz afirmativ să se calculeze $f'(1)$.

- a) f este derivabilă și $f'(1) = \frac{1}{e}$ b) f este derivabilă și $f'(1) = -\frac{1}{e}$
 c) f este derivabilă și $f'(1) = 0$ d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$
 e) f este derivabilă și $f'(1) = e$ f) f este derivabilă și $f'(1) = -e$

AM 83 Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă și $f'(0) = -1$ b) f este derivabilă și $f'(0) = 1$
 c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$ d) f este derivabilă și $f'(0) = 0$
 e) f este derivabilă și $f'(0) = 2$ f) f este derivabilă și $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM 84 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

- a) $a = 4, b = 0$ b) $a = 3, b = 0$ c) $a \in \mathbb{R}, b = 5$
 d) $a = 3, b \in \mathbb{R}$ e) $a = 4, b = 1$ f) $a = -1, b = 4$

AM 85 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinați parametrii reali a, b astfel încât funcția f să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

- a) $a = 1, \forall b \in \mathbb{R}$ b) $a = b = 0$ c) $\forall a \in \mathbb{R}, b = 0$
 d) $a = 1, b = 0$ e) $a = b = 1$ f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$

AM 86 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcției f .

- a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$

AM 87 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 88 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Determinați domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate D_1 .

- a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

AM 89 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min \{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dacă notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ nu este derivabilă în } x\},$$

atunci $S = \sum_{x \in A} x^2$ este:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 90 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2 + 1)^{x^2+1}$.

- a) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ b) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$
 c) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ d) $2x [\ln(x^2 + 1) + 1]$
 e) $2x(x^2 + 1) [\ln(x^2 + 1) + 1]$ f) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$

AM 91 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1 - x^2) + \sqrt{x^2 + 1}$. Să se calculeze derivata funcției f în $x_0 = 1$.

- a) $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2} - 4}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2 + \sqrt{2}$

AM 92 Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

să fie continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) nu există f) $\sqrt{2}$

AM 93 Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t} \cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine accelerația mobilului după 2 secunde.

- a) $e^{-2} \cos 2$ b) $2e^{-2} \cos 2$ c) $2e^{-2} \sin 2$
 d) $e^{-2} \sin 2$ e) $\frac{e^{-2} \sin 2}{2}$ f) $\frac{e^{-2} \cos 2}{2}$

AM 94 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă și în caz afirmativ să se calculeze limita

$$L = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

- | | |
|------------------------------------------|------------------------------------|
| a) f este inversabilă și $L = +\infty$ | b) f este inversabilă și $L = 0$ |
| c) f este inversabilă și $L = 1$ | d) f este inversabilă și $L = e$ |
| e) f este inversabilă și $L = e^{-1}$ | f) f nu este inversabilă |

AM 95 Fie funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{x}{e^x}$ și funcțiile $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

- | | | |
|---------------|-------------------|------------------|
| a) 0 | b) xe^{-x} | c) xe^{-2x} |
| d) $(x-1)e^x$ | e) $(2x-3)e^{-x}$ | f) $(x-2)e^{-x}$ |

AM 96 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g : (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mx f'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

- | | | | | | |
|------|------------------|------|------|------|-------|
| a) 2 | b) $\frac{1}{2}$ | c) 0 | d) 4 | e) 1 | f) -1 |
|------|------------------|------|------|------|-------|

AM 97 Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$. Să se calculeze $f'(x)$.

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| a) $f'(x) = \frac{x}{2}$ | b) $f'(x) = \frac{1}{x + \pi}$ | c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x + \pi}}$ |
| d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | e) $f'(x) = \frac{1}{2}$ | f) $f'(x) = 1$ |

AM 98 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = |x^2 + |x^2 - x| - 1|.$$

Notăm cu M mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă și $S = \sum_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcției f în punctul x . Să se determine S .

- a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM 99 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietățile:

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = 5xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ și $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) $f(0) = 1, f'(x) = 5x$ b) $f(0) = 0, f'(x) = 5x$
c) $f(0) = 2, f'(x) = 2x + 5$ d) $f(0) = 1, f'(x) = 5x + 2$
e) $f(0) = 0, f'(x) = 5x + 2$ f) $f(0) = 0, f'(x) = 2x + 2$

AM 100 Fie $a > 0$ și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x+a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Să se determine mulțimea valorilor lui a astfel încât f să fie convexă.

- a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ d) \emptyset e) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ f) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right)$

AM 101 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

- a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 102 Fie funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(0)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) nu există e) 2 f) $-\frac{1}{2}$

AM 103 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2012 - 2013 \sqrt[2013]{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

- a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = x$
 d) $y = 0$ e) $y = 1$ f) $y = 2$

AM 104 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$ în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

- a) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ b) $y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ c) $y = 3$
 d) $y = x + 2$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = -2x + 1$

AM 105 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
 d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$ f) $y = 7x - 4$

AM 106 Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$, dreapta $y = ax - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$?

- a) 1 b) -1 c) 7 d) 2 e) -2 f) 0

AM 107 Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x = 0$, $x = 3$.

- a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{5}{4}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{3}$

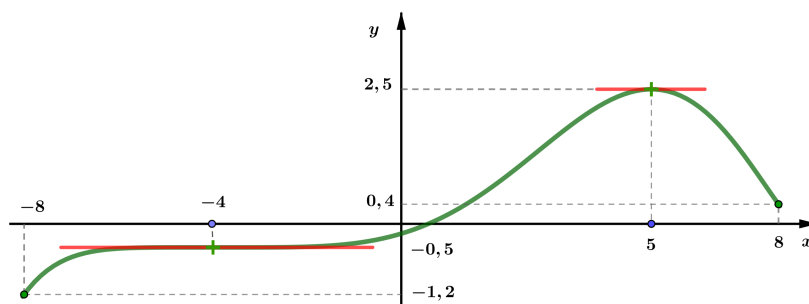
AM 108 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$.

- a) (1, 1) b) (0, 1) c) (1, 0)
 d) (2, 0) e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$

AM 109 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

- a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$
 d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

AM 110 Graficul derivatei unei funcții f , derivabilă pe $[-8, 8]$, este dat în figura următoare:



Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției f are exact două tangente paralele cu dreapta $y = mx$.

- | | | |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------|
| a) $m \in \emptyset$ | b) $m \in \mathbb{R}$ | c) $m \in (-\infty, -1, 2)$ |
| d) $m \in \left[\frac{5}{2}, +\infty, \right)$ | e) $m \in \left[\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$ | f) $m \in [-8, 8]$ |

AM 111 Cerința de omologare a unui tobogan este ca panta tangentei profilului lateral în orice punct al său să fie cuprinsă între -1 și 1 . Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât profilul tipului de tobogan descris de funcția

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{mx^2}{9} - \frac{8x}{9} + m + \frac{5}{3},$$

să respecte condiția de omologare.

- | | | |
|----------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $m \in \emptyset$ | b) $m \in \mathbb{R}$ | c) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right)$ |
| d) $m \in \left[\frac{1}{6}, 1\right]$ | e) $m \in (1, +\infty)$ | f) $m \in \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right]$ |

AM 112 Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulțimea punctelor de inflexiune ale lui f .

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ | b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ | c) \emptyset |
| d) $\{-1\}$ | e) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ | f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ |

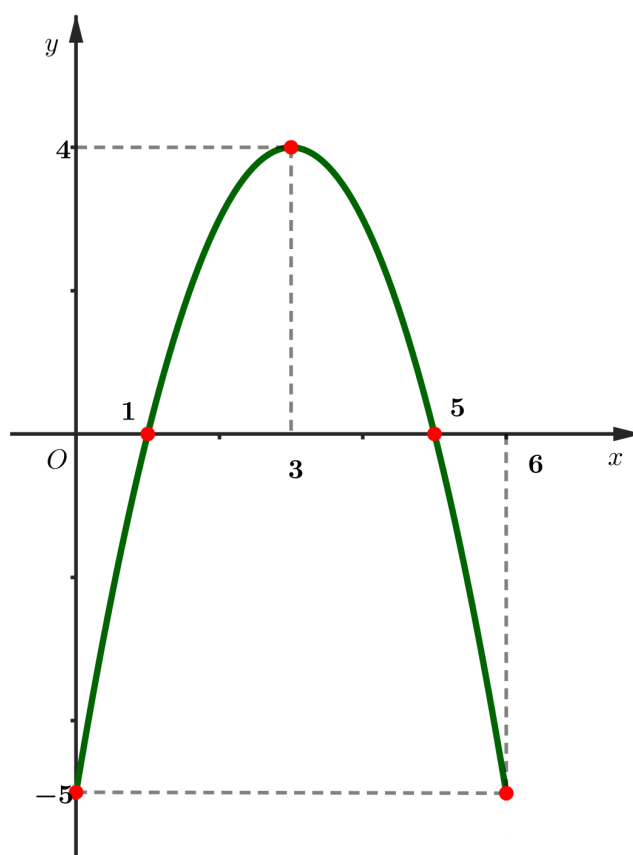
AM 113 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| a) 1 | b) 2 | c) 0 | d) 3 | e) 4 | f) 5 |
|------|------|------|------|------|------|

AM 114 Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - \ln x$, $a > 0$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui f .

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4 f) depinde de valoarea lui a

AM 115 Graficul derivatei unei funcții $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat mai jos. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?



- $P_1 : f$ este strict crescătoare pe $(0, 3)$;
 $P_2 : f$ este strict descrescătoare pe $(3, 6)$;
 $P_3 : f$ strict crescătoare pe $(1, 5)$;
 $P_4 : f$ strict descrescătoare pe $(0, 1) \cup (5, 6)$;

P_5 : f strict crescătoare pe $(0, 1)$;

P_6 : f strict descrescătoare pe $(3, 5)$.

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| a) P_2 și P_5 | b) P_1 și P_2 | c) P_3 și P_5 |
| d) P_3 și P_4 | e) P_2 și P_6 | f) P_1 și P_6 |

AM 116 Graficul derivatei unei funcții $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat la problema **AM 100**. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?

P_1 : $x = 1$ este punct de minim al funcției f ;

P_2 : $x = 5$ este punct de maxim al funcției f ;

P_3 : $x = 1$ este punct de maxim al funcției f ;

P_4 : $x = 5$ este punct de minim al funcției f ;

P_5 : funcția f nu are puncte de extrem;

P_6 : $x = 3$ este punct de maxim al funcției f .

- | | | |
|-------------------|----------|-------------------|
| a) P_1 și P_2 | b) P_3 | c) P_4 |
| d) P_5 | e) P_6 | f) P_3 și P_4 |

AM 117 Graficul derivatei unei funcții $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat la problema **AM 100**. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?

P_1 : f este convexă pe $(0, 3)$;

P_2 : f este concavă pe $(3, 6)$;

P_3 : f este convexă pe $(3, 6)$;

P_4 : f este concavă pe $(0, 3)$;

P_5 : f este convexă pe $(0, 6)$;

P_6 : f este concavă pe $(0, 6)$.

- | | | |
|-------------------|----------|-------------------|
| a) P_1 și P_2 | b) P_3 | c) P_4 |
| d) P_5 | e) P_6 | f) P_3 și P_4 |

AM 118 Graficul derivatei unei funcții $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat la problema **AM 100**. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?

P_1 : f nu are puncte de inflexiune;

P_2 : $x = 1, x = 5$ sunt puncte de inflexiune ale funcției f ;

P_3 : $x = 3$ este punct de inflexiune al funcției f ;

P_4 : $x = 1$ este punct de inflexiune al funcției f ;

P_5 : $x = 5$ este punct de inflexiune al funcției f ;

P_6 : $x = 0, x = 6$ sunt puncte de inflexiune ale funcției f .

- a) P_1 b) P_2 c) P_3 d) P_4 e) P_5 f) P_6

AM 119 Funcția $f : D_{\max} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{ab}{a + (b - a)e^{-rt}}$, cu parametrii a, b și r pozitivi (funcția logistică) modelează evoluția numărului de indivizi ai unei specii. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată:

- a) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită și își atinge marginile;
- b) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare și nemărginită pe D_{\max} ;
- c) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită și își atinge marginile;
- d) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare, mărginită dar nu își atinge marginile;
- e) Dacă $b > a$, atunci f este crescătoare, mărginită dar nu își atinge marginile;
- f) Dacă $b < a$, atunci f este descrescătoare și nemărginită pe D_{\max}

AM 120 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) \emptyset

AM 121 Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f precizând și natura acestora.

- | | |
|---------------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(e, 2e)$, minim local | b) $(e, \frac{1}{2e})$, maxim local |
| c) $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$, maxim local | d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local |
| e) $(\sqrt{e}, \frac{1}{2e})$, minim local | f) $(\frac{1}{e}, 2e)$, minim local |

AM 122 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) \emptyset d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

AM 123 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcției f .

- a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 124 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) \emptyset

AM 125 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$
d) $\{0, 1\}$ e) $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ f) \emptyset

AM 126 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) .$$

- a) $\{2, 4 \pm \sqrt{5}\}$ b) $\{4, 2 \pm \sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$
d) $\{4\}$ e) $\{4, 4 \pm \sqrt{5}\}$ f) $\{2, 2 \pm \sqrt{5}\}$

AM 127 Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

- a) un punct de minim local
b) un punct de maxim local
c) două puncte de maxim local
d) două puncte de minim local
e) un punct de minim local și un punct de maxim local
f) nu are puncte de extrem local

AM 128 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - 3x^2|} .$$

- a) f are doar două puncte de extrem local: 0 și 3
b) f nu are puncte de extrem local
c) f are un singur punct de extrem local: 2
d) f are trei puncte de extrem local: 0, 1 și 3
e) f are trei puncte de extrem local: 0, 2 și 3
f) f are doar două puncte de extrem local: -1 și 3

AM 129 Se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcției $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC .

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{e}$ d) $\frac{2}{e}$ e) $\frac{4}{e}$ f) $\frac{12}{e^3}$

AM 130 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem local.

- a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(-\infty, -1)$
 d) $(1, \infty)$ e) $(0, 1)$ f) \mathbb{R}^*

AM 131 Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{2+x}.$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f precizând și natura acestora.

- a) $(-1, e)$, maxim local b) $(1, \frac{e}{3})$, minim local
 c) $(-1, \frac{1}{e})$, maxim local d) $(1, \frac{e}{3})$, maxim local
 e) $(-1, \frac{1}{e})$, minim local f) $(1, e)$, maxim local

AM 132 Să se determine valoarea minimă a funcției $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

AM 133 Să se determine punctul de minim al funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

AM 134 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x b^{1-x} + b^x a^{1-x}$, cu $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Atunci:

- a) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
b) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
c) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcției f
d) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
e) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
f) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f

AM 135 Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x + 1}.$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 136 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{|1 - x^2|}$ și mulțimile

$$E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ este punct de extrem local al lui } f\},$$

respectiv

$$I = \{x \in \mathbb{R} : (x, f(x)) \text{ este punct de întoarcere pentru graficul funcției } f\}.$$

Știind că $|A|$ notează numărul de elemente ale unei mulțimi finite A , să se calculeze $|E|^{|I|}$.

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 9 f) 6

AM 137 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|\ln|x-2||}}{x+1}$, unde D reprezintă domeniul maxim de definiție. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{x \in E} f(x),$$

unde $E = \{x \mid x \in D, x \text{ este punct de extrem local al lui } f\}$.

- a) $S = \frac{3}{4}$ b) $S = \frac{7}{4}$ c) $S = 3$ d) $S = \frac{5}{4}$ e) $S = \frac{3}{2}$ f) $S = 1$

AM 138 Să se determine abscisa punctului din cadranul doi corespunzător distanței maxime dintre graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x^2)$ și axa Ox .

- a) -1 b) $-e$ c) $-\frac{1}{e}$ d) $-\frac{1}{e^2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

AM 139 Concentrația unui medicament în fluxul sanguin la t ore după administrare este

$$C(t) = \frac{13,6t}{(9,6t + 19,2)^2}.$$

În cât timp este atinsă concentrația maximă C_{\max} a medicamentului? Care este durata de timp pentru care concentrația depășește $\frac{8}{9}$ din C_{\max} ?

- a) $t_{\max} = 1$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore
- b) $t_{\max} = 3$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore
- c) $t_{\max} = 2$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru două ore
- d) $t_{\max} = 1$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră
- e) $t_{\max} = 2$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru trei ore
- f) $t_{\max} = 3$ ore și $C \geq \frac{8}{9}C_{\max}$ pentru jumătate de oră

AM 140 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcției

$$f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x},$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

- a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 141 Fie A punctul aparținând graficului funcției

$$f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziene xOy . Să se afle distanța de la O la A .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

AM 142 Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă v km/h (cu condiția $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Să se determine viteza pentru care costul este minim, știind că șoferul este plătit cu 15 lei/h și benzina costă 6 lei/litru.

- a) 50 km/h b) 55 km/h c) $15\sqrt{14}$ km/h
 d) $16\sqrt{14}$ km/h e) 70 km/h f) $14\sqrt{14}$ km/h

AM 143 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferența dintre acesta și cubul său să fie maximă.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

AM 144 Să se determine mulțimea soluțiilor inecuației

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0.$$

- a) $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, \infty)$
 d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e) \mathbb{R} f) \mathbb{Z}

AM 145 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Soluția inecuației $f(x) - 1 > 0$ este:

- a) $(0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $(1, +\infty)$ e) $(-\infty, -1)$ f) \emptyset

AM 146 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2 + 1 \geq a + 2 \ln x, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty).$$

- a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 147 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) \emptyset

AM 148 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca ecuația $e^x = mx^2$ să aibă trei rădăcini reale distincte.

- a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \frac{e^2}{8}\right)$
d) $\left(\frac{e^2}{8}, \frac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\frac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\frac{e^2}{4}\right\}$

AM 149 Să se rezolve inecuația $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

- a) \emptyset b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) \mathbb{R} f) $\{1\}$

AM 150 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0, & \text{dacă } x = -3. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcției f .

- a) f este crescătoare pe \mathbb{R} b) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
c) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
e) f este descrescătoare pe \mathbb{R} f) f nu este monotonă pe \mathbb{R}

AM 151 Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Să se determine imaginea funcției f .

- | | | |
|--------------|-------------------|------------------------------------------------|
| a) $[0, 1]$ | b) $[0, +\infty)$ | c) \mathbb{R} |
| d) $[0, 10]$ | e) $[1, 4]$ | f) $\left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right]$ |

AM 152 Fie $f(t) = t^3 e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t > 0$ (puterea este măsurată în wați și timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

- a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 153 Fie triunghiul echilateral ABC de latura a . Pe laturile BA și BC se consideră punctele D , respectiv E cu $BD = BE$. Se pliază triunghiul DBE de-a lungul lui DE , punctul B devenind B' , astfel încât planul triunghiului $B'DE$ să fie perpendicular pe planul inițial al triunghiului ABC . Să se determine volumul maxim al piramidei $B'ACED$.

- a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ b) $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ d) $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ e) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

AM 154 Dintr-o mină urmează să fie transportat minereul de cupru folosind vagoane paralelipedice. Știind că tunelul este liniar, are $2m$ înălțime și $2, 4m$ lățime, iar secțiunea transversală este o parabolă de gradul al doilea, ce lățime și înălțime ar trebui să aibă vagoanele pentru a fi transportat cât mai mult minereu, dacă zona de încărcare a vagonului este la $30cm$ deasupra solului?

- | | | |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $L = \frac{2\sqrt{255}}{125}, h = \frac{129}{90}$ | b) $L = \frac{2\sqrt{255}}{25}, h = 2$ | c) $L = \frac{2\sqrt{51}}{5}, h = \frac{51}{90}$ |
| d) $L = \frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{5}}, h = \frac{141}{90}$ | e) $L = \frac{2\sqrt{5}}{125}, h = \frac{51}{45}$ | f) $L = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, h = \frac{31}{90}$ |

AM 155 Fie funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

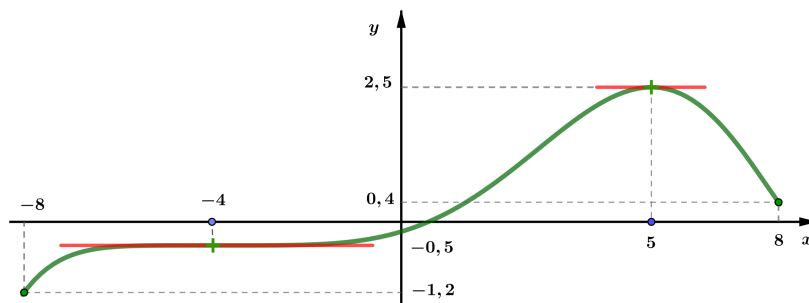
și afirmațiile:

- (i) f este continuă, dar nu este derivabilă;
- (ii) $x = 0$ este asimptotă verticală;
- (iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală;
- (iv) $f'(0) = \frac{1}{2}$;
- (v) f este strict crescătoare;
- (vi) $\text{Im } f = \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre afirmațiile date sunt adevărate?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 156 Graficul derivatei unei funcții f de două ori derivabilă pe $[-8, 8]$ este dat în figura următoare:



Știind că acest grafic are exact 2 tangente orizontale în punctele $(-4; f'(-4))$ și $(5; 2,5)$, să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 157 Fie funcția $f : [-100, 100] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t + 2 \cdot 10^{-5}t^2 + 3 \cdot 10^{-7}t^3$. Să se determine intervalul $I \subset [-100, 100]$, de lungime maximă, pe care funcția este convexă. Să se calculeze apoi valorile minimă m și maximă M ale funcției f pe intervalul I .

a) $I = \left[-\frac{200}{3}; 100\right]$ și $m = -\frac{2}{9} \cdot 10^2 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$ și $M = 100 + 6 \cdot 10^{-1}$

b) $I = \left[-\frac{200}{9}; 100\right]$ și $m = -\frac{2}{3} \cdot 10^2 + \frac{16}{81} \cdot 10^{-1}$ și $M = 100 + 5 \cdot 10^{-1}$

c) $I = \left[-100; -\frac{200}{9}\right]$ și $m = -2 \cdot 10^2$ și $M = 100 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$

d) $I = \left[-\frac{200}{3}; 100\right]$ și $m = 0$ și $M = 100 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$

e) $I = \left[-\frac{200}{9}; 100\right]$ și $m = -\frac{2}{9} \cdot 10^2 + \frac{16}{243} \cdot 10^{-1}$ și $M = 100 + 5 \cdot 10^{-1}$

f) $I = \left[-100; -\frac{200}{9}\right]$ și $m = -\frac{2}{3} \cdot 10^2 + \frac{16}{81} \cdot 10^{-1}$ și $M = 100 + 6 \cdot 10^{-1}$

AM 158 Pentru motocicliști, într-un concurs de motociclete, este importantă aflarea punctelor impuse schimbărilor de viraj, de la dreapta la stânga și de la stânga la dreapta, pentru ca parcursul să fie ideal. În ce punct de pe pistă un concurent trebuie să schimbe poziția de viraj a motocicletei de la stânga la dreapta, pentru a avea un parcurs optim, dacă traseul este descris de funcția $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -0,05 \cdot x^4 + 1,2 \cdot x^2 + 2$?

a) $(0, 0)$

b) $(0, 2)$

c) $(-2, 6)$

d) $(2, 6)$

e) $\left(-2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$

f) $\left(2\sqrt{3}, \frac{46}{5}\right)$

AM 159 Fie șirul (x_n) definit prin $x_1 = \frac{1}{e-1}$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, $n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

a) 0

b) $\frac{1}{e}$

c) 1

d) e

e) $e+1$

f) ∞

AM 160 Se consideră funcția f care satisface relația

$$2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = x$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$. Se cere să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{f^{(n)}(-1)}, n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $f^{(n)}(x_0)$ semnifică derivata de ordinul n a lui f în x_0 .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{2}$ f) ∞

AM 161 Fie funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (3x^2 - 6x) \sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (6x - 6) \sqrt[3]{x}$
b) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x^2}$
c) F nu este o funcție derivabilă pe \mathbb{R}
d) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x}$
e) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x^2}$
f) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x}$

AM 162 Fie funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x|x - 1|$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right|$
b) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2} |x - 1|$
c) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1|$
d) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \left| \frac{x^2}{2} - x \right|$
e) F nu poate fi primitivă a nici unei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
f) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + x$

AM 163 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(2e^x + 1), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

b) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 1) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 - e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

c) $\int f(x) dx = \emptyset$ deoarece f nu este primitivabilă

d) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + e^x, & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

e) $\int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 + e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

f) $\int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ (x - 1)(e^x + 2), & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$

AM 164 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c) \operatorname{arctg} x$ este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

a) $a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2}$ b) $a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ c) $a = b = c = -\frac{1}{2}$

d) $a = b = c = \frac{1}{2}$ e) $a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ f) $a = b = c = 1$

AM 165 Să se calculeze

$$\int (x^2 - x) e^{-2x} dx.$$

- a) $(2x - 1)e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{-2x} + \mathcal{C}$
 d) $(1 - 2x)e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\frac{x^2}{2}e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\frac{2x^3}{3} + x^2\right)e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 166 Să se calculeze

$$\int (2x - 1) \cos 2x dx.$$

- a) $x \sin 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 c) $x \sin 2x + 2(\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 167 Fie $I_n = \int \frac{e^x}{x^n} dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde n este un număr natural nenul. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) $I_3 = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2}I_1$ b) $3I_3 = \frac{e^x}{x^2} - I_1$
 c) $I_3 = -\frac{e^x}{2x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}I_1$ d) $2I_3 = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{3}I_2$
 e) $I_3 = \frac{e^x}{3x^2} - \frac{2}{3}I_2$ f) $I_3 = \frac{e^x}{3x^3} - \frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{3}I_2$

AM 168 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + 5}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- a) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ b) $\frac{11}{4} \ln(5-x) - \frac{3}{4} \ln(1-x) + \mathcal{C}$
 c) $\frac{11}{4} \ln \frac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$ d) $\frac{3}{4} \ln \frac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$
 e) $\frac{7}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{7}{4} \ln|x-5| + \mathcal{C}$

AM 169 Să se determine familia primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}^*.$$

- a) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$
 b) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$
 c) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$
 d) $F(x) = \frac{b}{a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$
 e) $F(x) = \frac{1}{a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$
 f) $F(x) = \frac{b}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

AM 170 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + (x-1)^2}$$

și F o primitivă a sa. Să se determine acea primitivă pentru care $F(0) = \frac{\pi}{24}$.

- a) $F(x) = \operatorname{arctg}(2x-1) + \frac{7\pi}{24}$ b) $F(x) = \operatorname{arctg}(2x-1) - \frac{5\pi}{24}$
 c) $F(x) = \ln(2x-1) + \frac{5\pi}{24}$ d) $F(x) = \operatorname{arctg}(x-1) + \frac{7\pi}{12}$
 e) $F(x) = \ln(x-1) + \frac{\pi}{4}$ f) $F(x) = \operatorname{arctg}(x^2+1) + \frac{5\pi}{24}$

AM 171 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x - 8 - x^2}{x^4 + 4x^3}.$$

Să se determine cea primitivă F a funcției f care verifică relația $F(5) = \frac{4}{25}$.

a) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{8}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x^3}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{8}{5} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln \sqrt{\frac{x}{x+4}} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

f) $\ln \sqrt{\frac{x}{\sqrt{x+4}}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 172 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f(x) = \frac{1}{x^{2018} + x}$ pe intervalul $I \subset (0, \infty)$.

a) $\ln x - \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + C$

b) $\ln x + \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + C$

c) $\ln x + \ln(1 + x^{2017}) \cdot 2017 + C$

d) $\ln x - \frac{\ln(x + x^{2018})}{2018} + C$

e) $-\ln x + \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + C$

f) $\frac{\ln x}{2018} - \frac{\ln(1 + x^{2017})}{2017} + C$

AM 173 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}.$$

a) $\frac{2}{7}\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \ln|x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 10}| + C$

b) $\frac{2}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 6x + 10} + C$

c) $\frac{2(x-3)}{7}\ln\sqrt{x^2 - 6x + 10} + C$

- d) $\frac{2x}{7}\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \mathcal{C}$
 e) $2\sqrt{x^2 - 6x + 10} + 7\ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 10}) + \mathcal{C}$
 f) $2\sqrt{x^2 - 6x + 10} + 7\ln(x + \sqrt{x^2 - 6x + 10}) + \mathcal{C}$

AM 174 Fie $I \subset (0, \infty)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- a) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
 b) $3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
 c) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
 d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
 e) $2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
 f) $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$

AM 175 Se consideră funcția

$$f(x) = x^5 \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine familia primitivelor funcției f .

- a) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^3}{5}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
 b) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
 c) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} - \frac{a^2}{3}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^3} + \mathcal{C}$
 d) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5}\sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$

$$e) \frac{1}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + C$$

$$f) \frac{5}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{3a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + C$$

AM 176 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{e^x + e^{2-x}}.$$

$$a) \frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \ln(e^{2x} + e^2) + C$$

$$b) 2 \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^2) + C$$

$$c) \frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + C$$

$$d) \frac{1}{e} \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + C$$

$$e) 2 \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^2) + C$$

$$f) \frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^x - \ln(e^{2(x-1)} + 1) + C$$

AM 177 Fie funcțiile³ :

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{și respectiv} \quad \operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Să se determine primitiva F a funcției $f(x) = \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x$ care verifică relația $F(0) = 0$.

$$a) \frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} - \frac{x}{8}$$

$$b) -\frac{x}{16} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x$$

$$c) \frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} + 2x$$

$$d) -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{ch} x$$

$$e) \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$$

$$f) \frac{e^{4x}}{64} + \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} - \frac{5}{32}$$

³Funcția ch se numește *cosinus hiperbolic* iar funcția sh se numește *sinus hiperbolic*

AM 178 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

a) $\ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$ c) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$

d) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} + \mathcal{C}$ e) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \mathcal{C}$ f) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$

AM 179 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

a) $F(x) = \frac{x}{2} + \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$ b) $F(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = 2x + \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$ d) $F(x) = x^2 + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

e) $F(x) = x + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$ f) $F(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

AM 180 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se definesc integralele

$$I_n = \int \frac{1}{x^n \sqrt{a^2 + x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Care dintre următoarele relații este adevărată?

a) $I_9 = \frac{1}{8a^2} \left(-7I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$ b) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(-8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$

c) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$ d) $I_9 = \frac{1}{7a^2} \left(8I_7 - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right)$

e) $I_9 = \frac{1}{9a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 8I_7 \right)$ f) $I_9 = \frac{1}{8a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 7I_7 \right)$

AM 184 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x} \cos \pi x \, dx.$$

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{3(1 + e^{-3})}{9 + \pi^2}$ | b) $\frac{2(1 + e^2)}{4 + \pi^2}$ | c) $\frac{1 + e^{-3}}{9 + \pi^2}$ |
| d) $\frac{1 + e^3}{4 + \pi^2}$ | e) $\frac{2(1 + e^3)}{9 + \pi^2}$ | f) $\frac{3(1 + e^{-3})}{4 + \pi^2}$ |

AM 185 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x - x^3}{x^4 + 1} \, dx.$

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8}$ | b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$ | c) $\pi - 2 \ln 2$ |
| d) $2\pi - 4 \ln 2$ | e) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ | f) $\frac{\pi}{6} - \frac{\ln 2}{3}$ |

AM 186 Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 4} \, dx.$

- | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a) $\frac{\arctg 3 - \ln 5}{8}$ | b) $\frac{\arctg 2 - \ln 2}{4}$ | c) $\frac{2\arctg 3 - \ln 2}{4}$ |
| d) $\frac{2\arctg 2 - \ln 5}{8}$ | e) $\frac{\arctg 4 - \ln 3}{8}$ | f) $\frac{2\arctg 4 - \ln 3}{4}$ |

AM 187 Să se calculeze $\int_1^e (2x + 1) \ln x \, dx.$

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{1}{2}(e + 3)$ | b) $\frac{1}{3}(e^2 + 2)$ | c) $\frac{1}{2}(e^2 + 3)$ |
| d) $\frac{1}{2}(e^2 - 2)$ | e) $\frac{1}{3}(e - 3)$ | f) $\frac{1}{3}(e^2 + 1)$ |

AM 188 Să se calculeze $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

- a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

AM 189 Să se calculeze $\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}$.

- a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$ c) $\ln \frac{9}{2}$ d) $\ln \frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 190 Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{3+x^2}, & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3} \end{cases}$.

Să se calculeze $F(1) - F(0)$, unde $F(x) = \int_{-e}^x f(t) dt$.

- a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\frac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 191 Să se calculeze $\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x-5}} dx$.

- a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$
c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$
e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln \frac{34}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$

AM 192 Să se determine valoarea integralei $\int_{-1}^1 |x| \arcsin x dx$.

- a) $-\frac{\pi}{2}$ b) -1 c) 1 d) $\frac{\pi}{2}$ e) 0 f) π

AM 193 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^1 |x| \arcsin^2 x \, dx.$$

- a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi^2}{8}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ e) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$ f) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

AM 194 Să se determine valoarea parametrului $a > 0$ astfel încât integrala

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{1 + e^x} \, dx$$

să ia valoarea 20000.

- a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) e d) 1 e) 10 f) 100

AM 195 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{1024} \frac{\ln(2017 - x)}{\ln[1505^2 - (512 - x)^2]} \, dx.$$

- a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$
 d) 512 e) $\frac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

AM 196 Să se calculeze

$$\int_1^3 x[x] \, dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 197 Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = [mx], \quad m > 0,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Să se determine constanta m pentru care $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}$.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 198 Studiați dacă există $a \in (0, \infty)$ pentru care $\int_{-a}^a [x] dx = -82$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x . În caz afirmativ, precizați valoarea parametrului a .

- a) nu există b) 40 c) 41 d) 81 e) 82 f) 164

AM 199 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^3 (x + |m - x|) dx = 9.$$

- a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$
d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ f) $\{-1, 3\}$

AM 200 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^1 (1 - |x|) dx.$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) -2 f) 0

AM 201 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^2 (1 - ||x| - 1|) dx.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 202 Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \sin x, \frac{1}{2} \right\} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}$
 d) $\frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3} + 1$

AM 203 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \min\{\sin x, \cos x\} dx.$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 204 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} + 1$
 d) $\frac{\pi}{8} + 1$ e) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi - 1}{4}$

AM 205 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

a) $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$

b) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 3}{648}$

c) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{648}$

d) $\frac{\pi + 3}{648}$

e) $\frac{6\sqrt{3} - 3}{648}$

f) $\frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{324}$

AM 206 Se consideră funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 7}.$$

Să se calculeze $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y) dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcției f .

a) $1 + \ln \frac{8}{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $1 + \ln \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{7}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

c) $1 + \ln \frac{8}{7}$

d) $-1 - \ln \frac{8}{7} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{6}$

e) $2 + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$

f) 0

AM 207 Fie integrala

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$.

a) 0

b) ∞

c) 2

d) $\ln 3$

e) 1

f) $\frac{1}{2}$

AM 208 Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$
 d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3} \ln \frac{2}{9}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7} \ln \frac{9}{2}$ f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4} \ln \frac{9}{2}$

AM 209 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \cos^2 x} dx .$$

- a) $\frac{\pi^2}{4}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12}$ f) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18}$

AM 210 Să se calculeze integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + e^{ax}} dx ,$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) $2a$ b) $\frac{a\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) $e^{a\pi}$ f) $2e^a$

AM 211 Să se determine constanta reală a pentru care valoarea integralei

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x \cos x} dx$$

este $\ln \sqrt[4]{3}$.

- a) 2 b) 1 c) π d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{3}$

AM 212 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} dx.$$

a) $\frac{2\sqrt{3} + \pi}{6}$

b) $\frac{6\sqrt{3} - \pi}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{3} + \pi}{6}$

d) $\frac{5\sqrt{3} - \pi}{3}$

e) $\frac{4\sqrt{3} - \pi}{6}$

f) $\frac{5\sqrt{3} + \pi}{2}$

AM 213 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \sin 2x dx.$$

a) 0

b) $-\frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $-\frac{1}{5}$

f) 1

AM 214 Se consideră integralele definite

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x dx, \quad \text{unde } a \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $aI(a)I(a-1)$ pentru toate valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{\pi a}{2}$

b) $\frac{\pi}{2(a-1)!}$

c) π

d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi a}{a-1}$

f) $\frac{\pi(a-1)}{2}$

AM 215 Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ n (\operatorname{sign} x)^{n+1}, & |x| = 1, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

unde sign reprezintă funcția semn. Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{1}{n}$ | b) $\cos \frac{\pi}{n}$ | c) $\frac{1 + (-1)^n}{n}$ |
| d) $\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}$ | e) $(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}$ | f) 0 |

AM 216 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{1 + e^{-x}} dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x}{1 - e^{-x}} dx.$$

- | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------|
| a) $\ln 2 \ln 3$ | b) $\ln 2 + 4 \ln 3$ | c) $\ln 2 + \ln 3$ |
| d) $2 \ln 2 \ln 3$ | e) $3 \ln 2 + 2 \ln 3$ | f) $\ln 2 + 2 \ln 3$ |

AM 217 Să se determine numărul real m pentru care are loc identitatea

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} dx = m \int_1^2 (x - 1)^2 \sqrt{x} dx.$$

- | | | | | | |
|---------|------|------|---------|------|---------|
| a) 3, 5 | b) 2 | c) 3 | d) 1, 5 | e) 1 | f) 2, 5 |
|---------|------|------|---------|------|---------|

AM 218 Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x^2 + x + 1} dx, \text{ unde } a > 1.$$

- | | | | | | |
|-----------------------------|--------------------|-----------------------------|------------------|----------------------------|------|
| a) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ | b) $\frac{\pi}{2}$ | c) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ | d) $\pi\sqrt{3}$ | e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ | f) 1 |
|-----------------------------|--------------------|-----------------------------|------------------|----------------------------|------|

AM 219 Să se calculeze

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

- | | | | | | |
|------------------|------|---------------|------|-------------|------------------|
| a) $\frac{1}{2}$ | b) 2 | c) $\sqrt{2}$ | d) 4 | e) ∞ | f) $\frac{1}{4}$ |
|------------------|------|---------------|------|-------------|------------------|

AM 220 Să se calculeze valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_0^{\cos x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{ctg} x} \ln(t^2 + 2) dt}.$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 221 Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt$. Să se precizeze care dintre afirmațiile următoare este adevărată.

- a) F este crescătoare b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$
c) F este pară d) F este descrescătoare
e) $F(1) = 0$ f) nici un răspuns nu este corect

AM 222 Să se calculeze $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(101x) \cdot \sin^{99} x dx$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{100 \cdot 2^{101}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{101 \cdot 2^{100}}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{100 \cdot 2^{101}}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{101 \cdot 2^{100}}$ e) $\frac{1}{2^{101}}$ f) $\frac{1}{10100}$

AM 223 Se consideră funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(2x) = 3f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă

$$\int_0^1 f(x) dx = 1,$$

să se calculeze

$$\int_1^2 f(x) dx.$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AM 224 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \right).$$

- a) 1 b) 0 c) $\sqrt{2}$
 d) $2\sqrt{2} - 2$ e) $2\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 225 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{\pi}{3n} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3n} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n} \right) + \dots + \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3n} \right) \right].$$

- a) π b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{\pi} \ln 3$ f) $\ln 2$

AM 226 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3}{\pi}$ c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) 1 f) $\frac{\pi}{6}$

AM 227 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{e}{2}$ e) e f) ∞

AM 228 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^1 x^n e^{-ax^2} dx$, unde $a > 0$.

- a) e^a b) e^{-a} c) $1 + ae^2$ d) e^{-2a} e) e^{2a} f) $1 - ae^2$

AM 229 Un mobil pornește de pe loc și se deplasează în linie dreaptă timp de T minute, $T > 1$, număr întreg, cu viteza

$$v(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq 60 \\ 60 + \frac{1}{\pi} \sin \pi(t - 60) & , 60 < t \leq 60T \end{cases}$$

măsurată în metri/secundă. Să se calculeze a_1 , accelerația atinsă de mobil la un minut de la pornire și d , distanța parcursă în cele T minute.

a) $a_1 = 60T \text{ m/s}^2$ și $d = 1740 - T \text{ m}$

b) $a_1 = 2T \text{ m/s}^2$ și $d = 1740 + 60T \text{ m}$

c) $a_1 = 60T \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 - T \text{ m}$

d) $a_1 = 2T \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 + 60T \text{ m}$

e) $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ și $d = 1800(2T - 1) \text{ m}$

f) $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$ și $d = 1800 + 60T \text{ m}$

AM 230 Variația sumei depuse într-un cont bancar de-a lungul unui deceniu este descrisă de funcția $S : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S(t) = 2000 - 10t \cdot \exp\left(5 - \frac{t^2}{8}\right).$$

Să se stabilească la câți ani (notație: t_{\min}) de la inițierea contului, depozitul atinge valoarea minimă S_{\min} . Care este valoarea medie S_{md} a funcției S în acest interval de timp?

a) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

b) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 1800$

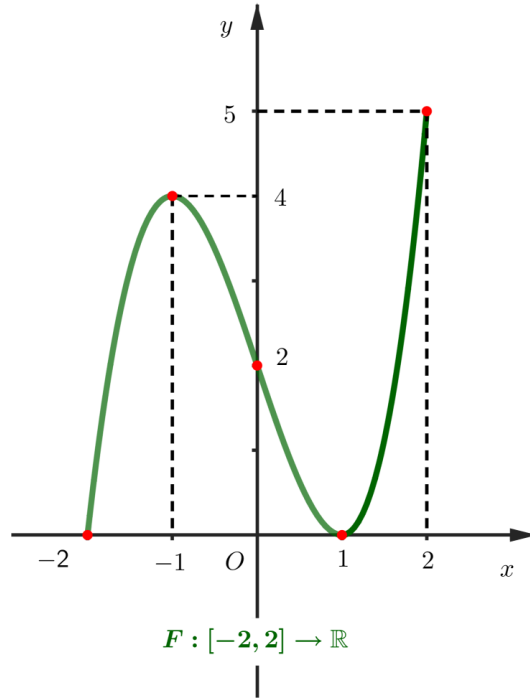
c) $t_{\min} = 3$ ani, $S_{\min} = 1800 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 18e^5 + 2000$

d) $t_{\min} = 5$ ani, $S_{\min} = 1800 - 18e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 18e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 1800$

e) $t_{\min} = 2$ ani, $S_{\min} = 2000 - 20e^4\sqrt{e}$, $S_{md} = 20e^{\frac{9}{2}} - 20e^5 + 2000$

f) Toate răspunsurile de mai sus sunt greșite

AM 231 Graficul unei primitive F a unei funcții continue $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ este dat mai jos. Câte dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?



(i) $F'(1) = f(1)$ (ii) $f(1) = F(1)$ (iii) $\int_0^2 f(x)dx = 3$

(iv) $f(F(-2)) > 0$ (v) $f(x) < 0, \forall x \in (-1, 1)$

- a) 0 b) 1 c) 3 d) 2 e) 4 f) 5

AM 232 Să se determine aria subgraficului funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

- a) $\ln \frac{16}{9}$ b) $2 - \ln \frac{16}{9}$ c) $1 - \ln \frac{16}{9}$
 d) $\ln \frac{9}{16}$ e) $1 - \ln \frac{9}{16}$ f) 2

AM 233 Să se determine aria mulțimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 3} \quad \text{și} \quad y = 2.$$

- a) $12 - 3 \ln 3$ b) $12 + 3 \ln 3$ c) $16 - 3 \ln 3$
 d) $16 - 12 \ln 3$ e) $16 - \ln 12$ f) $\ln 12$

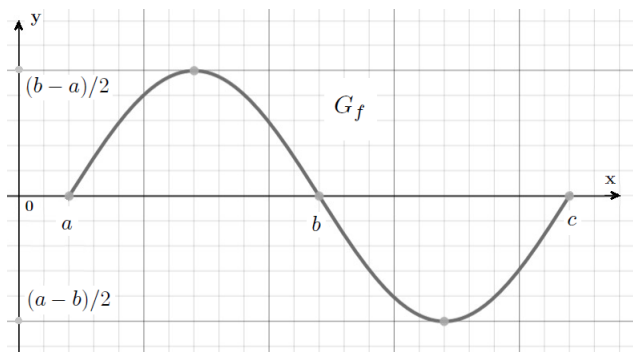
AM 234 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele $y = 2x^2 + 5x - 3$ și $y = 6 - x - x^2$.

- a) 2^5 b) 12 c) 2^4 d) 60 e) 2^6 f) 34

AM 235 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y^2 = 10x$ și dreapta $y = 5x$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 236 Graficul unei funcții derivabile $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ este afișat mai jos.



Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate ?

A_1 : Există o funcție constantă $g : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât aria subgraficului lui g să coincidă cu aria subgraficului lui $f|_{[a,b]}$

A_2 : Există cel mult un punct $x_0 \in (a, c)$ cu proprietatea că $f'(x_0) = 0$

A_3 : Valoarea integralei $\int_a^c f(x) dx$ este $2 \int_a^b f(x) dx$

A_4 : Punctul $x_0 = b$ este punct de inflexiune pentru f

A_5 : Funcția $f : [a, c] \rightarrow \left[\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2} \right]$ este surjectivă

A_6 : Valoarea integralei $\int_a^c |f(x)| dx$ este mai mare decât $\frac{(b-a)^2}{2}$

a) A_1, A_4, A_5 și A_6

b) A_3 și A_5

c) A_1, A_3, A_4 și A_5

d) toate

e) A_2 și A_4

f) A_3, A_5 și A_6

AM 237 Să se determine volumul corpului de rotație generat de graficul funcției $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}$.

a) $\pi \left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$

b) $\pi \left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$

c) $\pi \left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$

d) $\pi \left(\ln \frac{3}{4} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$

e) $\pi \left(3\sqrt{7} + \ln \frac{3}{4} \right)$

f) $\pi \left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \frac{5}{6} \right)$

AM 238 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $f : \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$.

a) $\frac{4\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{2}$

b) $\frac{1}{16}\pi^2(3\pi^2 + 2)$

c) $\frac{\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{4}$

d) $\frac{9\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{8}$

e) $\frac{3}{8}\pi^2(\pi^2 - 2)$

f) $\frac{8\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{8}$

AM 239 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a cercului de ecuație $x^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$.

- a) 2π b) $2\pi^2$ c) π d) π^2 e) 4π f) $4\pi^2$

AM 240 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a elipsei de ecuație $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

- a) 12π b) 10π c) 16π d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

AM 241 Să se determine parametrul m așa încât volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \left(x - \frac{m}{x} \right)$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

- a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 242 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

- a) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi \ln \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$
d) $\frac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi \ln \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi \ln \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

AM 243 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

- a) $\pi \ln \frac{5}{13}$ b) $3\pi \ln \frac{13e}{5}$ c) $\pi \ln \frac{5}{13}$
d) $3\pi \ln \frac{5e}{13}$ e) $2\pi \ln \frac{13}{5e}$ f) $2\pi \ln \frac{5e}{13}$

ANEXE

Subiectele date la admitere
în anii 2014-2023
cu rezolvările
integrale

1.(8p) Fie ecuația $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x+7} = 3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuației.

- a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E = \sum_{i=1}^{2014} \left[\left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k!(k^2 + 1) \right].$$

- a) 2014! b) 2014! - 1 c) 2015! d) 2015! - 2 e) 2016! - 2

3.(8p) Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{dacă } i = j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & \text{dacă } i < j, \\ 0, & \text{dacă } i > j, \end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinații de j luate câte i . Să se calculeze A^{-1} .

- a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul (\mathcal{M}, \cdot) , unde

$$\mathcal{M} = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

și " \cdot " este operația de înmulțire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

- a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\frac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

- a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

6.(9p) Știind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A și B . Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

- a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcția $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

- a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$
d) nu există e) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1, y = \frac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = -1$
- b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 2$
- c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 1$
- d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
- e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcția să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

- a) -2
- b) 1
- c) -1
- d) 3
- e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^0 |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

- a) $\frac{435}{96}$
- b) $\frac{135}{32}$
- c) $\frac{221}{48}$
- d) $\frac{37}{96}$
- e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculați aria cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$
- b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$
- c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$
- d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$
- e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUȚII AC+ETC 2014

1. Punem condiția de existență $x + 7 \geq 0$ și obținem $x \in [-7, +\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x} = u$ și $\sqrt{x+7} = v$ și atunci avem $2-x = u^3$ și $x+7 = v^2$, de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

cu soluțiile $u_1 = 0, v_1 = 3, u_2 = 2, v_2 = 1, u_3 = -3$ și $v_3 = 6$, adică $x_1 = 2, x_2 = -6$ și $x_3 = 29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuației este

$$|2| + |-6| + |29| = 37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \sum_{k=1}^i k![(k+1)^2 - 2(k+1) + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \sum_{k=1}^i [k!(k+1)(k+1) - 2k!(k+1) + 2k!] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+1)] - 2 \sum_{k=1}^i [(k+1)! - k!] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i}\right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+2-1)] - 2[(i+1)! - 1] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} \left[\sum_{k=1}^i [(k+2)! - (k+1)!] - 2(i+1)! + 2 \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+2)! - 2 - 2(i+1)! + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+1)!(i+2) - 2(i+1)!] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{2014} \left[\frac{1+i}{i} (i+1)! i \right] = \sum_{i=1}^{2014} [(1+i)(i+1)!] = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} [(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014} [(2+i)! - (i+1)!] = \\ &= 2016! - 2 \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$\begin{aligned} a_{11} &= (-1)^{1+1} = 1, & a_{22} &= (-1)^{2+2} = 1, & a_{33} &= (-1)^{3+3} = 1, \\ a_{12} &= (-1)^{1+2} C_2^1 = -2, & a_{13} &= (-1)^{1+3} C_3^1 = 3, & a_{23} &= (-1)^{2+3} C_3^2 = -3, \\ a_{21} &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0, \end{aligned}$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulțirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărțirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărțirii, adică

$$(x - 2015)^{2014} + x - 2001 = (x - 2014)(x - 2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ și $x = 2016$, ecuația precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluția $a = 1$ și $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relația din enunț este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde } \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obținem că $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ este singura soluție.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 2)$. Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Leftrightarrow 3 = \frac{1 + 0 + x_C}{3} \Leftrightarrow x_C = 8$$

și

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{0 + 2 + y_C}{3} \Leftrightarrow y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcția f nu are asimptote horizontale. În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}$$

și

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2} x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\arctg x \mp \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$.

Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2 + 1) - (ax + a - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2ax + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-ax^2 + (4 - 2a)x + a}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuația $4 - 2a = 0$ cu soluția reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2 - 11x - 3| = \begin{cases} 4x^2 - 11x - 3, & \text{dacă } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup [3, \infty) \\ -4x^2 + 11x + 3, & \text{dacă } x \in \left(-\frac{1}{4}, 3\right), \end{cases}$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x^2 - 11x - 3)dx + \int_{-\frac{1}{4}}^0 (-4x^2 + 11x + 3)dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-\frac{1}{4}}^0 = \frac{221}{48}.$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părți de două ori, obținem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015

A

1.(7p) Fie ecuația $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuației.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie șirul $(x_n)_{n>1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma tuturor elementelor mulțimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

- a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulțimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2 \text{ și } \left[\frac{1}{|z - 3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

- a) $P \subset \left(4, \frac{\sqrt{70}}{2} \right]$ b) $P = \left(4, \frac{35}{8} \right)$ c) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$
d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \frac{\sqrt{75}}{2} \right)$

4.(8p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ și restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 3.

- a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA și OB două raze perpendiculare în cercul de centru O și rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA)$, $P \in (OB)$, iar M și N aparțin arcului mic AB .

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1, 2)$ față de punctul $B(3, 4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P . Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

- a) $-3, 1$ b) $\frac{6}{5}, \frac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ e) $1, \frac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)).$$

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ și de dreapta $2x - 3y = 9$.

- a) 9 b) $\frac{9}{2}$ c) 18 d) $\frac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea absciselor punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1.

- a) $2y - x + 1 = 0$ b) $y - x - 1 = 0$ c) $y + x = 0$
 d) $y - x + 1 = 0$ e) $y - 2x + 1 = 0$

SOLUȚII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = v$ și eliminând x din cele două relații, se obține:

$$u + v = 3, u^3 + v^3 = 9,$$

cu soluțiile $u = 2, v = 1$ și $u = 1, v = 2$. Rezultă $x = 49$ sau $x = 0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{C_{k+1}^2}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

Rămâne de rezolvat în \mathbb{N} inecuația:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{3n} \leq \frac{2}{3},$$

deci $n \in \{2, 3, 4\}$.

Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Din condiția $|z - 2| = 2$ se obține $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relație, $1 \leq \frac{1}{|z - 3|} < 2$ rezultă $\frac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \frac{35}{8}\right)$. Ținând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluție $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui \bar{A} trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică ușor că pentru $m = 1$ avem $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ și aplicând apoi Teorema împărțirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informații, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ și împărțindu-l la $X^2 + 2$ se obține restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie să coincidă cu $X + 1$. Se obțin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ și $[OP]$, cu C proiecția punctului O pe latura PQ și cu D proiecția punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obține că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1, 2)$ față de $B(3, 4)$, se obține imediat că $C(5, 6)$. Fie $P(p, 0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p + 2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obține $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1) \ln y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y-1) \cdot \ln \frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0 \cdot \infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt și aplicăm apoi de două ori Regula lui l' Hospital:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{y-1}{y}}{\ln(y-1)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obține:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx &= \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-(x-2)^2} \Big|_1^2 + \arcsin(x-2) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecție ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ și $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeței determinate de parabolă și dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x - 9}{3} + \sqrt{9 - 2x} \right) dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x \Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9 - 2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Știind că mulțimea punctelor de extrem local ale unei funcții se găsesc printre soluțiile primei derivate, rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$. Se obțin soluțiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcției f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcției f .

Răspuns corect: d).

12. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 26.07.2016

A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m , respectiv valoarea maximă M , a funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- a) $m = -\frac{1}{4}, M = 0$ b) $m = 0, M = 42$ c) $m = -42, M = 0$
 d) $m = 0, M = 2$ e) $m = -\frac{1}{4}, M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + \dots + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}.$$

- a) $S = 0$ b) $S = \frac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \frac{1}{6}$ e) $S = \frac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3).$$

Să se determine suma elementelor matricei X .

- a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a și b astfel încât legea de compoziție

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicația $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$.

- a) $a = -12, b = 3$ b) $a = 3, b = 12$ c) $a = 12, b = 3$
 d) $a = 12, b = -3$ e) $a = 3, b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

- a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m + 3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

- a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2)$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ și $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparține bisectoarei unghiului AOB .

- a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

- a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulțimii \mathbb{R} prin f .

- a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) \mathbb{R}

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1 + \sqrt{\ln x})^3} dx.$$

- a) $\frac{5}{4} - 2 \ln 2$ b) $2 \ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2 \ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

axa Ox și dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

- a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{5} + 1)}{4}$
 b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$
 c) $13\sqrt{5} - 4 \ln (3 + 2\sqrt{2})$
 d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$
 e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$

SOLUȚII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcției $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimumul funcției pe intervalul $[1, 3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximumul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2^2 + \dots + \log_2 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2^2 + \dots + \log_3 2016^2} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2^2 + \dots + \log_{2016} 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{\log_2 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \log_{1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2016 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X = (a \ b \ c)$, ecuația devine:

$$(a \ b \ c) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3).$$

Se obțin relațiile $2a - 4b + c = 1$, $b = 2$, $5a - 12b + 3c = 3$ de unde $a = 0$, $b = 2$, $c = 9$, deci $X = (0 \ 2 \ 9)$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiția ca legea de compoziție să fie asociativă se obține $a = 12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiția morfismului între două grupuri, $f(x + y) = f(x) \star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x + y) = e^{x+y} + b$$

și

$$f(x) \star f(y) = e^{x+y} + (b - 3)e^x + (b - 3)e^y + b^2 - 4b + 12.$$

Egalând cele două expresii, se obține $(b - 3)(e^x + e^y + b + 4) = 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $b = 3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienților polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărțind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obține câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuația dată se poate scrie sub forma:

$$-2 \sin^2 2x + (m + 3) \sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuația devine:

$$-2t^2 + (m + 3)t - 2m + 2 = 0,$$

și are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \frac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0, 1]$, rămâne ca și a doua rădăcină să fie în afara aceluiași interval, adică $\frac{m-1}{2} < 0$ și $\frac{m-1}{2} > 1$. Se obține $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanțe egale de laturile unghiului, punem condiția $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuațiile dreptelor $OA : y = -2x$ și $OB : y = 3x$, deci distanțele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|4 + a|}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|6 - a|}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obține $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0 , deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține:

$$\lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{x^2}} = e^{-\lim_{x \searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluția ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiție sunt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variație al funcției, se obține că $Imf = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituția $\ln x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1 + \sqrt{t})^3} dt = 2 \int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^3} dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = ds$ și se obține:

$$2 \int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3} ds = 2 \left(\int_1^2 \frac{1}{s} ds - 2 \int_1^2 \frac{1}{s^2} ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3} ds \right) = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcția f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ și negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} dx \\ &= 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4} \Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4} \Big|_2^3 - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_2^3 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 25.07.2017

A

1.(9p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$x^2 - 2a(x - 1) - x(a + 1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

- a) $9a^2 + 1$ b) $9a^2 - 12a$ c) $9a^2 - 1$ d) $9a^2$ e) $9a^2 - 3a + 12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}.$$

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$
 c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$
 e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulțimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6(x + y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluțiilor ecuației $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

- a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) $X - 1$ b) X c) $X + 1$ d) $-X + 1$ e) $-X - 1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile \widehat{BAC} și \widehat{ABC} au măsurile de 30° , respectiv 135° , iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

- a) $\frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3} - 1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecție a dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se calculeze raportul dintre distanța de la P la d_1 și distanța de la P la d_2 .

- a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

- a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$. Să se determine mulțimea tuturor punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) \emptyset

11.(8p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{e^x + 1} dx = -\frac{32}{5}.$$

- a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

- a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuația din enunț este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ și $x_1x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1} = C_{80}^k (\sqrt[3]{5})^{80-k} (\sqrt[5]{2})^k = C_{80}^k 5^{\frac{80-k}{3}} 2^{\frac{k}{5}}, \quad k \in \overline{0, 80},$$

el este număr rațional dacă și numai dacă sunt satisfăcute simultan condițiile:

$$\frac{80-k}{3} \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad \frac{k}{5} \in \mathbb{N},$$

adică $k \in \{5, 20, 35, 50, 65, 80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operații cu coloane și linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 := C_2 - C_1 \\ C_3 := C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & -4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & -4c+4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 := C_3 + 2C_2 \end{matrix} \\ &= 6 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 := L_2 - L_1 \\ L_3 := L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 - a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2 - a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 12(b-a)(c-a)(b-c). \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuația din enunț este echivalentă cu $2(2^x + 2^{-x}) = 5$, care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, deci produsul lor este -1 .

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la $X^2 - X + 1$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(2x^3 + x + 1)^{2017} = (x^2 - x + 1) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$. Atunci $\omega^3 = -1$ și $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, adică $\omega^2 = \omega - 1$ și înlocuind pe x cu ω în relația de mai sus se obține

$$(\omega - 1)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow (\omega^2)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow \omega^2 = a\omega + b,$$

de unde rezultă că $a = 1$ și $b = -1$, deci restul căutat este $X - 1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obține că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{AC} \Leftrightarrow AC = 3\sqrt{2}.$$

Cum $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ și

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB}) = 9(2 - \sqrt{3}) = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 , atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte și obținem $A(2, 0)$, iar ecuația dreptei d este $y = x - 2$.

Fie $P(p, p - 2) \in d$, $p \neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P, d_1)}{d(P, d_2)} = \frac{\frac{2|p-2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p-2|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcția f poate fi scrisă

$$f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = 3x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

și atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{x}} e^2 \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ și $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, rezultă că $f''(-1) = 7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcția f devine

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ \sqrt{-x^2 + 4x}, & \text{dacă } x \in (0, 4), \end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{2\sqrt{x^2 - 4x}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \frac{-x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 4x}}, & \text{dacă } x \in (0, 4). \end{cases}$$

Din tabloul de variație al funcției se observă că punctele de extrem ale funcției sunt $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunț cu I și făcând schimbarea de variabilă $-x = t$ obținem

$$I = \int_a^{-a} -\frac{t^4}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 e^t}{e^t + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 (e^t + 1 - 1)}{e^t + 1} dt =$$

$$= \int_{-a}^a \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t + 1} \right) dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-a}^a - I \Leftrightarrow I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluția ecuației $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx = \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx \right] = \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2017

A

1.(8p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

- a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ și rația $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5 .

- a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017} .

- a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4. \end{cases}$$

- a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că -1 este rădăcină a polinomului f și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

- a) $a = 1, b = -1$ b) $a = 1, b = 4$ c) $a = 2, b = 4$
d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -4, b = 1$

6.(8p) Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

- a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparține dreptei

$$d: 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $P(-1, 1)$ și este paralelă cu dreapta d .

- a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$
 d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

- a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

- a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$
 d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) \emptyset

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{8} - \frac{3}{e^2}$ b) $\frac{e^2}{16} - \frac{7}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{7}{4e^2}$
 d) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x - 3}{x^2 + 4x - 5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

- a) $\frac{4}{3} \ln(x+5) - \frac{1}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- b) $\frac{1}{3} \ln(x+5) - \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- c) $\frac{4}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- d) $\frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{4}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- e) $\frac{1}{2} \ln(x+5) + \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2 - 11x + 6 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuația din enunț este echivalentă cu $6x^2 - 11x + 5 = 0$ și atunci suma soluțiilor ei este $\frac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5 = a_1 + 4r = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A = 0$, rezultă că $\det(A^{2017}) = (\det A)^{2017} = 0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = -14$, $y = -21$ și $z = 24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condițiile $f(-1) = 0$ și $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluția $a = 1$ și $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \frac{4}{5}$, de unde se obține că $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparține dreptei d se obține că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 și prin urmare, ecuația ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obține $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2 - 1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcției f .

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx &= \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+5} dx = -\frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln(x+5) + C. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 23.07.2018

A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi și rația 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{2017} + a_{2018}}{a_{2018} + a_{2019}},$$

atunci:

a) $S = 1$ b) $S = 2017$ c) $S = \frac{2017}{2018}$ d) $S = 2018$ e) $S = \frac{2018}{2017}$

2.(8p) Fie mulțimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = 2 \text{ și } \left| \frac{2z + 3}{z - 3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

- a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$
 d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

- a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0
 c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$
 e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

- a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$
 d) \emptyset e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2018)^{2017} + X - 2020 \text{ și } g = (X - 2017)(X - 2019).$$

Să se determine restul împărțirii lui f la g .

- a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$
d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ și $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză și celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

- a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\frac{6\sqrt{3} - 5}{2}$
d) $\frac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(4, 3)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii triunghiului ABC dusă din A . Să se calculeze $m \cdot n$.

- a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

- a) \mathbb{R} b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

9.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

- a) $a = 1, b = 1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = 2, b = 1$
 d) $a = -2, b = -1$ e) $a = 1, b = -1$

10.(7p) Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiție a funcției. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3}.$$

- a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

- a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$.

- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \dots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1r(1+r)} + \frac{a_1r(1+r)}{a_1r^2(1+r)} + \dots + \frac{a_1r^{2016}(1+r)}{a_1r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018}.$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relația $z \cdot \bar{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \quad (1)$$

Pe de altă parte, relația $\left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1$ poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \left(\frac{2z+3}{z-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i} \right)} &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right)} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i} \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{(2a+3)^2 + 4b^2}{a^2 + (b-3)^2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b &= -2a - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2), se obțin două soluții:

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = -\frac{7}{5}, \quad \text{de unde} \quad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

și

$$a_2 = -1, \quad b_2 = 1, \quad \text{de unde} \quad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2 := C_2 - C_3}{=} \\ &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ și determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\text{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -\frac{1}{10}.$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărțirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(x - 2018)^{2017} + x - 2020 = (x - 2017)(x - 2019) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii. Înlocuind în această relație pe x cu 2017, respectiv 2019, se obțin relațiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ și $b = -4038$, adică restul împărțirii lui f la g este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x .

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu $m(\widehat{BGD}) = 90^\circ$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \Leftrightarrow BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu $m(\widehat{EFC}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{FCE}) = 60^\circ$, avem

$$\operatorname{tg}(\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \Leftrightarrow FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FC$, adică $\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obține $x = \frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\frac{2}{3}$, rezultă că panta înălțimii căutate este $-\frac{3}{2}$, iar ecuația ei este $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcția f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obține că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{9x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9x^2 \cos^2 x} \left(1 - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{9x^2 \cos^2 x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{9 \cos^2 x} = -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1} = t$, rezultă că $x = t^2 + 1$ și integrala din enunț devine

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeței căutate poate fi scrisă

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = 4\sqrt{2} - 2.$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 17.09.2018

A

1.(8p) Să se găsească soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{1-x-2x^2} = -x-1.$$

- a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 și 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

- a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

- a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

- a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația

$$x * x = -2.$$

- a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 .

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$
d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) \mathbb{R}^* e) $[0, +\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{4}$

12.(8p) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x,$$

axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e^2$.

a) $\frac{15e^4 - 7}{2}$

b) $10e^2 - \frac{7}{2}$

c) $\frac{15e^2 - 1}{2}$

d) $10e^4 - \frac{7}{2}$

e) $\frac{7e^4 - 15}{2}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condițiile de existență în ecuația dată se obține

$$\begin{cases} 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ x \in (-\infty, -1] \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

care este soluție a ecuației.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\frac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned} B - \frac{1}{2}(A + A^t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 9 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9^3 + 4^3 - 36 - 36 - 36 = 2 \cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuația din enunț poate fi scrisă $x^2 + 4x + 2 = -2$, care are soluția $x = -2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -2 \cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obține $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1, 4)$ și ecuația medianei din A este $y = 5 - x$, de unde rezultă că $m = -1$ și $n = 5$. Deci, $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} - 1 \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2x + 6}} \right]^{\frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 1}} = e^2. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \frac{-mx^2 - 2x + m}{(x^2 + 1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă și numai dacă discriminantul ecuației $-mx^2 - 2x + m = 0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4 + 4m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părți, integrala din enunț devine

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x \cos x)^2 dx &= \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcția f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x \, dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \, dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

Pentru prima integrala se folosește Formula de integrare prin părți, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x} dx = du$ și atunci se obține

$$\begin{aligned} A &= 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, dx - 3 \int_0^2 u \, du = \\ &= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2}\right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2019

A

1.(8p) Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{și} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete și 6 sunt băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți?

6.(9p) Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin \widehat{C}$.

- a) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1, -1)$, $B(-2, 3)$ și $C(4, 0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui față de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

- a) $(1, 2)$ b) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ c) $\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$ d) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1}.$$

- a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real și pozitiv cu proprietatea că diferența dintre dublul său și cubul său este maximă.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

- a) $2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right)$ b) $\pi \left(2 + \ln \frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi \left(1 - \ln \frac{13}{5}\right)$
d) $2\pi \ln \frac{13}{5}$ e) $\pi \left(2 - \ln \frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluțiile ecuației $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt a și 2 , iar soluția ecuației $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulțimea $A \cap B$ are un singur element dacă și numai dacă

$$2a = a \iff a = 0$$

sau

$$2a = 2 \iff a = 1 .$$

În concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieți se poate forma o grupă de câte 2 băieți în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relația

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obținem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}.$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
și $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ și, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(i) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(ii) f satisface simultan condițiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \Rightarrow b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \Rightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

În concluzie, $a = \frac{1}{2}$ și $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Atunci $\omega^3 = 1$ și $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Cum polinomul $(X + 1)^{17} + mX^2 + n$ se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$ se obține că

$$\begin{aligned}(\omega + 1)^{17} + m\omega^2 + n = 0 &\Leftrightarrow (-\omega^2)^{17} + m(-1 - \omega) + n = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -(1 + m)\omega - m + n = 0,\end{aligned}$$

de unde $m = n = -1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

și atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A = \frac{1}{3}$.
Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow a = 2\sqrt{17}$$

și apoi din Teorema sinusurilor $\sin C = \frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $m_{BC} = -\frac{1}{2}$, rezultă că ecuația dreptei GD este $y = 2x$. De asemenea, ecuația dreptei BC este $y = -\frac{1}{2}x + 2$ și dacă $\{E\} = GD \cap BC$ se obține că $E\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ și că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2019x^{2018} + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} 673x^{2016} = 673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obține $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f . În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4} dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \\ &= \pi \left(x \Big|_1^3 + 2 \ln(x^2+4) \Big|_1^3\right) = 2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} = \frac{x}{(x^2 + 7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2}$$

și cum $\frac{x}{(x^2 + 7)^2}$ este o funcție impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx &= \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2 + 7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2 + 7 - x^2}{(x^2 + 7)^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2 + 7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2 + 7)^2} dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{7}}{7} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)} \right)' dx \right] = \\
&= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7} \left(-\frac{x}{2(x^2+7)} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx \right) = \frac{\pi+2}{28}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 14.09.2019**A****1.(10p)** Câte numere întregi are mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\} ?$$

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}.$$

- a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $(2 \ -3 \ 1)$
- d) $(2 \ -1 \ 3)$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20 . \end{cases}$$

- a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$
 d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a^2+x^2 & b^2+x^2 & c^2+x^2 \\ a^3+x^3 & b^3+x^3 & c^3+x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

- a) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 b) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 c) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 d) $f'(x) = (b-a)(c-a)(b-c)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
 e) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
 d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}.$$

- a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x - 1$. Să se determine $f'(0)$.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f .

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx.$$

- a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$
c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$
e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

- a) $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$ b) $a = -\frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$ c) $a = \frac{4}{17}$, $b = -\frac{4}{17}$
d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{4}{7}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuația din enunț este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obține că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulțimea conține 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Frația din enunț poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = i^2 = -1.$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a \ b \ c)$ și atunci ecuația matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a \ b \ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obține că $a = 2$, $b = -1$ și $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2 \ -1 \ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = 2$, $y = -1$ și $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcția din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned}
 f(x) & \stackrel{C_2:=C_2-C_1}{C_3:=C_3-C_1} \left| \begin{array}{ccc} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{array} \right| \stackrel{C_3:=C_3-C_2}{=} \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c) + a^3 + x^3 - \\
 & \quad - (a+x)(b^2+ab+a^2) - (a^2+x^2)(a+b+c)],
 \end{aligned}$$

de unde se obține că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \frac{\pi}{6}$, de unde se obține că $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ și mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\frac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparține dreptei $y = 2x - 2$, pentru că

$$a + 1 = 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{1} = 6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x) = 2e^x + 3$, rezultă că $f'(0) = 5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x = \frac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f .

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunț poate fi scrisă

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx = \int_7^{27} \frac{1}{\sqrt{2x - 5} \left(\frac{x}{\sqrt{2x - 5}} + 1 \right)} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x - 5} = t$, rezultă că $x = \frac{t^2 + 5}{2}$ și $\frac{1}{\sqrt{2x - 5}} dx = dt$, iar integrala devine

$$\begin{aligned} & \int_3^7 \frac{1}{\frac{t^2 + 5}{2t} + 1} dt = \int_3^7 \frac{2t}{t^2 + 2t + 5} dt = \int_3^7 \frac{2t + 2 - 2}{t^2 + 2t + 5} dt = \\ & = \int_3^7 \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 5} dt - 2 \int_3^7 \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt = \ln(t^2 + 2t + 5) \Big|_3^7 - 2 \int_3^7 \frac{1}{(t + 1)^2 + 4} dt = \\ & = \ln 68 - \ln 20 - \operatorname{arctg} \frac{t + 1}{2} \Big|_3^7 = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2 = \\ & = \ln \frac{17}{5} - (\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2) = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4 - 2}{1 + 4 \cdot 2} = \ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f , rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x) + e^{-x}(-4a \sin 4x + 4b \cos 4x) = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}[(-a + 4b) \cos 4x - (4a + b) \sin 4x] = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 4b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{17} \\ b = \frac{4}{17} \end{cases}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 18.07.2020

A

1.(7p) Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{și} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației

$$x^2 - x - a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{a) } E_1 = -\frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a} \qquad \text{b) } E_1 = \frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a}$$

$$\text{c) } E_1 = -\frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2} \qquad \text{d) } E_1 = \frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$$

$$\text{e) } E_1 = \frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$$

2.(8p) Amestecăm un pachet de 52 de cărți de joc și extragem simultan două cărți la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi ași de aceeași culoare?

$$\text{a) } \frac{1}{51 \cdot 52} \quad \text{b) } \frac{1}{51 \cdot 26} \quad \text{c) } \frac{1}{51 \cdot 13} \quad \text{d) } \frac{C_4^2}{52} \quad \text{e) } \frac{A_4^2}{52}$$

3.(9p) Să se calculeze $B \cdot A \cdot C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \ 1 \ 2).$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} & \text{b) } & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} & \text{c) } & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{d) } & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} & \text{e) } & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.(8p) Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } & (0, 1, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13} \right) & \text{b) } & (1, 0, 0), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13} \right) \\ \text{c) } & (0, 0, 1), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13} \right) & \text{d) } & (0, 0, 1), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right) \\ \text{e) } & \left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13} \right), (0, 0, 1) \end{aligned}$$

5.(7p) Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi și să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

$$\begin{aligned} \text{a) } & e = i, z = -1 + i & \text{b) } & e = 1 + i, z = i & \text{c) } & e = 1, z = 1 - 2i \\ \text{d) } & e = 1 - i, z = i & \text{e) } & e = -i, z = 2 - i \end{aligned}$$

6.(8p) Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

- a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

7.(8p) Se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-3, -4)$, $D(4, 3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanța de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

8.(9p) Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) nu există e) 1

9.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

- a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = x$

10.(8p) Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

- a) un punct de minim local
b) un punct de maxim local
c) două puncte de maxim local
d) două puncte de minim local
e) un punct de minim local și un punct de maxim local

11.(8p) Să se calculeze

$$\int (2x - 1) \cos 2x dx.$$

- a) $x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 c) $x \sin 2x + 2 (\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
 e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{4} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$ b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$
 d) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{10}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2020

1. Din relațiile lui Viete avem că $x_1 + x_2 = 1$ și $x_1 \cdot x_2 = -a^2$ și atunci

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2)}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{1 - 3(-a^2)}{(-a^2)^3} = -\frac{1 + 3a^2}{a^6} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} E_2^2 &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 1 - 4(-a^2) = 1 + 4a^2, \end{aligned}$$

deci $E_2 = \sqrt{1 + 4a^2}$.

Răspuns corect: c).

2. Extrăgând simultan 2 cărți la întâmplare din pachetul de 52 de cărți de joc, numărul cazurilor posibile este C_{52}^2 . Cum cele două cărți trebuie să fie doi ași de aceeași culoare, ei pot fi 2 ași roșii sau 2 ași negri, deci avem 2 cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este

$$P = \frac{2}{C_{52}^2} = \frac{2}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51 \cdot 13}.$$

Răspuns corect: c).

3.

$$\begin{aligned} B \cdot A \cdot C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea extinsă asociată sistemului. Cum $\text{rang } A = 2 = \text{rang } \bar{A} \neq 3 =$ numărul de necunoscute ale sistemului rezultă, din Teorema lui Kronecker-Capelli, că sistemul este compatibil nedeterminat cu necunoscutele principale x , y și $z = \alpha$ necunoscută secundară. Atunci sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 2y = 1 - \alpha \\ 3x - y = 2 - 2\alpha, \end{cases}$$

de unde obținem

$$x = \frac{3 - 3\alpha}{4} \quad \text{și} \quad y = \frac{1 - \alpha}{4},$$

care înlocuite în relația $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ne conduc la ecuația $13\alpha^2 - 10\alpha - 3 = 0$ cu soluțiile:

$$\alpha_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1$$

și

$$\alpha_2 = -\frac{3}{13} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{12}{13}, \quad y = \frac{4}{13}, \quad z = -\frac{3}{13}.$$

Răspuns corect: c).

5. Cum legea de compoziție din enunț poate fi scrisă

$$x * y = (x - i) \cdot (y - i) + i,$$

elementul neutru $e = i + 1$ se găsește ușor. Pentru a determina elementul absorbant al legii, căutăm $a \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $x * a = a * x = a$ pentru orice $x \in \mathbb{C}$ și obținem $a = i$.

În concluzie, $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5 = i$

Răspuns corect: b).

6. Cum $\sin a = \frac{3}{5}$ și $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ rezultă, din Teorema fundamentală a trigonometriei, că $\cos a = -\frac{4}{5}$, de unde se obține că

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Răspuns corect: d).

7. Cum ecuația dreptei CD este $y = x - 1$, putem considera $P(a, a - 1) \in CD$, $a \in \mathbb{R}$. Dar $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$, deci $\operatorname{tg}(\widehat{APC}) = \operatorname{tg}(\widehat{BPD})$, ceea ce este echivalent cu

$$\left| \frac{m_{AP} - m_{CD}}{1 + m_{AP} \cdot m_{CD}} \right| = \left| \frac{m_{BP} - m_{CD}}{1 + m_{BP} \cdot m_{CD}} \right|$$

care ne conduce la ecuația

$$\left| \frac{a}{3 - a} \right| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad OP = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Răspuns corect: e).

8. Având cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ în limită, înmulțim cu conjugata și obținem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1-x)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}.$$

Răspuns corect: a).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obține ecuația $y = x$.

Răspuns corect: e).

10. Cum

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1}{x},$$

rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1)$ și strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$, deci $x = 1$ este punct de minim local pentru f .

Răspuns corect: a).

11. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \cos 2x dx &= \int (2x - 1) \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \sin 2x dx = \\ &= x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Căutăm o descompunere a fracției de forma:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} &= \frac{A(\sin x + 2 \cos x) + B(\sin x + 2 \cos x)'}{\sin x + 2 \cos x} = \\ &= \frac{A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} = \\ &= \frac{(A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x}{\sin x + 2 \cos x}, \end{aligned}$$

de unde obținem, identificând coeficienții, că $A = \frac{4}{5}$ și $B = -\frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5} dx - \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 2 \cos x)'}{\sin x + 2 \cos x} dx = \\ &= \frac{4}{5} \cdot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 19.07.2021

A

1.(7p) Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 1$, $m \in \mathbb{R}$, știind că punctul $A(-2, 3)$ aparține graficului ei.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

e) $f(x) = x^2 + x - 1$

2.(8p) Să se determine în care dintre următoarele intervale se află soluția pozitivă a ecuației

$$\log_7(x^2 - x + 1) = 1 .$$

- a) $[0, 2]$ b) $(2, 5)$ c) $[5, 7)$ d) $[1, 2)$ e) $(4, 6]$

3.(8p) Fie numerele reale a și b astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Să se calculeze $7a + 4b$.

- a) 2021 b) 0 c) 15 d) -9 e) 23

4.(7p) Se consideră matricele de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1 + 4m & 6m \\ -2m & 1 - 3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) .$$

Să se calculeze determinantul matricei $X(1)$.

- a) 3 b) -2 c) -10 d) 10 e) 2

5.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2 .$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a * 1 = 6$.

- a) -1 b) 2 c) $\frac{2}{3}$ d) 3 e) $\frac{3}{2}$

6.(8p) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x + 2$. Să se calculeze $f'(0)$.

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 2 e) 0

7.(8p) Să se determine distanța dintre dreptele paralele

$$d_1 : 5x + 12y - 11 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 : y = mx + 2, \quad m \in \mathbb{R}.$$

- a) 1 b) 3 c) 2 d) 1 e) $\frac{3}{2}$

8.(10p) În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egal cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

- a) $\frac{58\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{58\sqrt{15}}{15}$ c) $\frac{29\sqrt{15}}{15}$ d) $\frac{58\sqrt{15}}{9}$ e) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$

9.(9p) Fie funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - 2\{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ și, în cazul în care aceasta există, să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) nu există c) 0 d) -1 e) 2

10.(9p) Se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcției $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$, să se calculeze valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului ABC .

- a) 8 b) 4 c) $\sqrt{15}$ d) $2\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{15}$

11.(8p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{și respectiv} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Să se determine primitiva H a funcției $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x) \cdot g^2(x)$ care verifică relația $H(0) = \frac{1}{8}$.

- a) $\frac{1}{8}[f(4x) - g(4x) + x]$ b) $\frac{1}{64}[f(4x) + 8x + 7]$
c) $\frac{1}{32}[g(4x) - 4x + 4]$ d) $\frac{1}{64}[g(4x) + 4x + 8]$
e) $\frac{1}{32}[f(4x) + 4x + 3]$

12.(10p) Să se calculeze

$$\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1 + 2e^{-x}} dx.$$

a) $2 \ln(e^2 - 2)$

b) $\ln(e - 2) \cdot \ln(e^2 - 2)$

c) $\ln 2 \cdot \ln 3$

d) $4 \ln(e^2 - 2) - 3 \ln(e - 2) + e^2 - e$

e) $\ln(e - 2) - e^2 + e$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2021

1. Punctul $A(-2, 3)$ aparține graficului funcției $f(x) = x^2 + mx - 1$ dacă $f(-2) = 3$, de unde obținem $m = 0$, adică funcția $f(x) = x^2 - 1$

Răspuns corect: c).

2. Ecuația logaritmică este echivalentă cu ecuația $x^2 - x + 1 = 7$ care are soluția pozitivă $x = 3 \in (2, 5)$.

Răspuns corect: b).

3. Ecuația matriceală ne conduce la următoarele relații $a + 2b = -7$ și $b = -4$, de unde $7a + 4b = -9$.

Răspuns corect: d).

4. Cum

$$X(1) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

rezultă că $\det X(1) = -10 + 12 = 2$.

Răspuns corect: e).

5. Ecuația din enunț este echivalentă cu $3a = 2$, de unde avem că $a = \frac{2}{3}$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $f'(x) = e^x + e^x \cdot x$, rezultă că $f'(0) = e^0 = 1$.

Răspuns corect: a).

7. Fie $A(0, 2)$ un punct de pe dreapta d_2 . Distanța dintre cele două drepte paralele coincide cu

$$d(A, d_1) = \frac{|5x_A + 12y_A - 11|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|12 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{169}} = 1.$$

Răspuns corect: d).

8. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2} \implies \sin A = \frac{6\sqrt{15}}{bc}$$

și atunci

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{6\sqrt{15}}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{12\sqrt{15}}.$$

Analog,

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{12\sqrt{15}} \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{12\sqrt{15}},$$

de unde obținem

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12\sqrt{15}} = \frac{116}{12\sqrt{15}} = \frac{29\sqrt{15}}{45}.$$

Răspuns corect: e).

9. Cum

$$[x] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 2, & \text{dacă } x \in [2, 3) \end{cases},$$

rezultă că

$$f(x) = (x - [x])(1 - 2x + 2[x])^2 = \begin{cases} (x - 1)(3 - 2x)^2, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ (x - 2)(5 - 2x)^2, & \text{dacă } x \in [2, 3) \end{cases}$$

și atunci

$$l_s(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x - 1)(3 - 2x)^2 = 1$$

și

$$l_d(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x - 2)(5 - 2x)^2 = 0,$$

de unde deducem că nu există $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $C(a, \sqrt{8a - a^2})$, $a \in [1, 5]$. Atunci, folosind intervalele de monotonie, aria $A_{\triangle ABC} = 2\sqrt{8a - a^2}$ are valoare minimă pentru $a = 1$, adică valoarea minimă pe care o poate lua aria triunghiului ABC este $2\sqrt{7}$.

Răspuns corect: d).

11. Cum

$$h(x) = \frac{e^{4x} + e^{-4x} - 2}{16},$$

rezultă că

$$H(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \mathcal{C}.$$

Dar $H(0) = \frac{1}{8}$, de unde obținem că $\mathcal{C} = \frac{1}{8}$, adică

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{64} + \frac{1}{8} = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x + 8}{64} \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} - 4x + 4 \right) = \frac{1}{32} [g(4x) - 4x + 4]. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &= \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - \frac{2}{e^x}} dx = \int_1^2 \frac{x \cdot e^x - e^{2x}}{e^x - 2} dx = \\
&= \int_1^2 \frac{x \cdot e^x}{e^x - 2} dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^x - 2} dx = \\
&\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^2 x \cdot \frac{e^x}{e^x - 2} dx - \int_e^{e^2} \frac{t}{t - 2} dt = \\
&= \int_1^2 x \cdot [\ln(e^x - 2)]' dx - \int_e^{e^2} \frac{t - 2 + 2}{t - 2} dt = \\
&= x \cdot \ln(e^x - 2) \Big|_1^2 - \int_1^2 \ln(e^x - 2) dx - t \Big|_e^{e^2} - 2 \ln |t - 2| \Big|_e^{e^2} = \\
&= \ln(e - 2) - e^2 + e - \int_1^2 \ln(e^x - 2) dx.
\end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă $\ln(e^x - 2) = y$, rezultă că $x = \ln(e^y + 2)$, de unde $dx = \frac{e^y}{e^y + 2} dy$ și atunci integrala devine:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx &= \ln(e - 2) - e^2 + e - \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y \cdot \frac{e^y}{e^y + 2} dy \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} y \cdot \frac{e^y}{e^y + 2} dy &= \ln(e - 2) - e^2 + e \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x \cdot e^x}{e^x + 2} dx &= \ln(e - 2) - e^2 + e \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x \cdot e^x}{e^x(1 + 2e^{-x})} dx = \ln(e-2) - e^2 + e \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \frac{x - e^x}{1 - 2e^{-x}} dx + \int_{\ln(e-2)}^{\ln(e^2-2)} \frac{x}{1 + 2e^{-x}} dx = \ln(e-2) - e^2 + e .$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2021

A

1.(7p) Graficul cărei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de mai jos conține punctul $A(-1, 4)$?

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$

2.(8p) Să se calculeze

$$N = i + i^2 + i^3 + i^4 .$$

a) $N = i$

b) $N = 0$

c) $N = -1$

d) $N = 1$

e) $N = -i$

3.(8p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = -1 \\ x - 2y - z = 2. \end{cases}$$

a) $(1, 0, -1)$

b) $(0, 1, 1)$

c) $(0, -1, -1)$

d) $(1, 1, 0)$

e) $(1, 1, 1)$

4.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5} \ln \frac{4}{9}$ b) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{5} \ln \frac{4}{9}$ c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{8}{9}$
 d) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln \frac{1}{9}$ e) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5} \ln \frac{8}{9}$

5.(9p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max \left\{ \cos x, \frac{1}{2} \right\} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}$

6.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Să se calculeze $B = A^2 - A$.

- a) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 d) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.(7p) Pe mulțimea $G = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} .$$

Să se calculeze $N = 2 * 1$.

- a) $N = 1$ b) $N = 2$ c) $N = \sqrt{3}$ d) $N = 0$ e) $N = \sqrt{5}$

8.(8p) Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$.

- a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) 3

9.(9p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-2, 0\}$ c) $\{1, -1\}$
d) $\{1, -2\}$ e) $\{0, 1\}$

10.(8p) Să se calculeze

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

- a) $L = \frac{1}{2}$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{6}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$

11.(10p) Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii dusă din A în $\triangle ABC$. Să se calculeze $S = m + n$.

- a) $S = -3$ b) $S = 2$ c) $S = -1$ d) $S = 0$ e) $S = 4$

12.(8p) Să se calculeze $\sin x$, știind că $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2021

1. Graficul funcției $f(x) = x^2 - 2x + 1$ conține punctul $A(-1, 4)$, pentru că $f(-1) = 4$.

Răspuns corect: d).

2. $N = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$.

Răspuns corect: b).

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = 1$, $y = 0$ și $z = -1$.

Răspuns corect: a).

4. Căutăm o descompunere a fracției de forma:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} &= \frac{A(2 \sin x + \cos x) + B(2 \sin x + \cos x)'}{2 \sin x + \cos x} = \\ &= \frac{A(2 \sin x + \cos x) + B(2 \cos x - \sin x)}{2 \sin x + \cos x} = \\ &= \frac{(2A - B) \sin x + (A + 2B) \cos x}{2 \sin x + \cos x}, \end{aligned}$$

de unde obținem, identificând coeficienții, că $A = \frac{4}{5}$ și $B = \frac{3}{5}$. Deci integrala devine:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{5} dx + \frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + \cos x)'}{2 \sin x + \cos x} dx = \\ &= \frac{4}{5} \cdot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

5. Cum $\cos x = \frac{1}{2}$ pentru $x = \frac{\pi}{3}$, integrala din enunț devine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max \left\{ \cos x, \frac{1}{2} \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Răspuns corect: d).

6.

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

7. $N = 2 * 1 = \sqrt{2^2 \cdot 1^2 - 2^2 - 1^2 + 2} = \sqrt{4 - 4 - 1 + 2} = 1.$

Răspuns corect: a).

8. Cum $f'(x) = 2 + \frac{1}{x}$, rezultă că $f'(1) = 2 + 1 = 3$.

Răspuns corect: e).

9. Cum $f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x)$ se anulează în -2 și 0 , folosind monotonia funcției deducem că mulțimea punctelor de extrem local este $\{-2; 0\}$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l' Hospital de 2 ori se obține

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Răspuns corect: c).

11. Cum panta dreptei BC este 1 , rezultă că panta înălțimii din A este -1 și atunci ecuația ei este $y = -x + 5$, de unde $m = -1$ și $n = 5$, deci $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

12. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\sin^2 x = \frac{2}{3}$.

Ținând cont de intervalul dat se obține $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 14.07.2022

A

1.(8p) Un muncitor taie o scândură cu lungimea de $4 m$ în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu $6 cm$ mai lungă decât precedenta. Ce lungime are cea mai lungă bucată?

- a) $61 cm$ b) $67 cm$ c) $70 cm$ d) $73 cm$ e) $79 cm$

2.(8p) Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obținem suma punctelor 5?

- a) $\frac{1}{108}$ b) $\frac{1}{72}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{6}$

3.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 2022 \end{pmatrix}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

4.(9p) Să se determine numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care satisfac condițiile

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) o infinitate

5.(8p) Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$z_1 \perp z_2 = z_1 \cdot z_2 + \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2),$$

unde pentru $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Să se determine modulul simetricului elementului $z = 2 + i$ în raport cu această lege.

- a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) 1 e) $2\sqrt{5}$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) -1

7.(7p) Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianeî duse din A în triunghiului ABC . Să se calculeze $m + n$.

- a) -6 b) -4 c) 0 d) 4 e) 6

8.(9p) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x .$$

- a) $y = -2023x + \frac{1}{2}$ b) $y = -2023x - \frac{1}{2}$ c) $y = -2021x - 2$
d) $y = -2021x$ e) $y = -2022x$

9.(7p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 5x - 9$ b) $y = 6x - 10$ c) $y = -6x + 2$
d) $y = 6x - 2$ e) $y = 4x - 8$

10.(10p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$(1 - mx)e^x \leq 1 ,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) \emptyset b) $\{0\}$ c) $\{1\}$ d) $\{2\}$ e) $\{-1\}$

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos(2x) dx .$$

- a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi-1}{2}$

12.(9p) Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx .$$

- a) $\frac{40}{3}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{10}{3}$ e) $\frac{40}{9}$

SOLUȚII AC Iulie 2022

1. Observăm că lungimile celor 10 bucăți reprezintă primii zece termeni ai progresiei aritmetice $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ de rație $r = 6 \text{ cm}$ și suma $S_{10} = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm}$. Obținem că $a_1 = 13 \text{ cm}$ și $a_{10} = 67 \text{ cm}$.

Deci, cea mai lungă bucată are 67 cm .

Răspuns corect: b).

2. Cum la aruncarea a trei zaruri numărul cazurilor posibile este 6^3 și în doar șase dintre ele suma punctelor este 5, adică în cazurile:

$$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) ,$$

rezultă că probabilitatea cerută este $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

Răspuns corect: c).

3. Deoarece determinantul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2022 \end{vmatrix}$$

este nenul, rezultă că $\text{rang } A = 3$.

Răspuns corect: d).

4. Din ecuația matriceală din enunț obținem sistemul

$$\begin{cases} 3a + c = a + b \\ 3b + d = a + b \\ a + 3c = c + d \\ b + 3d = c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ a + 2c - d = 0 \\ b - c + 2d = 0 \end{cases}$$

care are matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cu $\det A = 0$ și

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

nenul, deci $\text{rang } A = 3$. Cum sistemul este omogen, rezultă că el este compatibil nedeterminat cu a , b , c necunoscute principale și d necunoscută secundară, primele trei ecuații sunt principale și ultima e secundară, deci avem sistemul

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + 2b = -d \\ a + 2c = d \end{cases}$$

cu soluția $a = -d$, $b = -d$ și $c = d$, care înlocuită în relația $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022$, ne conduce la $d = \pm\sqrt{\frac{2022}{4}}$, adică două matrice.

Răspuns corect: c).

5. Cum elementul neutru al legii de compoziție date este 1, simetricul lui $z = 2 + i$ îl găsim rezolvând ecuația $z \perp z' = 1$, de unde rezultă $z' = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ cu modulul $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Răspuns corect: a).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei obținem că $\cos^2 x = \frac{1}{2}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, de unde rezultă că $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și atunci $\sin 2x = -1$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului BC atunci $M(1, 4)$ și ecuația lui AM este $y = -x + 5$, deci $m = -1$ și $n = 5$, adică $m + n = 4$.

Răspuns corect: d).

8. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, rezultă că f nu are asimptotă orizontală la $-\infty$, deci căutăm asimptotă oblică la $-\infty$. Avem

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 2022x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2022 \right)}{x} = -2023 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2023x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

deci $y = -2023x + \frac{1}{2}$.

Răspuns corect: a).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 6$, se obține $y = 6x - 10$.

Răspuns corect: b).

10. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - mx)e^x$. Cum $f(0) = 1$, rezultă că $f(x) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $x = 0$ este punct de maxim local pentru f . Cum f este derivabilă în $x = 0$, rezultă conform teoremei lui Fermat, că $f'(0) = 0$.

Dar $f'(x) = -me^x + (1 - mx)e^x$ cu $f'(0) = -m + 1$, de unde se obține $m = 1$ care satisface condiția problemei.

Răspuns corect: c).

11. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)' dx = \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \\ &= (\pi - 1) \cdot \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\sin 0}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

12. Folosind formula de integrare prin părți obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot x^3 dx = \frac{2}{3} \int_0^2 (\sqrt{1+x^3})' \cdot x^3 dx = \\ &= \frac{2}{3} \left(x^3 \sqrt{1+x^3} \Big|_0^2 - \int_0^2 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx \right) \stackrel{1+x^3=t}{3x^2 dx=dt} \\ &= \frac{2}{3} \left(24 - \int_1^9 \sqrt{t} dt \right) = \frac{2}{3} \left(24 - \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_1^9 \right) = \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: IULIE, DATA 17.07.2023**A**

1.(7p) Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ și $g(x) = 3x - 1$. Să se determine suma soluțiilor ecuației $(f \circ g)(x) = 0$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 9 e) -9

2.(8p) Fie numărul complex z care verifică ecuația

$$\bar{z} + |z| = 2 + 8i.$$

Să se determine $|z|$.

- a) 289 b) 15 c) 8 d) 23 e) 17

3.(9p) La o ședință cu părinții participă șapte doamne și opt domni, printre care doamna X și domnul Y. În câte moduri se poate forma un comitet de trei doamne și patru domni, știind că doamna X refuză să fie desemnată împreună cu domnul Y?

- a) 277200 b) 1925 c) 525 d) 2450 e) 5040

4.(10p) Fie (x_0, y_0, z_0) o soluție nebanală a sistemului liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea raportului

$$\frac{x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

- a) $\frac{37}{75}$ b) $-\frac{47}{75}$ c) 0 d) $-\frac{37}{75}$ e) $\frac{47}{75}$

5.(8p) Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 5

6.(7p) Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

- a) $(X + \widehat{4})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ b) $(X + \widehat{4})(X + \widehat{2})(X^2 + \widehat{1})$
 c) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})(X^2 + \widehat{1})$ d) $(X + \widehat{2})^2(X^2 + X + \widehat{1})$
 e) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{4})(X^2 + X + \widehat{1})$

7.(8p) Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} + (a+1)\vec{j}$, $\vec{v} = -b\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{w} = (2a+4)\vec{i} - 4b\vec{j}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$, să se calculeze $a + b$.

- a) -2 b) 2 c) 0 d) -1 e) 1

8.(9p) Să se calculeze diatanta de la $O(0, 0)$ la simetricul punctului $A(4, 2)$ față de punctul $B(-1, 1)$.

- a) $2\sqrt{5}$ b) 2 c) $3\sqrt{10}$ d) $\sqrt{2}$ e) 6

9.(8p) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x}.$$

- a) $y = -x - 1$ b) $y = x - 1$ c) $y = x + 1$
 d) $y = 1 - x$ e) $y = -x$

10.(8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2\sqrt{x}$$

în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

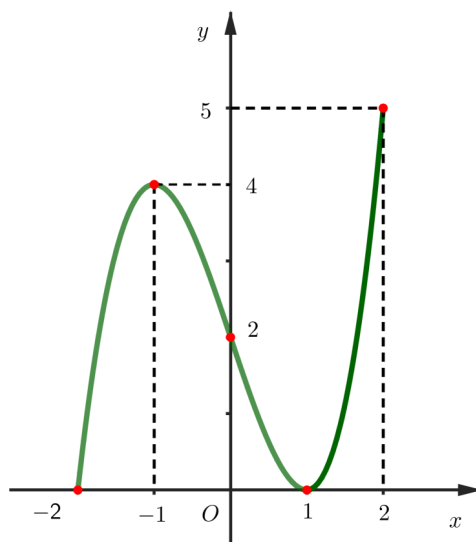
- a) $y = 5x - 2$ b) $y = 3x$ c) $y = 2x + 1$
 d) $y = 3x + 2$ e) $y = 5 - 2x$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x} dx.$$

- a) $\frac{1}{2e^2}$ b) $\frac{1}{e^2} + 1$ c) $-\frac{1}{6e^2}$ d) $-\frac{1}{2e^2}$ e) $-\frac{1}{e^2} - 1$

12.(10p) Graficul unei primitive F a unei funcții continue $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ este dat în figura de mai jos. Câte dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate?



(i) $F'(1) = f(1)$ (ii) $f(1) = F(1)$ (iii) $\int_0^2 f(x) dx = 3$

(iv) $\int_{-1}^0 f(x) \cdot F(x) dx = -6$ (v) $f(x) \leq 0, \forall x \in (-1, 1)$

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOLUȚII AC Iulie 2023

1. Avem $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) = 9x^2 - 9x + 2$. Atunci suma soluțiilor ecuației $9x^2 - 9x + 2 = 0$ este $x_1 + x_2 = 1$.

Răspuns corect: b).

2. Notăm $z = a + ib$, de unde $\bar{z} = a - ib$ și $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ecuația devine

$$a - ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i.$$

Prin identificarea părților reale, respectiv imaginare obținem sistemul

$$\begin{cases} a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Rezultă $\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$ cu $2 - a \geq 0$. Prin ridicare la pătrat găsim $a = -15$ și în final $|z| = 17$.

Răspuns corect: e).

3. Dintr-un grup de n persoane se pot alege k persoane în C_n^k moduri. Atunci, fără restricții, ar fi C_7^3 moduri de a alege doamnele și C_8^4 moduri de a alege domnii. Conform "regulii produsului", avem $C_7^3 \cdot C_8^4$ moduri de a forma comitetul respectiv (fără restricții). Din acest număr vom scădea cazurile "nefavorabile", adică cele în care doamna X și domnul Y fac parte din comitet: $C_6^2 \cdot C_7^3$ (deoarece mai rămân de ales două doamne din șase și trei domni din restul de șapte). Rezultă 1925 de moduri.

Răspuns corect: b).

4. Notăm $z = z_0$. Atunci sistemul dat devine

$$\begin{cases} x + 2y = -z_0 \\ x - 3y = -2z_0 \end{cases}.$$

Reducem pe x și găsim $y_0 = \frac{z_0}{5}$, apoi $x_0 = -\frac{7z_0}{5}$, ce verifică ecuația nefolosită.

Prin înlocuirea în expresie obținem $-\frac{37}{75}$.

Răspuns corect: d).

5. Minorul de ordinul 3 format din primele două coloane și ultima coloană este nenul, deci rangul matricei este 3.

Răspuns corect: c).

6. Folosind schema lui Horner, verificăm dacă elementele lui \mathbb{Z}_5 sunt rădăcini ale polinomului dat. Găsim că doar $\hat{1}$ și $\hat{3}$ sunt rădăcini. Mai mult, rezultă descompunerea

$$f = (X - \hat{1})(X - \hat{3})(X^2 + X + 1) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X^2 + X + 1),$$

unde $X^2 + X + 1$ este ireductibil deoarece este polinom de gradul doi fără rădăcini în \mathbb{Z}_5 .

Răspuns corect: e).

7. Avem

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 - b)\vec{i} + (a + 5)\vec{j}.$$

Prin identificarea cu coordonatele lui \vec{w} obținem condițiile

$$1 - b = 2a + 4, \quad a + 5 = -4b.$$

Rezultă $a = -1, b = -2$, deci $a + b = -2$.

Răspuns corect: a).

8. Folosind formula mijlocului unui segment obținem că simetricul lui A față de B este punctul $C(-6, 0)$. Atunci $OC = 6$.

Răspuns corect: e).

9. Folosind că $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ pentru $x < 0$, avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = \infty(2 - 1) = \infty,$$

deci nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$.

Căutăm asimptota oblică $y = mx + n$, unde

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)}{x} = -1, \\
 n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{4 + 1/x^2} + 2 \right)} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \left(\sqrt{1 + 2/x} + 1 \right)} \\
 &= 0 + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Rezultă $y = -x + 1$.

Răspuns corect: d).

10. Avem $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Panta tangentei este $m = f'(1) = 2$. Cum $f(1) = 3$, ecuația tangentei va fi $y - 3 = 2(x - 1)$, adică $y = 2x + 1$.

Răspuns corect: c).

11. Folosim de două ori formula de integrare prin părți cu

$$\int e^{-2x} dx = \frac{e^{-2x}}{-2}, \text{ adică } e^{-2x} = -\frac{1}{2}(e^{-2x})'$$

Avem

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^{-2x} dx &= (x^2 - x) \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x - 1) \frac{e^{-2x}}{-2} dx \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \left((2x - 1) \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2}}{-2} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2e^2}.
 \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Avem:

(i) Adevărat din definiția primitivei.

(ii) $x = 1$ este punct de minim al funcției derivabile F . Din Teorema lui Fermat rezultă că $F'(1) = 0$, deci $f(1) = 0$. Mai mult, din grafic, $F(1) = 0$. Deci adevărat.

(iii) $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = 5 - 2 = 3$, deci adevărat.

(iv) $\int_{-1}^0 f(x) \cdot F(x) dx = \int_{-1}^0 F'(x) \cdot F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2}(2^2 - 4^2) = -6$; adevărat.

(v) Pe intervalul $(-1, 1)$ funcția F este descrescătoare, deci $F'(x) \leq 0$, adică $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Astfel și ultima afirmație este adevărată.

Răspuns corect: e).

Bibliografie

- [1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruta, D. Rendi, I. Mihut, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învățământul superior*, Editura Politehnica, 2010.
- [2] Gh. Cenușă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Șerban, O. Vegheș, *Admitere ASE București, Teste grilă și autoevaluare, 2005-2008*, Editura Cison, București.
- [3] P. Găvruta, I. Goleț, D. Păunescu, C. Arieșanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Țigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrișor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat și admiterea în Universitatea Politehnica Timișoara*, Editura Politehnica Timișoara, 2013.
- [4] Gh. Gussi, O. Stănășilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, R.A. București, 1994.
- [5] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didactică și Pedagogică, 1978.
- [6] C. Ionescu-Țiu, L. Pîrșan *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, București, 1975.
- [7] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.
- [8] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicații*, Editura Albatros, 1987.
- [9] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.

- [10] V. Radu, *Teme și probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.
- [11] *Gazeta Matematică*.
- [12] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educației Naționale*.
- [13] *Probleme date la olimpiade și concursuri de matematică*.
- [14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educației Naționale*.

$$\ln(x^2+1) + C =$$

$$\ln \frac{9}{10} \frac{1}{\sqrt{2}} + C = \ln 9 \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln 9 \frac{10\sqrt{2}}{9}$$

$$C = \ln 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln 10\sqrt{2} =$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln 2 + \ln 5\sqrt{2}$$

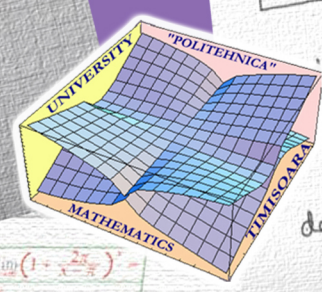
$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \frac{x-2}{x-1})^x = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \frac{x-2}{x-1})^{\frac{1}{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{x-2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{x-1}} \right]^{\frac{x}{x-1}}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Verificați existența limitei $f = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

Metode în funcție de numărul de rădăcini
 ca să înțelegem numărul de rădăcini
 rădăcini
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 = (1, 2, 3, 4, 5)$
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 = (1, 2, 3, 4, 5)$
 $C_m^k (m-1)! = C_6^{5/4} = 24$
 6 cazuri
 24 cazuri
 1+3, 1+4, 1+5 | deci, total
 24 cazuri
 Sol: $20 + 24 = 44$ cazuri



AL 24

$$A = [a | c_2 | c_3 | c_4], B = [a | c_2 | c_3 | c_4]$$

$$\det(A) = 1, \det(B) = 4, C = [c_2 | c_3 | c_4]$$

$$\det(C) = ?$$

$$\det(C) = (-1) \det [a | c_2 | c_3 | c_4]$$

În general: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

C_1 , func. de continuitate
 D_1 , func. de derivabilitate
 $0 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1, (f) \in \mathbb{R}$
 f - compus de func. continue
 Studiu de caz: func. f în $x=0$
 derivata $f'(0) = 0$

Menor Whiteboard



Editura POLITEHNICA

Să se calculeze $\cos(a-b)$.

- b) $-\frac{3}{8}$
- c) $\frac{1}{8}$
- d) $-\frac{1}{8}$
- e) $\frac{1}{2}$
- f) $-\frac{1}{2}$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos a + \cos b = \frac{1}{2} \quad |^2 \Rightarrow \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b = \frac{1}{4}$$

$$\sin a + \sin b = 1 \quad |^2 \Rightarrow \sin^2 a + 2 \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b = 1$$

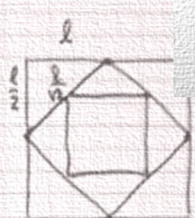
$$\Rightarrow \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{2} + \frac{\cos^2 b + \sin^2 b}{2} + 2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = \frac{1}{4} + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos(a-b) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(a-b) = \frac{1}{2}$$

$a > 0$ $a > 0$

AL 27

Cel mai mare nr. n , ai
 $2017 \cdot S_n \geq S_1$



$$2017 \cdot \frac{S_1}{2^{n-1}} \geq S_1$$

$$2^{n-1} \leq 2017$$

$$n-1 = 10$$

$$n = 11$$

$$I(2017) = a x^{2016} \sqrt{1+x^2} + b I(2015)$$

$(a, b \in \mathbb{R})$

$$\frac{x^{2017}}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x^{2016} dx =$$

$$\int x^{2016} dx = \frac{x^{2017}}{2017} + C = \frac{x^{2017}}{2017} + C$$

$$\frac{x^{2017}}{1+x^2} dx = \frac{x^{2017}}{x^2+1} dx = \frac{x^{2015} \cdot x^2}{x^2+1} dx =$$

$$x^{2015} \cdot \frac{x^2+1}{x^2+1} dx = \int x^{2015} dx = \frac{x^{2016}}{2016} + C$$

$$x^{2017} - 2016 \cdot I(2017) = 2016 \cdot I(2015)$$

ISBN 978-606-35-0565-2